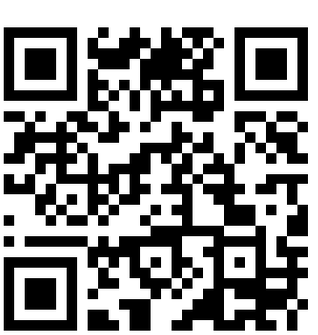
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE V. E. II
11
Atti Accad.
101
ROMA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

REGIA ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA

SERIE II. - VOLUME XI.

IN MODENA
COI TIPI DELLA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1895.

Digitized by Google

Digitized by Google

ALBO ACCADEMICO

24 novembre 1894

ELENCO DELLE CARICHE

PRESIDENTE
RICCARDI comm. prof. PIETRO

Segretario Generale
FERRARI MORENI conte cav. GIORGIO

Vice-Segretario Generale
N. N.

Bibliotecario
SANDONNINI dott. TOMMASO

Archivista
CRESPELLANI cav. avv. ARSENIO

Tesoriere
MAESTRI ing. cav. VINCENZO

Economo
MALMUSI cav. cap. BENEDETTO

Deputato alla Custodia del Medagliere
CRESPELLANI ARSENIO predetto.

Digitized by Google

CARICHE DELLE SEZIONI

Direttori

Per le Scienze PANTANELLI cav. prof. DANTE
Per le Lettere RAISINI comm. prof. avv. GUGLIELMO
Per le Arti HUGUES cav. prof. CHIAFFREDO

Censori

Per le Scienze DELLA VALLE prof. ANTONIO
Per le Lettere SANDONNINI comm. sen. avv. CLAUDIO
Per le Arti ASIOLI cav. prof. FERDINANDO

Segretari

Per le Scienze NICOLI cav. prof. FRANCESCO
Per le Lettere OLIVI prof. LUIGI
Per le Arti VALERI prof. DEMETRIO

Digitized by Google

ELENCO DEI SOCI

SOCI PERMANENTI

Cuoghi Costantini prof. Antonio
Franciosi prof. avv. Giovanni
Giovanardi cav. prof. Eugenio
Nicoli cav. prof. ing. Francesco
Olivi prof. avv. Luigi
Raisini comm. prof. avv. Guglielmo
Riccardi prof. Paolo
Riccardi comm. prof. Pietro
Ruffini uff. comm. prof. ing. Ferdinando

SOCI ATTUALI

Albertotti prof. Giuseppe
Asioli cav. prof. Ferdinando
Bergonzini cav. prof. Curzio
Berti cav. prof. Adeodato
Bezzi cav. prof. Giovanni
Borsari cav. avv. Francesco
Brandoli prof. avv. Placido
Calori-Cesis march. Ferdinando
Casarini cav. prof. Giuseppe
Cesari cav. prof. Giuseppe
Chistoni prof. Ciro
Crespellani cav. avv. Arsenio

Digitized by Google

Della Valle prof. Antonio
Del Re prof. Alfonso.
Fabbri cav. prof. Ercole Federico
Ferrari Moreni conte cav. Giorgio
Fogliani cav. prof. magg. Tancredi
Galvagni cav. prof. Ercole
Generali cav. prof. Francesco
Generali uff. prof. Giovanni
Hugues cav. prof. Chiaffredo
Maestri cav. ing. prof. Vincenzo
Magnanini prof. Gaetano.
Malaguzzi Valeri conte cav. Ippolito
Malmusi cav. cap. Benedetto
Martinelli cav. prof. Filippo
Mazzetti ab. Giuseppe
Melucci cav. prof. Pasquale
Mori prof. Antonio
Pantanelli cav. prof. Dante
Puglia cav. prof. Giuseppe
Sabbatini prof. Pio
Sandonnini comm. sen. avv. Claudio
Sandonnini dott. Tommaso
Triani comm. prof. avv. Giuseppe
Valdrighi conte cav. Luigi Francesco
Valeri prof. ing. Demetrio
Vischi cav. prof. don Luigi
Zannini prof. ing. Francesco

SOCI SOPRANNUMERARI

Biagi prof. don Michele
Bonasi comm. prof. conte Adeodato
Businelli comm. prof. Francesco
Camus prof. cav. Giulio
Canestrini uff. prof. Giovanni
Carruccio uff. prof. Antonio

Digitized by Google

Cogliolo prof. Pietro
Ferrini prof. Contardo
Foà cav. prof. Pio
Gibelli cav. prof. Giuseppe
Manfredi cav. prof. Nicolò
Montanari comm. sen. Antonio
Ricca Salerno cav. prof. Giuseppe
Riccò cav. prof. ing. Annibale
Roncaglia cav. prof. Emilio
Rossi cav. prof. Luigi
Schiff cav. prof. Roberto
Tansini prof. Iginio
Todde comm. prof. avv. Giuseppe

SOCI CORRISPONDENTI

Alfani cav. prof. Augusto, *Firenze*
Angelucci cav. magg. Angelo, *Torino*
Aschieri prof. cav. Ferdinando, *Pavia*
Barera cav. Carlo, *Milano*
Berchet comm. dott. Guglielmo, *Venezia*
Berti comm. prof. Domenico, *Firenze*
Betocchi comm. prof. Alessandro, *Roma*
Bormann prof. dott. Eugenio, *Vienna*
Calori comm. prof. Luigi, *Bologna*
Conti comm. prof. Augusto, *Firenze*
Davis di Schetton Bernardo, *Londra*
De-Rossi cav. Michele Stefano, *Roma*
Didion gen. Isidoro, *Parigi*
Doria march. comm. Giacomo, *Genova*
Ellero comm. prof. Pietro, *Boma*
Faccioli cav. ing. prof. Raffaele, *Bologna*
Favaro uff. prof. Antonio, *Padova*
Fornari comm. abb. Vito, *Napoli*
Gabba uff. prof. Carlo Francesco, *Pisa*
Galassini prof. Adolfo, *Reggio-Emilia*

Digitized by Google

Lampertico comm. sen. Fedele, *Vicenza*
Lorenzoni prof. Giuseppe, *Padova.*
Loria prof. Gino, *Genova*
Luzzatti gr. croce prof. Luigi, *Padova*
Mantegazza comm. prof. sen Paolo, *Firenze*
Massarani comm. sen. Tullo, *Roma*
Messedaglia prof. cav. Angelo, *Roma*
Messina prof. Pietro, *Palazzolo*
Nicolucci prof. Giustiniano, *Isola di Sora*
Palma prof. cav. Luigi, *Roma*
Ragazzi cav. dott. Vincenzo, *Scioa*
Rohault de Fleury Giorgio, *Parigi*
Salvioli prof. Giuseppe, *Palermo.*
Sapio cav. prof. Giuseppe, *Palermo*
Scialoia prof. Vittorio, *Roma*
South sir James, *Londra*
Tacchini comm. prof. Pietro, *Roma*
Tamburini cav. prof. Augusto, *Reggio-Emilia*
Targioni-Tozzetti comm. prof. Adolfo, *Firenze*
Tavani mons. Francesco, *Como*
Toschi Giambattista, *Baiso* (Provincia di Reggio-Emilia)
Venturi cav. prof. Adolfo, *Roma*

SOCI ONORARI

Beltrami uff. prof. Eugenio, *Roma*
Berthelot prof. Marcellino, *Parigi*
Brioschi comm. prof. sen. Francesco, *Milano*
Caetani Lovatelli contessa Ersilia, *Roma*
Cossa comm. prof. Luigi, *Pavia*
Cremona comm. prof. sen. Luigi, *Roma*
Ferrara prof. Francesco, *Venezia*
Iordao Levy cav. Maria, *Lisbona*
Liais Emanuele, *Rio Janeiro*
Mascart prof. Emilio, *Parigi*
Menabrea comm. sen. conte Luigi Federico, *Chambery*

Digitized by Google

Mommsen prof. Teodoro, *Berlino*
Schiaparelli comm. prof. senatore Giovanni, *Milano*
Tosti cav. abb. Luigi, *Montecassino*
Verdi comm. senatore Giuseppe, *Busseto*
Villari prof. comm. senatore Pasquale, *Firenze*
Virchow prof. Rodolfo, *Berlino*

Digitized by Google

Digitized by Google

RELAZIONI DEGLI ATTI ACCADEMICI

ADUNANZE DELLE SEZIONI

Adunanza della Sessione di Scienze

15 Dicembre 1894.

Il Socio Don Giuseppe Mazzetti presenta una sua monografia *sugli echini fossili* della collezione già da lui ceduta al Museo di Geologia dell' Università di Modena; sono specie raccolte nel modenese, specialmente nei dintorni di Guiglia, Zocca, Montese, Pavullo e Pantano, e comprende la descrizione di 136 specie, molte delle quali sono state descritte per la prima volta dall'Autore; è uno dei più ricchi cataloghi di echini fossili, e può reggere al paragone con quelli classici di Laubos Coteau, Dames, ecc.

Il Socio Prof. Demetrio Valeri presenta una nota del Socio corrispondente Prof. Ferdinando Aschieri relativa ad *un modo di stabilire le coordinate omogenee nello spazio.* — Presi cinque punti, quattro qualunque dei quali non complanari, e fatta passare una quadrica per i lati del quadrilatero sghembo che ha per vertici quattro dei punti dati e per il punto rimanente, l' Autore considera tutte le omografie che trasformano in se la conica ottenuta segando la quadrica col piano che passa per due vertici consecutivi del quadrangolo e per il punto comune ai piani tangenti negli altri due vertici e nel quinto punto. Esiste allora corrispondenza univoca fra i punti dello spazio e queste omografie, e quindi i coefficienti dell'equazione bilineare che individua una di queste omografie si possono assumere come coordinate omogenee del punto corrispondente.

Il Socio Prof. Dante Pantanelli presenta una memoria dell' Ing. Prof. Alfredo Galassini, intitolata l' *orizzonte del monte Cimone,* corredata

Digitized by Google

da due carte geografiche e da altre tavole sussidiarie. — L' Autore descrive i metodi per ritrovare i punti notevoli visibili dal Cimone. L' orizzonte del Cimone è limitato dalle Alpi, meno un breve tratto tra il Monviso e il Granparadiso, dove l' orizzonte è limitato dal gruppo del Cusna, Succiso e Penice; l' ultima punta alpina visibile è Montemaggiore nell' Istria; lungo la cintura alpina sono visibili il Monjoie, il Monterosa, il Finsteraarhorn, il Gottardo, il Bernina, l' Adamello, il Marmolado, il Mangart; negli Appennini chiudono l' orizzonte Montebeni, la Falterona, il Comero, Montecatrio, il Vettore, il Terminille, il monte Amiata e Gerfalco; l' orizzonte è quindi completato dall' Elba, dalla Corsica e dal Mediterraneo.

Adunanza della Sezione di Scienze

18 Gennaio 1895.

Il socio Prof. Ciro Chistoni presenta due Note risguardanti i risultati delle osservazioni meteorologiche del 1894 e i risultati eliofanometrici dello stesso anno. Fa notare la grande scarsità di pioggia nel 1894 e il maggior numero di ore durante le quali si vide il sole in confronto del 1893.

Il socio prof. Alfonso Del Re presenta una Nota nella quale si occupa della costruzione e delle proprietà di due congruenze k k' del 3.° grado; dimostra che queste congruenze si individuano a vicenda, contengono una infinità di schiere rigate del 2.° ordine distribuite per modo, che una schiera dell' una incide su una schiera dell' altra. La k ha 12 fasci di rette, un cono ed una conica; la k' ne ha 13, dei quali uno è doppio. È notevole la distribuzione di questi fasci. Inoltre k e k' hanno ciascuna 30 iperboloidi isolati, ed ammettono generazioni duali. Entrambe sono rappresentabili. La k è contenuta in tre complessi di 2.° grado, due dei quali sono tetraedrali, con caratteristica $(\overline{2} \,.\, \overline{2})$, ed ha per projezioni sul nostro spazio (quando venga pensata come superficie di una varietà lineare a 5 dimensioni) delle superficie del 6.°, 5.° e 4.° ordine, provviste ordinariamente di 12, 14, 16 rette.

Il socio prof. Francesco Nicoli dà comunicazione della 2.ª parte di una sua Nota intorno agli spazi lineari a tre dimensioni considerati nel nostro spazio. In questa parte l' A. dimostra che nello spazio a tre dimensioni si verificano, relativamente a rette, piani e spazi perpendicolari, gli stessi teoremi che avrebbero luogo in uno spazio a quattro dimensioni, qualora esistessero punti situati fuori del nostro spazio intuitivo.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

20 Febbraio 1895.

Il socio prof. Giuseppe Albertotti comunica una osservazione clinica di *dermoide cherato-congiuntivale* ed *anomalie preauriculari congenite* in un ammalato della sua Clinica, che viene presentato alla seduta.

Il socio medesimo legge una sua memoria col seguente titolo: *esperienze di ottica fisiologica intorno alle variazioni dell' angolo visuale rispondenti alla luce decrescente,* e presenta 41 diagrammi e 12 tavole comparative riguardanti le esperienze.

Il prof. Dante Pantanelli, Direttore della Sezione di Scienze, descrive un apparecchio installato nel laboratorio di Geologia dell' Università, destinato a studiare le variazioni di pressione idrostatica nel fondo dei pozzi trivellati, per dedurre le variazioni di livello dell' acqua nei pozzi medesimi.

Questo apparecchio è costituito da una coppia di manometri ad olio di vasellina, uno dei quali, in comunicazione col fondo del pozzo, dà le variazioni di pressione, l' altro è chiuso e dà le correzioni per le variazioni di temperatura e pressione atmosferica.

Adunanza della Sezione di Lettere

16 Marzo 1895.

Il Socio Cav. Ing. Vincenzo Maestri presenta alcune *Memorie Storiche* compilate dal Cav. Cesare Ceretti risguardanti *l' Inquisizione* negli Stati già Estensi, e la *riduzione delle Feste* avvenuta durante il regime del Duca Ercole III.

Quindi il Socio permanente Prof. Pietro Riccardi presenta un suo programma d' invito agli studiosi a compilare una *bibliografia modenese.*

A proposta della Presidenza e per deliberazione della Direzione centrale, qui presso si dà un largo sunto della Memoria compilata dal cav. Ceretti: al quale farà seguito il programma di bibliografia modenese presentato dal Socio permanente prof. comm. Pietro Riccardi.

Digitized by Google

L' Inquisizione abolita, la riduzione delle Feste, ed altri provvedimenti in materia ecclesiastica, adottati negli Stati già Estensi verso la fine del secolo XVIII.

L' epoca in cui l' Inquisizione fu introdotta in Modena, non si conosce con precisione. Verosimilmente ciò sarà avvenuto nel tempo in cui i Domenicani posero stanza fra noi, locchè secondo alcuni storici, fra i quali il Vedriani, accenna l' anno 1247, per cooperazione speciale del Vescovo di Modena, Alberto Boschetti, anch' esso di quell' ordine, mentre a parere d' altri s' indica l' anno 1217.

Checchè ne sia di tale controversia, noi non ci occuperemo di ciò, ma bensì solamente della soppressione di quel Tribunale.

Nella mente dei Ministri del Duca di Modena Ercole III, e fors' anco del suo predecessore, era da un pezzo vagheggiata tale idea, cioè sino da quando incominciarono a tradurre in atto le rivendicazioni dei diritti della Sovranità sull' indebita ingerenza della Corte di Roma.

I primi sintomi palesi di quell' abolizione però non si ebbero che al principio di agosto dell' anno 1785, col richiamo dalla Cancelleria della Giurisdizione Sovrana *di tutte le Carte relative all' Inquisizione,* nonchè dell' *Editto già preparato* per l' abolizione della medesima.

Anima e propugnatore delle divisate riforme, era specialmente il Conte Gio. Battista Munarini, allora Ministro di Gabinetto per gli affari esteri, Consigliere di Stato di Conferenza, e Presidente del Consiglio di Economia. — Il Munarini aveva adottato il lodevole sistema di compilare ebdomadariamente, in via ordinaria, i così detti *Elenchi* degli affari di maggiore rilevanza da sottoporre all' approvazione Sovrana, i quali *Elenchi* sono quasi tutti scritti di mano del Munarini, ne' quali sommariamente accennavansi i principali argomenti che i Ministri avevano in animo di prendere intorno alle più gravi faccende dello Stato. Egli è colla scorta di siffatti *Elenchi* che noi cercheremo di tracciare le fasi più salienti che accompagnarono e seguirono l' abolizione del Tribunale della Inquisizione.

L' Editto Ducale di tale abolizione porta la data del 6 settembre 1785, ed ha questo preambolo: « Fino dal momento in cui piacque all' Onni-« potente di chiamarci al governo di questi Nostri Stati, pensammo, ad « esempio d' altri Sovrani, di abolire la così detta Inquisizione per tutta

Digitized by Google

« la estensione dei Nostri dominii; con tutto ciò l'età provetta, la saggia « condotta, e le replicate prove che abbiamo avuto dello zelo per il Nostro « buon servizio dal defunto Inquisitore Orlandi, Ci ha sempre determinato « a sospendere sino alla di lui morte la pubblicazione di un Editto coe- « rente alle già divisate Sovrane Nostre risoluzioni.

« La morte però in oggi seguita del sunnominato Inquisitore Ci ha « fatti risolvere a render palesi e ridurre ad effetto le già formate Sovrane « Nostre Intenzioni in proposito; quindi egli è che di Nostro Moto proprio, « e di piena e determinata Nostra Volontà, col presente Nostro Chirografo, « ordiniamo e comandiamo che in tutti li Nostri dominj cessi immedia- « tamente e rimanga totalmente abolito, come per abolito addesso e per « sempre, vogliamo e dichiariamo quel particolar Tribunale che denominasi « Ufficio della Santa Inquisizione ».

Nell'*Elenco* del 9 settembre 1785 (due giorni dopo pubblicato l'Editto d'abolizione) si legge:

« Colla dovuta rassegnazione è stata intesa dal Vicario e dal Priore « di San Domenico, l'abolizione del Sant'Ufficio. In adempimento delle « Sovrane intenzioni loro comunicate, sono dal primo state consegnate « tutte le Carte, Libri, e dall'altro si è nel momento fatto levare lo « stemma dell'abolito Tribunale, levato pure e consegnato fra gli altri « mobili dell'Inquisizione il quadro che era esposto nella Sagrestia, por- « tante l'Editto dell'Inquisizione 24 dicembre 1776.

« Si sono fatte le dovute intimazioni al Cancelliere e alla massima « parte de' Consultori dell'Officio, essendosi perciò profittato della circo- « stanza che questi erano radunati per assistere alle esequie del trapassato « (l'Inquisitore Orlandi).

« Si è di seguito dato mano al legale Inventario de' Beni tutti ap- « partenenti al soppresso Tribunale, e si spera di vederlo compiuto nella « corrente settimana.

« Il Vescovo di Modena ha immediatamente risposto, e dopo essersi « rassegnato ai voleri Sovrani, gli si fa ricordare al Ministro la somma « gelosia colla quale custodite esser debbono le Carte tutte risguardanti « l'Inquisizione: gli si fa domandare che queste, sigillate dal Ministro, « gli vengano immediatamente trasmesse, tali quali esse sono. Il Ministro « ha già preventivamente dati gli ordini che tutte le Carte vengano « trasportate in una camera del Grande Albergo, ed ivi custodite dal « sig. Compresidente Della Cappellina con ogni gelosia, curando poi di « far venire un Ministro di S. A. S. con un altro nominato dal Vescovo, « acciò le rivedano, e ritenute tutte quelle che riguardar possono altri « affari, si rilascino le altre alla Curia Vescovile.

Digitized by Google

« Il Vescovo Abbate di Nonantola si rassegna colla sua al Sovrano « volere; promette di spedire al Ministro per la censura l'Editto d'In- « quisizione, allorchè giudicherà doverlo pubblicare, e si raccomanda per « avere le Carte riguardanti la sua diocesi, e principalmente per la por- « zione di essa nello Stato Pontificio ».

Non ostante l'apparente *rassegnazione* ai Sovrani voleri, incominciarono a poco per volta le pretese di parziali rivendicazioni. Il Ministro però non si lasciava smovere, nè credeva gran fatto a quella mansuetudine, come si vede dalle previdenti misure prese di mano in mano, e di cui se ne hanno traccie ne' successivi *Elenchi* del 1, 8, 15 e 22 ottobre 1785; nonchè in quelli delli 6 e 10 novembre, nel quale ultimo, a proposito del fabbricato già inserviente alla soppressa Inquisizione, evvi scritto: « È « già stata abbassata alla Deputazione del Patrimonio degli Studi, polizza « di Segreteria, mediante la quale viene ad essere autorizzata alla stipu- « lazione del contratto di livello di tutto il fabbricato della soppressa « Inquisizione e camere annesse, per erigervi le tre Scuole di Pittura, « Disegno e Architettura. Di concerto col Padre Priore di S. Domenico, « è stato fissato il Canone di trenta annui zecchini, coi patti che ivi si « leggono ec. ».

E nell' *Elenco* del 13 dicembre 1785, leggesi: « Essendosi ricono- « sciuto che l'esame e la separazione nelle diverse categorie delle Carte « e Scritture ritirate dalla già soppressa Inquisizione, di cui fu incaricato « il Consiglier Moreali, non potrebbe ridursi a compimento che nello « spazio di più e più mesi, tanto per la voluminosa quantità di esse Carte « e Scritture (1), quanto per le altre incombenze di esso Consigliere, pensa « il Ministro di far trasportare il tutto nel Ducale Segreto Archivio, e « commetterne l'esame e l'indicata separazione al Capo-archivista dottor « Pellegrino Loschi. Il sapersi che in detto Archivio si conservano altre « Scritture riguardanti l'Inquisizione: il riflettersi che le carte del sop- « presso Sant'Uffizio, le quali meritano di essere con gelosa cura riguar- « date, non possono depositarsi in luogo più rispettabile quanto lo è il « Ducale Archivio Segreto: il considerarsi in fine che il detto esame e la « ordinata separazione non potrà mai meglio eseguirsi che dal nominato « dottor Loschi e dai suoi subalterni, che sono positivamente della pro- « fessione, e che sono obbligati quant'altri ad un rigoroso e fedele segreto,

---

(1) Le Carte già dell'Inquisizione, possedute dal R. Archivio di Stato in Modena, sono ripartite in 150 mazzi, de' quali ben 120 contengono *Processi*, oltre a 20 registri diversi.

Digitized by Google

« sono stati i motivi che hanno determinato a prendere una tale riso-
« luzione (1) ».

Sempre intorno a materia d' Inquisizione, seguono poi altri *Elenchi* delli 16, 19, 20, 27 e 31 maggio 1786, alcuni dei quali assai importanti, ma che qui si ommettono per brevità.

Oltre gli *Elenchi* riguardanti la soppressione dell' Inquisizione, il compilatore vi fa seguire alcuni *Cenni* intorno a' provvedimenti allora presi dal Governo del Duca contro le soverchie ingerenze della Curia Romana in questi Stati; e poscia quelli per la riduzione delle Feste; regolamenti per le Funzioni e per le Sagre ec. ec.

Chiuderemo questo *Sunto* col riportare l' importantissimo *Elenco* delli 5 luglio 1790, col quale il Ministro Munarini (2) esponeva al Duca, in riepilogo, tutto ciò che si era fin' allora fatto per tutelare i diritti della Sovranità, enumerando *quelli intieramente rivendicati* dalle mani della Corte

---

(1) Il Loschi, una volta in possesso delle Carte dell' Inquisizione, non era uomo da lasciarsi sfuggire la propizia occasione di rovistarle. Frutto de' suoi esami furono molte *Note volanti* ch' egli ne fece (aggiungendovi sentenze d' Apostoli e Santi Padri; testimonianze di Padri del Concilio di Trento, intorno a vertenze su cose Ecclesiastiche; estratti della *Cronaca* del Lancillotto) e delle quali se ne giovò il ch. cav. Giuseppe Campi, già Direttore del R. Archivio di Stato in Modena, ch' ei trascrisse e regalò poi allo scrivente; e siccome si ha motivo di ritenere quelle *Note* tuttora inedite, il compilatore di queste Memorie le ha poste in fine delle cose riguardanti l' Inquisizione, assieme ad altri documenti, che si ommettono essi pure.

(2) Farebbe certamente opera utile ed interessante se qualcuno fra i nostri giovani cultori di glorie patrie, si accingesse a scrivere la vita e le vicende del conte Gio. Batt. Munarini, il quale, sebbene Ministro di un piccolo paese, ebbe tutta la stoffa di un grande uomo di Stato. Dotato di grande operosità, d' una intelligenza superiore, infaticabile, devoto a tutta prova al proprio Sovrano ed al suo paese natale. — In causa delle vicende del 1796, seguì il Duca dapprima a Venezia e poscia a Treviso, ove Ercole III, moriva nel 1803. — Ebbe il Munarini grandissima parte nelle trattative allora corse per surrogare col principato di Brisgovia ed Ortenau gli antichi Stati posseduti da secoli dalla Casa d' Este, prima e dopo la morte del Duca Ercole, a favore del di lui genero l' Arciduca Ferdinando d' Austria. — Non è ben noto il motivo, ma è certo che l' Imperatore Napoleone I era così avverso al Munarini, da ricusare persino di riceverlo come Plenipotenziario per le trattative suddette; e le lettere che lo accreditavano in tale qualità le riportò, e pervennero a noi ancora chiuse e suggellate. Si dovè mandare un altro Incaricato, ma neppure con questi si potè concludere nulla, e si dovette aspettare la catastrofe del 1814!...

Digitized by Google

di Roma, e *quali restassero ancora da rivendicare.* — Quell' *Elenco* è del tenore seguente:

« Posto che nella giornata non esiste affare alcuno che meriti di « venir rassegnato a S. A. S., permetterà che il Ministro abbia l' onore « di presentarle un Quadro della odierna situazione degli Affari Eccle- « siastici ne' suoi Stati, e del viaggio, che senza strepito alcuno si è fatto, « per iscioglierlo nel giusto dalla soggezione della Corte di Roma.

« I più savi autori cattolici, hanno dimostrato ad evidenza che la « vera Religione non ha indotto e non può indurre un nuovo Stato nello « Stato, giacchè i legittimi rispettivi diritti della Chiesa e del Principato, « qualora si considerino sotto il reale loro aspetto, non possono giammai « trovarsi in collisione tra loro. Ma perchè i Ministri del Santuario, non « meno che quelli del Principato, hanno talvolta dato una troppo ampia « estensione a questi medesimi diritti, ne derivò quindi non poca confu- « sione e grave pregiudizio alla podestà singolarmente secolare, mentre « si è preteso di fondare dei diritti su delle semplici condiscendenze e « permissioni parziali dei Sovrani, i quali non per questo intesero di « spogliarsi di quelle prerogative che sono inalienabili dalla Sovranità.

« Per porre un freno a simili usurpazioni, pregiudiziali alla pubblica « autorità, Ministri e Canonisti illuminati, in questi ultimi tempi, si sono « fatto carico di rintracciare i titoli di simili abusive pretensioni, ed « avendoli riconosciuti insussistenti, li abolirono, e rivendicarono così le « antiche prerogative del Principato.

« Fin dal principio del pacifico Governo di S. A. S. regnante, il « Ministero modenese ha per Sovrano comando tenuto di vista questo « importante oggetto, ed ora con Leggi, ora con Circolari, ora con econo- « miche provvidenze, appoggiate a massime stabilite con Sovrana appro- « vazione, si è studiato mai sempre di rivendicare molti di quei diritti, « che senza un legittimo titolo esercitavansi dalla Corte di Roma, e si è « pur fatto carico di togliere alcune pratiche abusive che depauperavano « i sudditi.

« Tra questi provvedimenti meritano singolare ricordanza:

« 1.° L' abolizione del Tribunale dell' Inquisizione, perchè affidato « a Regolari e rappresentante nel tempo stesso la Podestà Ecclesiastica « e la Civile, e perciò contrario ai veri diritti dell' una e dell' altra.

« 2.° Il beneplacito Sovrano per l' elezione de' Vicarj Vescovili.

« 3.° La facoltà di delegare Giudici secolari nelle cause civili tra « secolari ed ecclesiastici.

« 4.° La libertà dell' appello al Principe in tutte le cause civili e « criminali degli ecclesiastici.

Digitized by Google

« 5.° Il diritto di avvocare simili Cause e di rimetterle per revisione « o alla Ducale Consulta, o al Supremo Consiglio di Giustizia.

« 6.° Il diritto di delegare un Giudice secolare per assistere ai « processi delle Curie ecclesiastiche, e di obbligar queste a rassegnare il « risultato dei processi a S. A. S. per la finale risoluzione.

« 7.° Il beneplacito Sovrano necessario per instituir liti a Roma.

« 8.° L' asilo de' Tempj ristretto.

« 9.° La riduzione dei giorni Festivi, e il regolamento di certe « Sagre funzioni.

« 10.° L' eminente dominio del Principe sopra i Beni ecclesiastici « pel loro retto uso, applicazione, distribuzione, parificazione di pesi ed « oneri sempre più stabilito.

« 11.° L' influenza del Governo nella elezione de' Canonici nelle « Cattedrali aumentate.

« 12.° La necessità del Sovrano *exequatur* e del Sovrano *placet*, « tanto per la validità delle Bolle e Brevi di Roma, e delle rispettive « Curie Vescovili, quanto per la pubblicazione di altre Carte di simile « provenienza.

« 13.° Il diritto d' interpretare le ultime volontà riguardanti i « legati anche di Messe e di Benefizj semplici non residenziali di Pa- « tronato secolare.

« 14.° La soppressione del beneplacito di Roma e dei Vescovi, « per qualunque contratto di Beni di Chiese.

« 15.° La subordinazione dei Regolari ai rispettivi Vescovi.

« 16.° L' approvazione Sovrana necessaria per l' installamento di « tutti i Superiori Regolari.

« 17.° Le composizioni tra il Generale Economato e tutte le Diocesi « sopra lo spoglio de' Benefizj, con che è venuta a precludersi totalmente « ogni pretesa di Roma circa il *gius* degli Spogli.

« Tali, ed altre simili provvidenze fanno abbastanza conoscere che « in questi dominj molti diritti della Sovranità sono stati intieramente « rivendicati, e che se dalla Corte di Roma e dai Vescovi se ne esercita « ancora qualcuno, un tale esercizio è nella sostanza precario. Che se poi « sussistono tuttavia anche quì le Riserve Papali sulle nomine de' Benefizj « migliori, sull' alternativa dei mesi e altro, ciò vuol dire che il Governo, « quantunque non impedito da verun Concordato colla Corte Romana, ha « ciò non pertanto creduto dover tollerare tali Riserve, aspettando circo- » stanze più propizie per toglierle intieramente ».

Digitized by Google

Preavviso di un programma di bibliografia modenese.

Non poche città e provincie italiane posseggono bibliografie generali o parziali degli scritti che concernono la loro storia civile, scientifica, letteraria ed artistica considerata nel modo più lato in relazione alla vita sociale antica e moderna dei loro abitanti. E benchè prevalgano per numero le bibliografie storiche particolari, pure non mancano le più generali, come quelle di Milano del Predari; di Venezia del Cicogna, completata dal Soranzo; di Bologna del Frati; del Piemonte, intrapresa dal Manno ecc. (1).

La bibliografia generale di una città, di un comune o di una regione, deve contenere la indicazione ordinata per materie di tutti gli scritti che principalmente ne riguardano la storia civile, politica e religiosa; le biografie degli uomini illustri e benemeriti; la storia delle scienze, delle lettere e delle arti; quella dell'arte impressoria; quella degl'istituti di pubblica istruzione; quella delle istituzioni governative; e quella delle istituzioni educative, religiose e di beneficenza.

La provincia di Modena, ove nacquero e vissero il Sigonio, il Muratori, il Cavedoni, i fratelli Campori, il Bortolotti, e che fu seconda patria del Tiraboschi, benchè abbia dato un grande contributo di scritti che ne illustrano la storia civile, scientifica, letteraria ed artistica, manca di una bibliografia generale che offra di questi scritti un'ordinata indicazione. Onde avviene che ciascuno studioso il quale si applichi alle ricerche storiche relative ad uno degli accennati soggetti di storia o di erudizione locale, è costretto a compilarsene per proprio conto la bibliografia mercè lunghe, pazienti e talvolta infruttuose indagini (2).

Comprendo come le difficoltà che si presentano a compiere un simile lavoro, quand'anche venisse intrapreso *viribus unitis,* non sono minori della sua importanza. Nè io certamente ne tengo parola con lo intendimento d'intraprenderlo, e nè manco d'iniziarlo. A me basta di averne

---

(1) Per la conoscenza della maggior parte delle bibliografie generali o parziali italiane, si consulti la *Bibliotheca bibliographica italica* compilata da G. Ottino e G. Fumagalli. Roma, 1889, 8.°.

(2) Malgrado la esistenza da oltre un trentennio di una locale Deputazione di Storia Patria, non abbiamo ancora un elenco delle molte cronache tuttora inedite riferentisi alla città e provincia di Modena.

Digitized by Google

segnalata la importanza e la utilità; confortandomi nella fiducia di riescire ad infonderne un vivo desiderio negli operosi che di codesti studi si dilettano, e nella speranza di potere nell' unito prospetto stenderne le prime fila della orditura.

Dopo la continuata pubblicazione di una farragine di scritti sopra soggetti storici particolari, di tanto lavorìo analitico sembra opportuno fare tesoro cumulativo; ed ordinando per materie tutto quanto fu consegnato alla memoria dei posteri, apprestare il prospetto indicativo degli elementi di quella sintesi storica troppo spesso dimenticata, che sola può darci un concetto esatto e cospicuo dei diversi periodi di vita della nostra regione e dello svolgimento civile delle sue istituzioni sociali.

Ci avviciniamo alla fine del XIX secolo, e parmi sarebbe opera degna lo iniziare e l' inaugurare il nuovo con la indicazione bibliografica generale di tutto quanto concerne la storia locale nei secoli trascorsi dalla più remota antichità fino al principio del XX dell' êra nostra.

Saggio di un Prospetto suntuario di bibliografia modenese (1).

PARTE I. — *Bibliografia degli scritti concernenti la storia civile.*

CAPO 1.° Pubblicazioni storiche generali riguardanti principalmente od esclusivamente la Provincia o l' ex-Ducato di Modena.

» 2.° Memorie e carte geografiche, topografiche, idrografiche, geologiche ecc. — Posizione geografico astronomica dei luoghi.

» 3.° Scritti storici concernenti in particolare la Città e Comune di Modena:

a) Pubblicazioni storiche generali;

b) Pubblicazioni storiche particolari;

c) Scritti e memorie preistoriche, etnografiche, archeologiche, numismatiche, epigrafiche — Modena romana — Scavi.

d) Statuti antichi.

e) Cronache stampate e manoscritte.

f) Pubblicazioni periodiche — Giornali — Calendarii — Almanacchi ecc.

g) Memorie edilizie — Piante e guide della Città.

---

(1) Il Prospetto esposto deve considerarsi come un semplice saggio di classificazione, da riordinarsi e completarsi quando l'opera ricevesse un principio di esecuzione.

Digitized by Google

h) Opere monumentali.

i) Fonti e pozzi modenesi.

k) Usi e costumi — Tradizioni e superstizioni — Feste civili — Giuochi pubblici e divertimenti popolari.

Capo 4.° Opere e memorie storiche concernenti le diverse città e comuni della provincia di Modena.

[Si ripetino gli articoli *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*), *h*), *k*) del precedente Capo 3.°].

Parte II. *Bibliografia delle biografie.*

Capo 1.° Collezioni biografiche e bio-bibliografiche.

» 2.° Famiglie illustri — Araldica — Titoli di nobiltà — Genealogia — Ordini cavallereschi — Famiglie che tennero il dominio delle città e della provincia, o di parte di essa — Estensi ed Austro-Estensi — Casa di Savoja ne' suoi rapporti con la Provincia di Modena.

» 3.° Elogi, biografie e necrologie degli scrittori e di persone insigni:

a) Nativi della provincia di Modena;

b) Nativi di altre provincie i quali si resero benemeriti di quella di Modena;

c) Scrittori anonimi e pseudonimi.

» 4.° Vite di persone pie e benemerite della umanità.

» 5.° Vite di persone tristamente famigerate.

Parte III. — *Bibliografia degli scritti concernenti la storia scientifica, letteraria ed artistica in generale, ed in particolare:*

Capo 1.° Storia delle scienze:

a) Scienze filosofiche, teologiche e giuridiche;

b) Scienze matematiche; applicazioni scientifiche;

c) Scienze fisiche e naturali, per quanto concerne la Provincia. (Antropologia, zoologia, botanica, paleontologia, geologia, mineralogia e meteorologia del modenese);

d) Scienze medico-chirurgiche.

» 2.° Storia delle lettere:

a) Vicende della coltura letteraria;

b) Pedagogia e didattica — Filologia, dialetti, proverbi.

c) Romanzi, drammi e poesie riguardanti la Provincia;

Digitized by Google

d) Pubblicazioni umoristiche e satiriche;

e) Pubblicazioni letterarie di vario genere.

Capo 3.° Storia delle arti figurative:

a) Architettura;

b) Scultura;

c) Pittura;

d) Rappresentazioni grafiche.

» 4.° Storia dell'arte drammatica — Teatro comico-drammatico.

» 5.° Storia dell'arte musicale — Strumenti musicali — Teatro d'opera e ballo — Scuole, concerti e bande musicali.

» 6.° Storia delle applicazioni scientifiche:

a) Applicazioni agrarie e botaniche — Agricoltura e giardinaggio;

b) Applicazioni idrauliche;

c) Applicazioni chimiche;

d) Applicazioni meccaniche — Arti manuali.

» 7.° Prescrizioni e norme relative all'esercizio delle varie professioni.

» 8.° Periodici di scienze, lettere ed arti.

Parte IV. — *Bibliografia degli scritti concernenti l'arte calligrafica e la tipografica.*

Capo 1.° Antichi amanuensi — Pergamene — Paleografia — Criptografia — Stenografia — Miniature — Esemplari calligrafici.

» 2.° Origine della stampa nel modenese — Incunaboli — Edizioni del secolo XV — Edizioni del secolo XVI.

» 3.° Progressi della stampa nei successivi secoli — Editori — Tipografi e loro insegne — Incisori — Librai — Cataloghi librarii — Rilegatori — Cartiere e cartolerie — Marche della carta.

» 4.° Riproduzioni di carte, di stampe e di oggetti d'arte col mezzo di procedimenti fotografici o speciali.

» 5.° Censura e leggi restrittive della libertà di stampa.

Parte V. — *Bibliografia degli scritti riguardanti la storia degl' istituti di pubblica istruzione in generale, ed in particolare:*

Capo 1.° La Storia della Università degli studj.

» 2.° La storia delle Accademie e delle società di scienze, di lettere, di arti.

Digitized by Google

Capo 3.° La storia degl' istituti e delle scuole filosofiche e teologiche.
» 4.° La storia degl' istituti di belle arti — Scuole — Pinacoteche.
» 5.° La storia degl' istituti e scuole d' istruzione classica e tecnica — Collegi.
» 6.° La storia degl' istituti e scuole d' istruzione scientifico-militare.
» 7.° La storia degl' istituti e scuole elementari e popolari — Convitti — Società magistrali.
» 8.° Le biblioteche e le librerie pubbliche e private — Cataloghi.
» 9.° I musei ed i gabinetti scientifici, e loro laboratorii — Le cliniche.
» 10.° Gli archivj e le collezioni di codici e di manoscritti.
» 11.° Gli osservatorii astronomici e meteorologici.
» 12.° Gli istituti agrarii e botanici — Comizi, stazioni agrarie ecc.
» 13.° Gl' istituti zoologici e zootecnici.
» 14.° I Musei archeologici, numismatici, lapidarii ecc.
» 15.° Musei civici.
» 16.° Collezioni private.

Appendice: — *Associazioni diverse.*

1.° Società politiche — 2.° Società militari — 3.° Società di arti diverse — 4.° Società di ricreazione — 5.° Arti ginniche.

a) ginnastica — *b*) danza, nuoto, cavallerizza — *c*) tiro a segno *d*) ciclistica — *e*) caccia, pesca ecc.

Parte VI. — *Bibliografia degli scritti concernenti la storia degl' istituti di governo e di amministrazione — Industria e commercio.*

Capo 1.° Istituti di amministrazione della giustizia — Leggi e codici:
a) Tribunali civili e criminali;
b) Collegi di avvocati, procuratori e notai.
c) Cause civili e criminali di pubblico interesse, allegazioni giuridiche;
d) Penalità, carceri e reclusori di lavoro forzato.
» 2.° Istituti di salute pubblica — Igiene generale — Ospedali — Nosocomi — Frenocomi — Brefotrofi — Assistenza medica — Cura degli animali — Farmacie.
» 3.° Istituti di governo — Statuti e costituzioni di Stato:
a) Autorità governative — Rappresentanti della nazione;

Digitized by Google

b) Diplomatica;
c) Polizia.

Capo 4.° Milizia:
a) Ordinamenti militari;
b) Fortificazioni;
c) Armi — Armerie — Polverificii.

» 5.° Statistica — Stato civile.

» 6.° Leggi od istituti di amministrazione economica dello Stato, della Provincia e dei Comuni:
a) Finanze dello Stato — Debito pubblico — Demanio — Registro — Ipoteche;
b) Statuti, regolamenti ed atti dell' amministrazione della Provincia e degl' Istituti da essa dipendenti;
c) Statuti, regolamenti ed atti delle amministrazioni comunali e degli istituti da esse dipendenti;
d) Imposte; Lotto;
e) Monetazione.

» 7.° Opere pubbliche idrauliche, stradali e murarie — Bonifiche — Consorzi — Ferrovie — Navigazione — Illuminazione ecc.

» 8.° Poste — Telegrafi e Telefoni — Filatelica — Colombi messaggeri.

» 9.° Agricoltura — Estimo e catasto — Pesi e misure — Ordinamenti forestali — Perizia.

» 10.° Commercio — Camere di commercio — Banche — Casse di risparmio — Assicurazioni.

» 11.° Industrie varie — Allevamento degli animali — Enologia, bachicoltura, apicoltura, filande ecc. — Antiche industrie locali — Esposizioni industriali e commerciali.

» 12.° Società private di ordine economico — Società operaie e Società di lavoro.

» 13.° Opifizi ed industrie di maggiore importanza.

Parte VII. — *Bibliografia degli scritti sulla storia delle istituzioni religiose, sulle congregazioni pie e sugli istituti di beneficenza.*

Capo 1.° Storia ecclesiastica cattolica — Istituti d' istruzione religiosa — — Tribunali ecclesiastici — Agiografia.

» 2.° Diocesi, parrocchie, confraternite, fabbricerie — Benefizi di mano morta.

» 3.° Liturgia — Feste religiose.

Digitized by Google

Capo 4.° Clero secolare — Ordini religiosi.
» 5.° Chiese, santuari, cimiteri.
» 6.° Religioni accattoliche:
a) Leggi ed ordinamenti che le riguardano;
b) Loro istituti;
c) Tempj.
» 7.° Congregazioni di carità.
» 8.° Orfanotrofii, ricoveri e convitti di carità.
» 9.° Asili d'infanzia.
» 10.° Società private di soccorso.

Adunanza della Sezione di Arti

30 Marzo 1895.

L'Accademico March. Ferdinando Calori-Cesis legge una sua Memoria su di alcune *Terrecotte* ornamentali architettoniche. Dopo esposto quanto ancora ne rimane in edifizii della Città dei secoli XV e XVI parla di alcuni pezzi ornamentali che sono nel Civico Museo.

Poscia il Socio Ing. Cav. Vincenzo Maestri legge una sua memoria relativa alle Pievi di Renno e Rocca S. Maria e all'oratorio di S. Michele di Levizzano.

Premessa una breve descrizione dello stato attuale dell'antica Pieve di Rocca S. Maria, ne enumera i pregi e ne rileva il carattere che dice proprio, in special modo pegli elementi decorativi, del periodo Carlovingico fra la fine dell'VIII ed il principio del IX secolo.

Per la Pieve di Renno pone in evidenza l'originalità del tipo dei pilastri delle navate. Esaminate le varie aggiunte posteriori alla sua originaria costruzione, crede potersi affermare che il corpo centrale della Pieve non ha subito gravi modificazioni potendosi considerare le navate come parti inalterate dell'importante monumento, solamente confrontabile pel tipo dei suoi pilastri con altri simili della Cripta di S. Avit d'Orleans, costruzione fra il VI ed il VII secolo che rivide la luce poco dopo la prima metà del presente.

Non crede però che per l'accennata corrispondenza di parti colla dissotterrata Cripta di S. Avit si possa giudicare che la Pieve di Renno risalga alla remota epoca della Chiesa d'Orleans; esterna però l'opinione che si tratti di una interessantissima costruzione dell'VIII o IX secolo della quale non si vede in Italia un secondo esempio.

Digitized by Google

Prendendo argomento dall' oratorio di San Michele di Levizzano trova opportuno di accennare all' esistenza nell' Appennino Modenese di oratorii ed altre minori costruzioni sacre abbastanza interessanti.

Distingue rispetto alla loro struttura gli oratorii in tre tipi diversi il più antico dei quali è quello a *cella* rettangolare che riproduceva la parte dei tempi pagani riservata ai sacerdoti.

Descritto minutamente in tutti i suoi particolari l' oratorio di S. Michele trova in esso elementi sufficienti per ritenerlo una costruzione dell' VIII secolo, tanto per la sua struttura che per la corrispondenza de' suoi ornati con altri di quel secolo, fra i quali accenna più particolarmente alla parte centrale di un Ambone del vecchio duomo di Modena magistralmente illustrato dal Bortolotti.

Adunanza della Sezione di Scienze

3 Aprile 1895.

Il Direttore della Sezione Prof. Dante Pantanelli apre la seduta commemorando il Prof. Pietro Doderlein, che fu durante 54 anni Socio di questa Accademia e che venne recentemente in Palermo rapito alla scienza, alla quale dedicò la sua operosissima vita.

Il Socio Prof. Ciro Chistoni, prendendo occasione da una Nota pubblicata dal Prof. Murani nei Rendiconti dell' Istituto Lombardo (vol. XXVIII), mostra la forma data dal Prof. Pietro Marianini al *duplicatore* del Belli, ed eseguisce alcune esperienze col duplicatore stesso. Conviene poi col Murani che in alcuni trattati di Fisica non è fatta menzione del duplicatore Belli, ma osserva che è citato in alcuni recenti trattati italiani e che il Wiedemann ne dà conto nel suo trattato di Elettricità a pag. 196-97 (vol. 2.°).

Il Socio Prof. Giuseppe Albertotti:

1.° legge una sua Memoria col seguente titolo: *Note riguardanti l' effetto di optotypi costanti o variabili sopra fondo variabile o costante,* e presenta una serie di undici differenti tratteggi corrispondenti ad altrettanti fondi chiaro scuri di valore diverso, più un esemplare in chiaro scuro, in rosso, in giallo, in verde ed in turchino di ciascuno dei tre tipi di tavole fotoptometriche e cromoptometriche descritte nel testo;

2.° espone alcune osservazioni intorno ad un codice membranaceo del secolo XIV (*Libellus de conservanda sanitate oculorum, di Magister Barnaba da Reggio*), del quale presenta la trascrizione intera ed anche una fotografia dell' ultimo foglio.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

17 Aprile 1895.

Il Socio Prof. Francesco Nicoli comunica una Memoria del Socio Prof. Alfonso Del Re intitolata: « *Le omografie piane studiate sull' equazione bilineare fra 2 variabili complesse* » nella quale l' Autore, dopo aver dato una rappresentazione proiettiva della variabile complessa, sul piano reale, mostra come lo studio di tutte le omografie ternarie possa farsi sopra le equazioni bilineari, a 2 variabili, sprovviste del termine a 2° grado.

La Memoria termina con un cenno relativo alle trasformazioni quadratiche delle quali (se la rappresentazione della variabile complessa è quella di *Gauss*) sono noti i servigi resi all' Analisi, specialmente nelle recenti ricerche intorno alle funzioni *modulari* ed alle funzioni *fuchsiane*.

Il Socio permanente Dott. Paolo Riccardi dà comunicazione della sua Memoria « *Note e osservazioni intorno al Diametro frontale minimo nell' uomo* ». Premessi alcuni cenni sull' importanza e sulle correlazione di codesto Diametro, l' A. ne dà, in medie aritmetiche e in disposizione seriale, lo sviluppo da 0 anni a 35 anni di età, e lo studia a seconda del sesso, della condizione sociale, della intelligenza in un gruppo complessivo di mille e cento individui della nostra razza.

Infine il Socio medesimo Dott. Paolo Riccardi presenta una Nota dei Professori Gerolamo Daccomo e Gaetano Bruni intitolate: *Nuove osservazioni sopra alcuni casi di avvelenamento per piombo.*

Adunanza della Sezione di Arti

27 Aprile 1895.

Il Socio permanente Prof. Comm. Pietro Riccardi cominciando la esposizione di alcune sue note bibliografiche modenesi, dà notizia della unica copia conosciuta, esistente nella Biblioteca civica di Zurigo, del libretto intitolato: « EL SUMMARIO DE LA SANTA SCRITTURA » diffuso in Modena nel 1537. Dalle circostanze della pubblicazione di codesto libretto, dalla qualità dei caratteri tipografici, e specialmente dalle silografie delle lettere iniziali impressevi, ritiene di poter affermare che essa fu stampata in Modena dal tipografo Antonio Gadaldino. Espone in fine alcune congetture sul presumibile autore di questa operetta.

Digitized by Google

Poscia il socio attuale conte cav. L-F. VALDRIGHI, presentando alcune fotografie, riguardanti uno strumento musicale organario-otricolare inventato nel secolo XVI da Afranio Albonese di Pavia, del quale ei già diede una illustrazione stampata in Milano nel 1881, che poi riprodusse fra i corollarii del suo lavoro sui *Fabbricatori di strumenti armonici,* edito nel 1884 fra le *Memorie* dell' Accademia dalla nostra Soc. Tipogr. — legge una lettera diretta al Conservatore del Museo Strumentale di Bruxelles, il sig. *Carlo Vittorio Mahillon,* intorno un prezioso documento, contemporaneo all' invenzione d' Afranio, da esso inaspettatamente scoperto nell' Archivio di Stato di Modena dodici anni dopo la stampa della monografia sul « *Phagotus d' Afranio* » documento portante il modo di suonare l' originalissimo e complicato strumento. — Accennato, in essa lettera, all' inattesa scoperta del raro ms. appropriata a portare nuova luce sull' in-l' interessante questione della storia dell' invenzione Afraniense, confermata al genere organario-otricolare, accennò pure all' altra della *nomenclatura* appostagli, ponendosi in chiaro del ms. che l' odierno *fagotto*, strumento a fiato delle nostre orchestre, non debbasi credere così nomato quasi provenisse da quello di natura prettamente organistica dell'Afranio; ma doversi invece assegnare alla famiglia strumentaria delle *dolzaine* o de' *bassanelli* a bocchino ricurvo ad ancia, dette e detti, in Francia, *fagots*, prima che, perfezionati, non si trasformassero nel *basson*, che Littrè dice essere stato ivi chiamato anche *fagot,* perchè, costruito in due parti, somiglia a due pezzi di legno legati assieme a guisa di *fascetto.*

Date poscia notizie della vita dell' inventore, delle particolarità della costruzione dello strumento, delle strane vicende del di lui primo saggio in Serbia, del suo perfezionamento in Ferrara, fa anche conoscere com' egli lo suonasse per eccellenza. Il disserente, prima di venire alla conclusione, descrive il ms. che è una *copia dell' epoca* (1565), sincrona dunque all' invenzione e perciò, più che attendihile. Termina poi dicendo che questo ms. potrà agevolmente dare a' pratici dell' arte organaria la chiave del mistero del metodo che Afranio usava per suonare il *phagotus*, di cui, sino al 1893, si conosceva soltanto il *disegno* dalla incisione apposta all' opera del nipote suo Teseo-Ambrogio (1539), ma non il *modo* di suonarlo — ciò che, al presente, mercè la scoperta fatta nell' Arch. nostro di Stato, non sarà più un segreto pel mondo musicale.

La lettera è corredata di molte note storico-esplicative.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

3 Maggio 1895.

Il socio prof. Curzio Bergonzini legge una sua Memoria *sull' origine e sullo sviluppo dei cistopapillomi ovarici,* nella quale, ricordate le svariate opinioni degli indagatori sulla questione se tali tumori siano da ritenersi epiteliali oppure connettivali, prende occasione dalla osservazione da lui fatta di una piccola cisti ovaria, che si dimostrava essere un incipiente papilloma, per studiare lo sviluppo dei cistopapillomi ovarici, e viene alla seguente conclusione:

La primitiva origine di essi dipende certamente dall' aberrante sviluppo dell' epitelio dei follicoli di Graaf o dei tubuli di Pflüger. Ma dalle osservazioni dell' Autore e dalle preparazioni, che presenta in *disegno* all' adunanza, risulta che l' ulteriore sviluppo di questi tumori non si fa per autonoma prolificazione epiteliale, ma per eccessivo sviluppo del connettivo, che induce secondariamente la moltiplicazione dell' epitelio che lo ricopre. A conferma di ciò sta anche l' osservazione clinica che la malignità dei veri papillomi ovarici è sempre molto minore di quella dei cancri, adenomi ed altri tumori veramente epiteliali.

Il socio prof. Gaetano Magnanini comunica una sua Memoria intitolata: *Dissociazione elettrolitica e colorazione,* nella quale l' Autore, dopo aver constatata la natura eminentemente costitutiva della colorazione dei corpi (già comprovata dai lavori di Krüss, Soret, Hartley, Abney, Schütze, Witt, Kehrmann, Armstrong, Ackroyd,....) richiama l' osservazione fatta dal Gladstone nel 1857 e gli studii più recenti dell' Ostwald, secondo i quali la colorazione nei sali è una proprietà addittiva; esamina fino a quel grado l' ipotesi della colorazione degli joni possa dar ragione di questo comportamento particolare degli elettroliti. L' Autore, ammettendo che nel maggior numero dei casi tale ipotesi spiega benissimo i fatti, con uno studio sopra i cromoossalati e cromosolfocianati alcalini, fa vedere che vi sono dei casi dove la colorazione è proprietà addittiva, ma dove, a spiegare tale comportamento, l' ipotesi della colorazione degli joni non può più essere invocata.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

19 Giugno 1895.

Il socio prof. cav. Ciro Chistoni presenta due nuovi tipi di accumulatori elettrici, costrutti con piombo granulato e privi di diaframma; fa notare che uno di questi tipi potrà servire vantaggiosamente per gli usi clinici, e spera di poter riuscire a rendere utile anche l'altro tipo, che finora non ha dato buoni risultamenti.

I due tipi hanno anche il vantaggio di essere molto economici.

Digitized by Google

ADUNANZE GENERALI

24 novembre 1894.

Coll' intervento di 23 Soci si inaugura l' anno accademico 1894-95. Il Vice Segretario Generale riferisce sui lavori ed atti accademici, il Tesoriere legge il resoconto della sua gestione e il Presidente comunica il consuntivo dell' anno precedente. I suddetti resoconto e consuntivo sono riveduti ed approvati ed è pur anco approvato il bilancio preventivo per l' anno 1894-95.

La Direzione centrale a schiarimento dell' articolo 15 dello Statuto accademico, che riguarda le elezioni, propone come semplice norma di regolamento interno che da ora in avanti per la validità delle nomine dei Soci e degli Ufficiali ciascun candidato abbia almeno ad ottenere un numero di suffragi non inferiore alla metà più uno del numero minimo di votanti stabilito dal detto articolo per ciascuna elezione. E la proposta è favorevolmente accolta dall' assemblea.

A motivo dei deplorati decessi del cav. avv. *Pietro Bortolotti* e del dott. cav. *Carlo Boni* restando a provvedere alle cariche di Segretario generale e di Custode del Medagliere, a quella è stato nominato il conte cav. *Giorgio Ferrari Moreni* ed a questa l' avv. cav. *Arsenio Crespellani.*

E sono stati eletti agli uffici vacanti di Bibliotecario il dott. *Tommaso Sandonnini* ed all' altro di Economo il cav. *Benedetto Malmusi.*

Avendosi poi ad eleggere tre nuovi Soci attuali, la scelta è caduta sui chiarissimi: *Cesari* prof. *Giuseppe, Del Re* prof. *Alfonso* e *Magnanini* prof. *Gaetano.*

E in fine furono acclamati Soci corrispondenti i chiarissimi *Salvioli* prof. *Giuseppe, Venturi* cav. prof. *Adolfo, Toschi* dott. *Giambattista* e *Aschieri* prof. *Ferdinando,* e Socio onorario il Senatore commendator prof. *Pasquale Villari.*

Digitized by Google

9 marzo 1895.

La commissione eletta nell' adunanza generale del 12 febbraio 1892 per trattare e conchiudere col Ministero della Istruzione pubblica e col locale Municipio l' attuazione del progettato trasferimento dell' Accademia e della biblioteca medagliere ed archivio annessi alla medesima, dall' antica e centrale sua sede nell' edificio detto *Albergo Arti,* ripresenta con modificazioni la relativa convenzione già sottoposta all' Assemblea in precedente adunanza del 3 dicembre 1892.

Agli argomenti diretti a dimostrare i vantaggi che l' Accademia poteva trarre dal trasloco da eseguirsi in base agli accordi prestabiliti, argomenti da parecchi Accademici approvati, furono da altri opposte contrarie ragioni.

E dopo lunga ed animata discussione messa a partito l' approvazione della convenzione proposta, questa non venne dalla maggioranza accettata.

Digitized by Google

PROGRAMMA

PEL CONCORSO AI PREMI D' ONORE DELL' ANNO 1894-95

I premi che annualmente si assegnano dalla R. Accademia sono distinti in due classi.

La prima comprende due premi della complessiva somma di italiane lire 900 da distribuirsi in parti eguali agli autori di due *Memorie o Dissertazioni* sopra temi *morali-politici* proposti dalla R. Accademia e che dalla medesima sieno riconosciute degne della corona.

La seconda classe comprende due premi della complessiva somma di italiane lire 720, da distribuirsi in quote eguali a due tra gl' inventori di qualche *nuovo e vantaggioso metodo di agricoltura* debitamente dichiarato, o di qualche *perfezionamento di un' arte qualsiasi propriamente detta.*

La R. Accademia pertanto, col mezzo della Direzione Centrale, ha scelto pel concorso del corrente anno 1894-95 i due temi qui sotto notati, già proposti in precedenti concorsi. L' uno, svolto da un solo concorrente nel concorso 1892-93, non diede sufficiente motivo ad aggiudicazione di premio; l' altro, per essere andato deserto il concorso 1893-94, non è stato ancora da alcun concorrente trattato.

I.

Se e in qual modo la Società abbia l' obbligo di fornire alle classi operaee il lavoro.

II.

L' interesse del capitale, il suo fondamento economico e giuridico e le sue variazioni nel corso ordinario della società.

Gli scritti spettanti ai premi della prima classe possono solo essere in lingua italiana o latina. Debbono essere anonimi e contrassegnati da un motto ripetuto sopra una scheda, o lettera suggellata; entro la quale un' altra busta, pur suggellata e contrassegnata da un diverso motto, noto solo all' autore, conterrà nome, cognome, patria, domicilio e indirizzo di esso: dovendosi poi anche evitare negli scritti stessi qualunque indizio che possa far conoscere l' autore medesimo.

Digitized by Google

Il *Concorso* è aperto ai dotti italiani ed esteri riguardo ai premi della 1.ª classe: ma riguardo ai premi della 2.ª classe viene limitato agli abitanti delle provincie di Modena e Reggio: ai quali altresì rammentasi, che i nuovi metodi di agricoltura, che avranno a proporre, si vogliono applicabili all'agricoltura usata nelle provincie stesse.

Tutti i componimenti inviati al *Concorso* dovranno essere inediti e chiaramente e nitidamente scritti, altrimenti non saranno presi in esame. E si spediranno franchi di porto, al più tardi entro il 31 dicembre 1895 (termine di rigore), col seguente indirizzo: *Al Presidente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.* Dalla Presidenza poi verranno trasmessi alle rispettive Commissioni elette a giudicarli.

Gli Agricoltori e gli Artisti che intendano di aspirare al *Concorso* dovranno avere entro il predetto termine presentato, quanto agli Agricoltori, la descrizione succinta ed esatta del loro trovato con indicazione del luogo a cui avesse a riferirsi, affinchè l'Accademia possa poi procedere alle verificazioni che fossero opportune: e quanto agli Artisti, i loro lavori nel luogo che verrà designato dall'Accademia per esaminarli e quindi giudicarli. Sì gli uni, che gli altri, amando rimanere occulti, non avranno che a regolarsi in modo consimile a quello dei concorrenti ai premi dell'altra classe.

Le schede delle produzioni riconosciute meritevoli del *premio,* o dell'*accessit,* saranno colle dovute formalità subito aperte; le altre saranno conservate nella loro integrità per un anno allo scopo di potere all'uopo verificare l'identità degli autori che chiedessero la restituzione delle produzioni presentate: scorso il qual termine, le schede delle Memorie non richieste saranno date alle fiamme.

Quegli autori che bramassero ricuperare i loro manoscritti, dovranno destinare persona in Modena che ne faccia la domanda e ne rilasci la ricevuta. Il contrassegno per giustificare la richiesta sarà l'indicazione d'ambo i motti del componimento; tanto il palese, che il secreto; così la semplice apertura della esterna busta della scheda basterà alla verificazione, restando incognito l'autore.

I componimenti premiati verranno impressi fra le *Memorie* accademiche; e d'un conveniente numero d'esemplari saranno presentati gli autori. A giudizio della Direzione Centrale potrà accordarsi l'onore della stampa anche a scritti riconosciuti degni dell'*accessit,* però col consenso degli autori.

Modena 10 Febbraio 1895.

IL PRESIDENTE
PIETRO RICCARDI

Il Segretario Generale
GIORGIO FERRARI MORENI.

Digitized by Google

ATTO DI AGGIUDICAZIONE

DEI PREMI D'ONORE DEL CONCORSO 1892-93

Per procedere al diffinitivo giudizio intorno al concorso accademico 1892-93, indetto con programma 12 aprile 1893, si è oggi raccolta la Direzione Centrale dell'Accademia; e presi in esame il voto dei Giudici eletti pei componimenti morali politici, per eccezionali ragioni soltanto ora consegnato, e quello pel concorso d'arte, ha proclamato il seguente risultato:

Sul I tema = *Se e in qual modo la Società abbia l'obbligo di fornire alle classi operaie il lavoro* = fu presentata una sola memoria contraddistinta col motto = *Melius est parum cum iustitia, quam multum cum iniquitate* = lavoro abbastanza diligente ed accurato, condotto con mano sicura e con armonia di criteri; il quale però, per il meno largo sviluppo dato all'ultima parte, non risponde pienamente al tema.

Sul II tema = *Dell' Opinione pubblica, come sorga e come possa esser diretta* = pervennero all'Accademia due composizioni, l'una col motto = *Multi vocati pauci vero electi* =, l'altra col motto = *Osservando imparzialmente.* = La prima non è senza pregi; ma non abbastanza s'addentra nell'argomento: nella seconda l'elaborazione e l'organismo dell'opinione pubblica sono analizzati ed esposti con metodo appropriato in consonanza de' più recenti relativi studi. La critica delle diverse dottrine è condotta con acume e non senza osservazioni opportune egiudiziose. Può notarsi però che l'autore devia alquanto dal concetto rigoroso della pubblica opinione, ne tocca manieratamente e convenzionalmente la rassegna storica, specie nella parte antica, e tratta con troppa brevità e fretta dei mezzi di diriggerla, lasciando desiderare alcunchè di accuratezza nella forma dell'intero lavoro.

Niuna quindi delle tre menzionate memorie presentate al concorso ha potuto raggiungere l'onore del premio o dell'*accessit.*

Nel concorso d'arte si è presentato soltanto il Sacerdote Don Massimiliano Gollini con un apparecchio meccanico da esso denominato = *il piccolo omnibus del legatore di libri* =. La macchina ha incontrato l'unanime approvazione dei Giudici, i quali considerando nella *cucitrice,* parte principalissima dell'ap-

Digitized by Google

parecchio, la razionale disposizione delle parti, la felice combinazione dei movimenti, la rapidità e sicurezza del funzionamento furono indotti a dichiararla un proprio, nuovo e vero perfezionamento della cucitura dei libri a filo continuo.

E per ciò si è fatto luogo a favore del Sacerdote Don Massimiliano Gollini all'aggiudicazione del premio.

Modena 10 febbraio 1895.

IL PRESIDENTE
PIETRO RICCARDI

Il Segretario Generale
GIORGIO FERRARI MORENI.

Digitized by Google

AVVERTENZA

Delle osservazioni meteorologiche e dei risultati eliofanometrici che seguono, il Socio Prof. CIRO CHISTONI *diede comunicazione nella adunanza della Sezione di Scienze del 18 gennaio 1895.*

Digitized by Google

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

fatte nell' anno 1894

ALL' OSSERVATORIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

dall' assistente VITO VELLANI

e calcolate

dall' assistente Ing. ANGELO MANZINI

I dati della pressione atmosferica sono espressi in millimetri, ridotti a 0° e diminuiti di 700 mm.

I dati della temperatura che non sono preceduti da alcun segno, si intendono preceduti dal segno +.

Là dove sta segnata la direzione delle nubi, è convenuto che non si osservarono se non che le nubi situate negli alti strati dell' atmosfera ed in prossimità dello Zenit.

Lo stato del cielo è stato stimato secondo la scala da 0 (sereno) a 10 (coperto) adottata generalmente.

I dati dell' evaporimetro sono espressi in millimetri.

Quanto alla forma delle nubi si tennero le seguenti notazioni:

m = cumuli r = cirri s = strati n = nembo

mr = cirro-cumuli ms = cumuli-strati rs = cirro-strati.

Le meteore sono indicate coi simboli internazionali proposti dal Congresso di Vienna ed ora comunemente adottati:

1. ● pioggia.
2. ✳ neve.
3. △ nevischio.
4. ▲ grandine.
5. ≡ nebbia.
6. ∨ brina.
7. ∾ gelicidio.
8. ⌴ gelo.
9. ⍱ rugiada.
10. ← aghi di ghiaccio.
11. ∞ caligine.
12. ⌈⟨ temporale.
13. ⟨ lampi senza tuoni.
14. ⌐ vento fortissimo.
15. ✛ uragano di neve.
16. ⦶ alone solare.
17. ⍦ alone lunare.
18. ⊕ corona solare.
19. ⍫ corona lunare.
20. ⌒ arco baleno.
21. ⏏ aurora polare.

Digitized by Google

Gli esponenti ° e ² indicano rispettivamente che la meteora è di poca intensità oppure fortissima; la lettera n e i numeri I, II, III significano che la meteora, alla quale si accenna, apparve di notte, oppure verso le ore di osservazione 9^h, 15^h, 21^h.

I numeri segnati con asterisco nelle colonne delle precipitazioni, indicano neve fusa, o nebbia condensata, o brina disciolta.

Il valore medio della temperatura si è ottenuto prendendo la media dei valori estremi e dei valori osservati alle 9^h e alle 21^h.

Le osservazioni meteorologiche, in seguito alla circolare N.° 12 dell'Ufficio Centrale di Meteorologia, in data 10 dicembre 1893, a cominciare dal 1.° gennaio 1894 sono fatte sul tempo medio dell'Europa Centrale.

Riguardo alle stagioni, si ritenne che l'inverno sia costituito dal dicembre, gennaio e febbraio; la primavera dai tre mesi di marzo, aprile e maggio; l'estate dai tre mesi di giugno, luglio ed agosto e l'autunno dai tre mesi di settembre, ottobre e novembre.

Le osservazioni vennero quasi totalmente fatte dal sig. Vito Vellani e le riduzioni ed i calcoli sono stati eseguiti dall'Ing. A. Manzini.

Prof. Ciro Chistoni.

Digitized by Google

COORDINATE GEOGRAFICHE

DELL' OSSERVATORIO METEOROLOGICO

DELLA

R. UNIVERSITÀ DI MODENA

Latitudine boreale . . . . . = 44° 38' 52",8
Longitudine E da Greenwich . . . . = 0^{h} 43^{m} 41,^{s}8
Altezza sul livello medio del mare = metri 63,2

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	57.5	53.5	52.2	-1.8	3.6	-1.6	-5.0	3.9	2.4	3.2	3.4	60	54	84	SW	11.5	SW	7.5	SW	13.5	. . .	. . .	. . .
2	49.9	48.6	49.9	0.0	-0.4	-1.2	-2.8	0.8	4.1	3.4	4.0	89	98	96	SE	1.0	NE	25.5	NE	30.0	. . .	. . .	. . .
3	52.7	52.1	53.3	-2.0	-1.8	-4.0	-4.5	-0.3	2.7	2.3	2.2	67	55	64	NE	35.0	NE	17.5	NE	19.0	. . .	SE	. . .
4	54.8	54.9	57.2	-6.2	-4.2	-6.4	-7.5	-3.0	2.6	2.4	2.2	89	72	79	NE	2.5	NW	11.5	W	8.0	. . .	E	. . .
5	60.6	59.9	58.9	-5.2	-3.6	-4.6	-7.6	-3.6	2.5	2.2	3.1	80	65	95	W	4.5	W	9.5	W	8.0	. . .	. . .	. . .
6	52.0	48.5	49.1	-5.0	-2.2	-2.0	-6.3	-1.6	3.0	3.9	4.0	95	100	100	W	19.5	W	10.0	W	9.0	. . .	. . .	. . .
7	53.8	53.9	55.1	-2.6	-0.6	-1.2	-3.9	-0.2	3.6	4.1	4.2	96	92	100	W	7.5	W	5.0	W	8.0	. . .	. . .	. . .
8	57.2	57.5	59.6	0.2	2.2	1.6	-2.3	2.3	4.7	5.0	5.0	100	93	96	W	14.0	NW	17.0	NW	10.0	. . .	. . .	. . .
9	61.4	60.8	61.7	2.0	1.6	-2.2	-3.1	3.8	4.9	4.6	3.7	93	89	96	NW	0.5	W	3.5	W	9.5	. . .	. . .	. . .
10	62.4	62.5	64.5	-2.0	-1.0	-2.6	-6.8	0.4	3.8	3.8	3.8	96	88	100	W	0.5	W	1.0	W	7.0	. . .	. . .	. . .
I. Decade.	56.2	55.2	56.2	-2.3	-0.6	-2.4	-5.0	0.3	3.4	3.5	3.6	86.5	80.6	91.0	. .	9.7	. .	10.8	. .	12.2	. . .	. . .	. . .
11	67.1	66.6	67.5	-3.6	-0.4	-3.4	-4.9	0.2	3.0	3.8	3.1	86	85	87	W	5.5	W	9.0	W	20.5	. . .	. . .	. . .
12	67.3	66.6	67.4	-4.0	-1.0	-4.0	-6.8	-0.8	3.2	3.6	3.2	95	84	95	W	12.0	W	13.0	W	17.5	. . .	. . .	. . .
13	68.1	66.4	66.4	-6.8	-4.2	-7.8	-9.3	-2.7	2.6	2.7	2.5	94	81	100	W	8.0	W	9.5	W	7.5	. . .	. . .	. . .
14	64.6	62.5	62.3	-10.7	-3.6	-5.4	-13.4	-2.8	1.9	2.2	2.4	97	65	80	W	7.5	W	4.0	W	17.0	. . .	. . .	. . .
15	63.8	63.7	65.0	-5.0	0.6	-3.8	-8.3	0.7	2.1	2.3	2.5	66	47	73	W	10.0	W	0.5	W	9.5	. . .	. . .	. . .
16	65.4	64.1	64.2	-4.6	0.2	-2.0	-8.0	0.4	2.2	2.6	2.7	67	57	67	W	9.5	W	5.0	W	5.0	. . .	. . .	. . .
17	64.0	62.6	62.6	-2.8	1.7	0.4	-4.8	2.0	3.1	3.3	3.7	82	64	79	NW	8.0	NW	1.0	NW	1.0	WNW	W	W
18	60.4	58.5	58.4	0.2	2.4	0.4	-1.3	3.0	4.0	3.9	4.6	85	72	96	NW	4.5	NW	2.5	NW	1.5	. . .	. . .	. . .
19	59.5	60.4	62.5	0.6	2.0	1.6	-0.9	2.4	4.6	4.7	4.8	96	89	93	NW	7.0	W	12.0	W	12.5	. . .	. . .	. . .
20	63.4	61.9	61.3	3.0	5.6	3.2	0.4	5.9	5.1	5.1	5.2	89	75	90	W	5.0	W	3.5	W	4.0	. . .	W	W
II. Decade.	64.4	63.3	63.8	-3.4	0.3	-2.1	-5.7	0.8	3.2	3.4	3.5	85.7	71.9	86.0	. .	7.7	. .	6.0	. .	9.6	. . .	. . .	. . .
21	60.3	60.1	61.8	3.8	3.8	2.2	1.2	4.3	5.6	5.2	5.2	93	87	96	SW	3.0	W	7.5	SW	3.5	. . .	. . .	. . .
22	62.6	61.0	60.5	1.3	2.2	1.4	-0.2	2.4	5.0	5.2	4.9	98	96	96	SW	4.0	W	6.0	W	4.5	. . .	. . .	. . .
23	57.4	56.5	56.0	1.2	1.8	0.4	-0.6	2.0	4.8	5.0	4.6	96	96	96	W	4.5	S	4.5	E	11.0	. . .	. . .	. . .
24	57.1	58.7	62.2	0.8	1.8	1.8	-1.2	2.0	4.9	5.2	5.0	100	100	96	W	11.5	W	13.0	W	15.5	. . .	. . .	. . .
25	64.6	63.8	63.2	3.2	4.8	4.0	0.7	5.3	5.4	5.8	5.7	93	90	93	W	9.0	W	9.0	W	7.5	. . .	. . .	. . .
26	59.4	57.8	59.0	3.6	4.0	3.6	2.2	4.3	5.7	6.1	5.9	97	100	100	W	3.0	NW	2.5	NW	8.5	. . .	. . .	. . .
27	62.5	62.5	62.9	3.6	6.2	5.0	1.8	6.4	5.1	5.6	5.9	87	79	90	W	14.5	W	10.5	SW	4.0	. . .	. . .	. . .
28	59.1	56.1	54.5	4.4	8.0	4.7	3.2	7.9	5.7	6.0	6.0	90	75	93	W	6.5	W	3.0	SW	2.0	. . .	WNW	. . .
29	54.2	54.3	57.2	4.0	5.6	5.4	3.1	5.8	5.9	6.2	6.3	97	91	94	W	6.5	W	11.5	W	5.5	. . .	. . .	. . .
30	60.9	60.0	59.5	4.4	8.6	4.6	2.1	8.8	5.5	4.8	5.1	87	57	81	W	6.0	E	2.0	S	9.5	. . .	NNE	. . .
31	58.1	54.9	53.6	2.4	6.8	3.2	0.2	6.9	3.5	5.0	5.2	65	68	90	W	9.0	W	3.5	SW	7.0	. . .	W	. . .
III. Decade.	59.7	58.7	59.1	3.0	4.9	3.3	1.1	5.1	5.2	5.5	5.4	91.2	85.4	93.2	. .	7.5	. .	6.6	. .	71.4	. . .	. . .	. . .
Mese	60.1	59.1	59.7	-0.8	1.6	-0.3	-3.1	2.2	4.0	4.2	4.2	87.9	79.5	90.2	. .	8.1	. .	7.8	. .	9.6	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	Neve in cm.	ANNOTAZIONI
0	0	9 m	gelato	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° ∨ ⌣ n e mattino.
.0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	25.0	≡² pom.; ⚹ 1h - 8h30m; △ 10h30m - 11h; ⚹² 13h30m - mezzanotte e ⌯ NE.
.0	4 r	1	»	. . .	. . .	. . .	. . .		⚹² mezzanotte - 2h; ⚹° 7h50m - 8h30m; ⌯ NE mezzanotte - 14h.
0	9 mr	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	11.0	⚹ 4h30m - 15h15m.
0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	23.0	△ 8h30m - 9h; ⚹ 20h20m - mezzanotte.
0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .		⚹ mezzanotte - 20h55m; ≡² mattino.
0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	9.0	⚹ 12h - mezzanotte.
0	10	10	»	. . .	inc	inc	inc	inc	△ 7h50m - 8h40m; ◎° 12h - 13h e 15h30m - 16h30m; ≡ bassa III.
0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² n e fra giorno; ≡ bassa III.
0	9	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa, ⌣ n e fra giorno; ≡² bassa III.
9.0	8.2	9.0	»	. . .	inc	inc	inc	68.0	
0	1	0	gelato	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ ⌣ n e fra giorno; ⌯ W. SW 18h - mezzanotte.
.0	2	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa ⌣ n e durante il giorno; ⌯ SW mezzanotte - 5h.
.0	0	9	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa ⌣ n e durante il giorno.
9	0	0	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	⌣ tutto il giorno; ≡ bassa n e mattino; ≡² fra giorno.
0	0	0	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	⌣ tutto il giorno. Tramonto rosso.
0	0	0	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	⌣ tutto il giorno. Tramonto rosso; ≡ bassa sera e III.
5 mr	9 m	9 m	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ tutto il giorno; ⌣ mattino.
.0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	⌣ n e mattino; ≡² n e per tutto il giorno.
.0	10	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa n e mattino; ≡ II e III.
.0	8 mr	9 m	4.10	. . .	. . .	inc	inc	. . .	≡ n, mattino e III; ◍° 18h - 19h.
7.4	4.0	5.7	4.10	. . .	. . .	inc	inc	. . .	
.0	10	10	0.19	0.63	. . .	. . .	0.63	. . .	◍° n; ≡ tutto il giorno; ≡ bassa mattino.
.0	10	10	0.10	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa n e per tutto il giorno.
0	10	10	0.05	. . .	1.90*	. . .	1.90*	. . .	≡ bassa tutto il giorno; ≡² n e mattino.
.0	10	10	0.12	0.70*	. . .	2.80	3.50*	. . .	≡° bassa n e mattino; ≡ bassa pom.; ◍ 16h15m - 19h30m.
0	10	10	0.17	0.40	. . .	. . .	0.40	. . .	≡ n e per tutto il giorno; ◍ 3h - 5h; gocce III; ⌯ W n.
.0	10	10	0.04	0.40	. . .	. . .	0.40	. . .	≡² bassa n e mattino; ≡ bassa pom. e III; ◍° 6h - 7h20m; ◍ 22h - mezzanotte.
.0	10	10	0.38	1.60	. . .	. . .	1.60	. . .	◍ 1h - 4h; ≡ III.
.0	8 m	8 ms	0.40	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n, mattino e III.
0	10	10	0.27	0.63	0.69	5.00	6.32	. . .	≡ n e durante il giorno; ≡² pom. e III; ◍ 6h45m - 22h15m a riprese.
0	8 rs	0	0.92	0.38	. . .	. . .	0.38	. . .	≡² n e mattino.
4 s	6 mr	8	0.78	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² ∨ n e mattino; ≡² III.
8.6	9.3	8.7	3.42	4.74	2.59	7.80	15.13	. . .	
8.3	7.2	7.8	7.52	4.74	2.59	7.80	15.13	68.0	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	53.8	54.8	57.7	3.6	7.0	4.0	0.6	7.0	4.6	5.1	5.5	76	68	90	W	12.5	W	11.0	W	11.5	W	W	. . .
2	64.5	64.3	65.8	5.4	9.2	5.0	2.8	9.4	6.1	5.1	5.7	91	58	87	W	2.0	W	6.5	W	7.5	W	. . .	. . .
3	67.3	64.7	63.1	3.2	10.0	5.3	1.3	10.0	5.0	5.2	5.5	86	57	83	W	2.5	W	2.5	S	11.0	. . .	. . .	. . .
4	63.6	63.9	65.6	5.4	9.2	5.2	2.8	9.4	5.9	6.2	6.0	88	71	91	W	12.0	NW	6.0	W	10.0	. . .	N	. . .
5	68.5	66.6	66.1	2.6	8.8	4.6	0.1	8.9	5.1	8.3	4.5	93	45	71	W	4.0	SE	2.0	S	10.0	. . .	. . .	. . .
6	64.7	63.5	65.8	4.2	10.0	5.4	0.7	10.0	4.4	4.4	5.0	70	48	75	W	9.0	W	5.5	S	6.0	. . .	. . .	. . .
7	66.8	65.2	65.9	3.6	9.4	5.6	0.8	9.7	4.7	5.4	5.8	80	61	85	W	10.5	W	4.5	W	9.5	. . .	. . .	. . .
8	62.8	60.7	61.7	6.8	12.6	7.2	2.5	12.6	5.0	5.7	6.3	68	52	83	SW	9.5	W	0.5	SW	14.5	. . .	. . .	. . .
9	63.4	61.1	60.3	5.4	10.8	6.8	0.2	10.9	5.7	6.1	6.5	84	63	88	SW	5.1	N	5.0	W	15.0	. . .	. . .	. . .
10	57.3	55.3	56.0	7.0	11.8	7.2	4.1	12.3	6.4	6.4	7.2	85	62	94	W	6.0	NW	3.5	E	12.0	W	. . .	. . .
I. Decade.	63.3	62.0	62.8	4.7	9.9	5.6	1.6	10.0	5.3	5.8	5.8	82.1	58.5	84.7	. .	7.3	. .	4.7	. .	10.7	. . .	. . .	. . .
11	55.6	54.2	55.8	2.8	12.1	7.4	0.6	12.4	5.6	6.6	7.5	100	62	97	W	3.5	NW	3.0	NE	7.0	. . .	. . .	. . .
12	55.9	52.8	52.9	2.6	11.4	7.8	-0.9	11.9	5.3	6.9	7.7	96	69	97	W	5.5	NE	2.0	N	3.5	. . .	. . .	. . .
13	49.8	46.9	50.4	7.6	12.2	8.4	3.2	13.1	6.3	7.1	2.7	80	67	32	W	12.0	W	12.0	NW	45.0	. . .	W	. . .
14	57.2	55.2	56.7	5.2	10.4	5.0	1.1	10.4	2.6	1.3	1.8	40	13	28	W	23.0	W	18.0	W	14.5	. . .	. . .	. . .
15	58.7	57.6	58.6	4.0	9.2	4.0	0.3	9.4	2.2	1.9	2.8	36	23	46	W	14.5	NW	6.0	SW	8.0	. . .	. . .	. . .
16	61.7	60.7	61.2	1.8	8.8	4.6	-4.0	8.9	3.3	1.8	3.4	63	22	53	N	2.5	E	6.0	E	4.0	. . .	N	. . .
17	59.3	58.1	57.8	1.8	5.0	3.2	-2.3	5.4	3.9	5.5	5.4	74	84	93	W	2.0	E	13.5	E	14.0	W	. . .	W
18	57.8	58.6	61.7	1.6	2.4	1.0	-0.4	2.6	4.2	3.9	4.0	82	72	81	NE	5.5	E	45.0	E	9.5	E	E	E
19	64.1	63.5	65.4	-0.6	3.0	-0.2	-4.3	3.2	3.0	2.1	2.2	70	38	48	NE	2.5	E	34.5	E	6.0	E	E	. . .
20	66.3	64.1	64.6	-0.6	5.0	1.2	-4.4	5.3	3.2	2.4	2.8	73	38	55	W	8.0	E	12.0	NE	3.0	. . .	. . .	. . .
II. Decade.	58.6	57.2	58.5	2.6	8.0	4.2	-1.1	8.3	4.0	4.0	4.0	71.4	48.8	63.0	. .	7.9	. .	15.2	. .	11.5	. . .	. . .	. . .
21	66.1	64.9	65.1	-1.1	4.4	1.6	-3.9	4.8	3.2	2.9	2.9	74	47	56	NW	4.0	E	4.5	NE	2.5	E	ENE	. . .
22	65.1	62.9	62.7	1.4	5.6	1.4	-4.0	6.2	3.3	2.2	2.7	65	32	53	SW	1.5	N	2.0	SW	9.5	. . .	. . .	. . .
23	62.0	60.0	59.9	2.2	8.6	4.2	-2.8	8.9	3.3	2.3	2.6	60	28	43	W	6.0	NW	2.5	E	3.5	. . .	. . .	. . .
24	58.6	54.9	54.3	3.2	9.6	5.6	-1.0	9.9	3.3	2.8	3.9	56	31	58	SW	0.5	NE	4.5	SE	7.5	. . .	. . .	. . .
25	55.8	55.8	57.2	4.2	9.5	5.6	2.2	9.7	5.4	5.6	5.8	87	63	85	N	5.5	S	1.5	SE	11.5	. . .	W	. . .
26	57.2	55.4	55.7	2.6	11.2	7.2	-0.1	11.3	5.1	5.2	5.2	93	52	69	W	7.5	W	4.0	S	14.5	. . .	. . .	. . .
27	57.1	56.6	58.5	6.4	14.5	7.0	1.7	14.8	5.7	6.4	6.6	79	52	88	W	9.5	N	2.5	E	15.0	. . .	. . .	. . .
28	61.3	59.9	59.5	3.6	10.9	7.2	0.7	11.3	5.8	7.2	7.2	98	74	94	SE	1.0	S	3.0	W	12.0	. . .	. . .	. . .
29	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .
30	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .
31	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .
III. Decade.	60.4	58.8	59.1	2.8	9.3	5.0	-0.9	9.6	4.4	4.3	4.6	76.5	47.4	68.3	. .	4.4	. .	3.1	. .	9.5	. . .	. . .	. . .
Mese	60.8	59.4	60.2	3.4	9.0	5.0	-0.1	9.3	4.6	4.7	4.8	76.7	51.9	72.3	. .	6.7	. .	8.0	. .	10.6	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

ato del cielo 15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
8 r	5 m	0.78	...	...	...	...	≡² n e mattino.
0	0	0.80	0.13	...	...	0.13	≡² mattino; ≡ verso sera; ◍ 4h - 6h. Tramonto rosso.
0	0	0.87	...	...	...	...	≡ ∨ n e mattino. Tramonto rosso.
9 m	0	0.78	...	...	...	...	≡ n e mattino.
0	1 m	1.02	...	...	...	...	≡ ∨ n e mattino. Tramonto rosso.
0	0	1.01	...	...	...	...	≡ ∨ n e mattino.
1 rs	0	0.86	...	...	...	...	≡ ∨ n e mattino; ≡ bassa I.
1 r	0	0.96	...	...	...	...	≡ n e mattino.
0	0	0.78	...	...	...	...	≡² bassa n, mattino e III. Tramonto rosso. ⊽ 18h30m - 19h.
0	8 ms	0.75	...	...	...	...	≡² n e mattino; ≡ sera e III. Tramonto rosso. ⊽ 18h30m - 21h.
1.9	1.4	8.61	0.13	...	...	0.13	
1 r	7 s	0.60	...	...	...	...	≡² bassa n e mattino; ≡ sera e III; ⊽ III.
0	9 mr	0.49	...	...	...	...	≡ bassa n e mattino; ≡ III; ⊽ a sera.
4 mr	7 mr	3.66	...	...	...	...	≡² n e mattino; orizzonte limpido III; ☾ 22h30m-23h45m; ⌒ W-NW 17h-mezzanotte.
0	0	3.37	...	...	...	...	Orizzonte chiaro n e per tutto il giorno; ⌒ W - NW mezzanotte - 11h.
0	1 s	2.18	...	...	...	...	Orizzonte limpido n e durante il giorno; ≡° mattino. Tramonto rosso, esteso.
3 r	9 s	1.86	...	...	...	...	≡ ∨ ⌙ n e mattino; ≡ da S-W-NE III; ∪ 21h - 23h.
10 m	9 m	0.63	...	...	...	...	≡ ∨ ⌙ n e mattino. Gocce. △° 10h - 11h.
10 m	10 m	gelato	...	...	...	...	≡ ∨ ⌙ n e mattino; ◍° 11h45m - 12h10m; △ a riprese 14h40m - 17h40m; ⌒ E e NE
4 mr	0	»	...	...	...	...	≡ ⌙ mattino; ⌒ E - NE 10h - 17h. [11h - 20h.
0	0	»	...	...	...	...	≡ ⌙ mattino; ≡ III.
3.2	5.2	12.79	...	...	...	...	
7 mr	0	gelato	...	...	...	...	≡ ∨ ⌙ n e mattino; ≡ III.
0	0	»	...	...	...	...	≡ ∨ ⌙ n e mattino; ≡ III.
1 rs	1 s	7.20	...	...	...	...	≡² ∨ ⌙ n e mattino; ≡ III.
0	9 m	1.79	...	...	...	...	≡² ∨ ⌙ n e mattino.
7 mr	0	0.91	1.00	...	...	1.00	◍ 2h - 6h; ≡ mattino.
9 mr	0	1.29	...	...	...	...	≡² ∨ ⌙ n e mattino.
0	0	1.04	...	...	...	...	≡² ∨ ⌙ n e mattino.
0	0	0.57	...	...	...	...	≡² bassa n e mattino; ≡ III.
...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	
3.0	1.3	12.80	1.00	...	...	1.00	
2.7	2.7	34.20	1.13	...	...	1.13	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	60.7	60.2	61.4	8.6	15.6	10.4	4.6	15.9	6.8	5.5	7.0	81	42	75	W	8.5	N	2.0	SE	9.0	. . .	. . .	. . .
2	61.7	60.3	61.3	4.8	15.0	9.2	0.3	15.0	5.8	6.6	8.0	90	52	92	NW	2.5	E	7.0	E	13.5	. . .	. . .	. . .
3	61.9	60.0	60.8	8.0	14.6	10.2	3.2	15.3	6.2	5.4	6.0	78	44	65	W	6.0	E	2.0	E	9.5	. . .	. . .	. . .
4	61.8	59.3	58.6	3.8	14.4	11.2	-0.8	14.8	5.4	5.8	7.0	90	48	71	NW	5.0	NE	3.5	E	2.0	NW	. . .	. . .
5	55.5	55.9	58.6	7.4	7.0	5.0	4.2	7.4	7.6	7.3	6.3	99	97	97	E	17.5	W	10.5	S	12.5	. . .	. . .	. . .
6	58.8	55.5	52.3	6.8	9.6	7.2	3.4	10.3	5.5	4.4	4.8	74	49	63	NW	6.0	W	3.0	E	7.5	N	S	. . .
7	50.1	50.1	52.5	5.6	10.6	7.0	3.7	11.0	6.0	5.8	6.2	88	61	82	N	4.0	W	8.5	SE	12.0	. . .	WNW	. . .
8	57.1	56.8	57.6	8.0	13.8	9.0	2.7	13.9	3.9	3.0	4.3	49	25	51	W	14.0	NW	3.0	S	8.5	. . .	. . .	. . .
9	58.5	56.4	56.8	9.2	14.6	9.2	3.5	14.9	4.0	3.9	5.1	46	32	58	SW	3.0	NW	2.0	S	8.0	. . .	. . .	. . .
10	57.1	55.5	56.2	8.4	14.8	10.4	4.3	15.6	5.8	5.1	5.7	70	41	60	SW	1.0	S	4.5	S	2.5	. . .	W	. . .
I. Decade.	58.3	57.0	57.6	7.1	13.0	8.9	2.9	13.4	5.7	5.3	6.0	76.5	49.1	71.4	. .	6.8	. .	4.6	. .	8.5	. . .	. . .	. . .
11	58.6	57.2	56.9	11.0	15.2	13.0	5.6	15.4	6.7	6.5	7.1	68	51	64	SW	4.0	N	6.0	E	5.5	W	E	. . .
12	56.5	55.6	56.4	12.0	16.4	12.6	6.6	16.9	7.2	6.8	7.6	69	49	70	SW	5.0	NW	2.5	E	10.0	SW	W	. . .
13	56.0	52.9	52.0	11.9	17.1	10.8	7.7	17.4	7.1	6.9	8.4	68	47	87	SW	2.0	E	15.5	E	15.0	WSW	ENE	. . .
14	47.7	44.1	42.8	10.4	15.9	12.2	7.8	16.3	9.2	7.6	9.6	97	56	90	E	15.5	SE	11.5	SW	6.0	. . .	WSW	. . .
15	40.5	39.0	40.9	8.2	10.2	6.8	5.7	12.4	5.1	6.2	5.9	62	66	79	NW	13.5	N	15.5	W	16.5	. . .	W	. . .
16	42.6	42.6	45.0	8.4	13.8	9.6	3.2	14.1	4.1	2.3	3.4	50	18	38	NW	24.0	NW	16.0	W	10.5	. . .	. . .	N
17	49.0	49.4	51.5	9.0	13.4	9.0	3.4	13.8	3.3	2.8	3.7	39	24	43	W	14.0	NE	7.5	SE	5.5	. . .	E	E
18	54.4	54.5	56.0	7.6	11.6	7.6	4.4	12.2	4.8	2.8	3.7	61	27	48	SW	1.5	N	12.0	SE	3.5	E	W	. . .
19	57.4	56.3	56.5	7.0	8.4	6.6	3.6	10.4	4.7	3.9	4.3	63	47	60	NW	5.5	E	20.5	N	6.0	E	E	ENE
20	56.7	55.6	56.0	6.6	7.8	6.0	3.2	9.1	4.8	4.7	4.9	65	59	70	N	6.0	NE	24.0	NE	0.0	. . .	E	. . .
II. Decade.	51.9	50.7	51.4	9.2	13.0	9.4	5.1	13.8	5.7	5.1	5.9	64.2	44.4	64.9	. .	9.1	. .	13.1	. .	7.9	. . .	. . .	. . .
21	56.8	56.8	57.5	6.6	6.4	6.2	3.2	9.6	5.2	6.3	6.0	71	88	85	W	15.0	E	16.0	SW	2.5	E	. . .	. . .
22	59.8	58.7	59.2	7.6	13.4	8.8	3.9	13.6	5.6	5.0	5.3	72	43	63	W	11.5	SW	7.0	SW	13.0	. . .	NW	. . .
23	62.8	61.6	61.7	9.0	13.6	9.0	5.1	13.9	6.5	4.9	4.3	76	42	51	NE	9.5	SE	13.0	S	14.0	E	E	. . .
24	60.7	59.9	61.9	8.8	13.0	7.2	2.6	13.4	5.1	5.2	5.0	60	47	66	SE	9.0	E	18.0	E	20.0	ENE	E	. . .
25	61.3	59.2	60.2	8.4	11.8	6.6	5.1	12.3	5.6	3.5	4.1	68	34	57	NW	5.0	E	21.5	SE	17.5	E	E	. . .
26	59.6	57.9	58.7	8.6	10.6	6.8	5.0	11.5	5.0	3.2	2.8	60	33	38	NW	8.0	E	24.0	E	7.5	E	E	. . .
27	59.1	58.0	58.9	9.6	12.8	9.1	1.7	13.2	3.8	3.1	3.4	42	28	40	SE	1.5	E	10.0	S	11.0	. . .	. . .	. . .
28	60.3	58.9	60.5	11.4	15.6	10.6	3.1	16.0	4.6	3.4	3.8	46	26	40	SE	6.0	E	12.0	E	12.0	. . .	. . .	. . .
29	63.2	61.8	62.1	11.8	16.8	10.0	4.7	16.9	5.3	4.3	5.2	51	31	57	SW	1.5	E	13.5	E	20.0	. . .	. . .	. . .
30	61.0	56.7	56.0	7.0	15.0	9.8	4.7	15.8	7.3	5.0	5.6	97	39	62	E	4.5	NE	30.0	E	20.0	. . .	E	. . .
31	54.9	54.3	56.2	9.0	12.8	9.6	6.9	13.2	7.4	7.5	6.8	86	68	76	NE	23.5	NE	41.0	E	14.5	. . .	E	. . .
III. Decade.	60.0	58.5	59.4	8.9	12.9	8.5	4.2	13.6	5.6	4.7	4.8	66.3	43.5	57.7	. .	8.6	. .	18.7	. .	13.8	. . .	. . .	. . .
Mese	56.8	55.5	56.2	8.4	13.0	8.9	4.1	13.6	5.7	5.0	5.5	68.9	45.6	64 5	. .	8.2	. .	12.4	. .	10.2	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
0	0	0	1.45	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
0	0	0	1.33	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa, ∨ — n e mattino.
0	0	0	1.84	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² ∨° n e mattino.
1 r	0	10	1.66	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² ∨ — n e mattino.
10	10	10	0.64	1.63	8.00	10.37	20.00	≡ tutto il giorno; ◎ 3h - 6h e 12h35m - 20h50m.
8 mr	7 mr	8 mr	1.51	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ solo all'orizzonte durante il giorno.
10	9 m	0	1.61	. . .	inc	. . .	inc	≡ mattino; ◎° 9h30m - 9h45m. Tramonto rosso.
0	0	0	2.56	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° mattino. Nel pom. orizzonte chiaro.
1 rs	0	0	2.32	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
2 r	7 r	0	2.16	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa n e mattino.
3.2	3.3	2.8	17.08	1.63	8.00	10.37	20.00	
8 mr	6 m	10 m	2.10	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
9 m	7 mr	9 m	2.44	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
9 mr	7 mr	9 m	3.24	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino; ⌐ E. NE pom.
10	10 m	10	1.88	. . .	. . .	5.50	5.50	≡² bassa n e mattino. Gocce a 12h35m; ◎° 16h45m - 17h5m; ◎ 19h45m - 21h50m.
10 m	8 m	10	2.13	0.19	. . .	0.38	0.57	Orizzonte chiaro durante il giorno. Gocce a 10h20m e 14h55m; ◎° 16h45m - 17h.
2 mr	0	7 m	3.80	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte bello nel pom. e a sera; ⌐ W. NW 6h - 14h.
0	7 m	9 m	3.41	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte limpido pom. ⌒ 17h30m a SSE.
6 m	8 m	5 m	2.93	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino. Orizzonte limpido pom. Gocce a 16h20m.
9 m	10 m	10 m	2.53	. . .	. . .	. . .	. . .	Gocce a 9h20m; ⌐ E. NE 10h - 17h.
10	9 m	1 r	1.97	. . .	. . .	. . .	. . .	Gocce nel pom.; ⌐ NE 13h - 17h.
7.3	7.2	8.0	26.43	0.19	. . .	5.88	6.07	
10 m	10	10 m	0.17	. . .	0.50	0.63	1.13	◎ 13h55m - 16h50m.
10	5 mr	0	1.99	. . .	. . .	. . .	. . .	Gocce a 7h15m.
10 m	7 m	0	3.51	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ solo all'orizzonte tutto il giorno.
8 mr	7 mr	5 m	3.94	. . .	. . .	. . .	. . .	∨ — n e mattino; ⌐ E. SE 10h - 21h.
9 m	5 mr	0	3.43	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ⌐ E. NE, 13h - 17h.
10 m	4 mr	0	3.83	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte chiaro pom.; ⌐ E. NE 11h - 16h.
0	0	0	4.11	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte bello mattino.
0	0	0	3.99	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ all'orizzonte durante il giorno.
0	0	0	4.34	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ⌐ E. NE 16h - 22h.
10	8 mr	9	3.46	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa mattino; ⌐ E. NE 13h - mezzanotte.
10	10 m	10	2.03	2.00	inc	0.63	2.63	◎° a riprese 6h35m - 15h45m; ⌐ E. NE 7h - 20h.
7.0	5.1	3.1	34.80	2.00	0.50	1.26	3.76	
5.9	5.2	4.6	78.31	3.82	8.50	17.51	29.83	

Digitized by Google

APRILE

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	56.1	54.4	54.1	10.9	15.2	11.6	5.5	15.7	7.0	4.5	5.0	72	34	49	W	5.0	NE	4.5	S	6.0	E	W	. . .
2	53.6	51.9	52.9	11.8	17.2	10.4	6.2	17.4	6.2	4.1	5.9	60	28	63	E	4.0	E	19.0	E	13.0	. . .	ENE	. . .
3	53.9	53.4	55.1	7.0	16.7	11.6	3.1	16.9	6.8	4.4	6.3	91	31	62	NE	3.5	E	14.5	E	12.0	. . .	. . .	. . .
4	57.7	56.6	57.5	14.4	19.6	14.8	6.2	19.9	5.3	4.3	4.6	44	26	37	W	11.5	NW	2.5	N	3.0	. . .	. . .	. . .
5	59.0	57.0	57.2	14.2	19.4	14.2	8.1	19.5	6.4	5.5	5.4	53	33	45	W	3.5	NE	16.5	E	3.0	. . .	E	. . .
6	57.1	55.7	56.2	15.0	19.8	15.0	8.2	20.0	7.1	5.7	6.2	56	33	48	N	4.5	E	14.0	S	5.0	. . .	ENE	. . .
7	57.3	56.0	56.7	14.8	20.4	15.8	9.7	20.8	7.2	5.6	6.1	58	32	46	W	3.5	E	6.5	SW	4.5	. . .	. . .	. . .
8	57.8	55.8	55.8	17.4	22.0	16.2	9.3	22.4	6.7	4.4	5.9	45	22	43	W	3.0	E	5.5	E	11.5	. . .	. . .	. . .
9	57.4	55.9	57.3	16.6	22.9	14.0	9.7	23.2	7.2	6.2	7.5	51	30	63	W	4.0	E	5.0	E	22.5	. . .	. . .	. . .
10	58.6	57.2	57.2	16.2	21.2	16.0	9.0	21.4	8.2	5.1	5.8	60	27	43	SE	4.5	E	11.0	E	10.0	. . .	. . .	. . .
I. Decade.	56.9	55.4	56.0	13.8	19.4	14.0	7.5	19.7	6.8	5.0	5.9	59.0	29.6	49.9	. .	4.7	. .	9.9	. .	9.1	. . .	. . .	. . .
11	56.9	53.3	53.0	16.0	22.0	15.2	8.7	22.5	6.3	3.9	6.3	46	20	49	S	4.0	E	7.5	E	11.5	. . .	. . .	. . .
12	51.1	49.0	49.2	15.0	22.0	17.6	8.7	22.7	7.1	5.5	4.6	56	28	31	SE	2.5	W	9.0	SW	5.0	. . .	W	WNW
13	51.8	51.2	53.2	16.0	20.2	14.8	9.7	20.5	8.6	6.3	8.8	63	36	70	N	1.5	NE	12.5	E	11.5	. . .	. . .	. . .
14	56.6	55.7	57.1	13.2	21.8	17.8	7.0	22.3	8.7	5.3	7.2	77	27	48	NW	3.0	E	12.0	SW	12.5	. . .	. . .	SSW
15	58.5	56.8	57.1	18.6	23.0	16.4	10.7	23.4	5.9	4.6	4.3	37	22	31	W	2.0	W	7.0	W	7.5	W	W	. . .
16	56.9	54.6	53.8	15.0	19.2	14.0	9.7	19.4	6.4	6.6	9.8	50	40	82	SE	2.5	SE	12.5	E	12.0	W	WSW	. . .
17	51.0	50.4	52.0	12.6	15.9	13.0	9.7	16.5	9.3	9.9	10.4	86	74	93	E	25.5	N	12.5	N	1.0	ESE	W	. . .
18	53.0	53.1	52.8	14.4	14.8	13.0	10.6	17.3	10.3	9.6	10.4	84	76	93	NE	2.5	NW	9.0	E	13.5	W	W	. . .
19	53.2	54.1	55.5	15.4	19.0	14.0	10.2	19.9	8.9	6.0	7.0	68	36	59	N	2.5	W	18.5	W	3.0	W	W	. . .
20	55.1	51.7	50.6	14.0	17.4	13.2	8.4	17.9	6.5	7.2	9.7	54	49	86	SW	3.5	NE	10.0	NE	13.0	. . .	NE	. . .
II. Decade.	54.4	53.0	53.4	15.0	19.5	14.9	9.3	20.2	7.8	6.5	7.9	62.1	40.8	64.2	. .	5.0	. .	11.1	. .	9.1	. . .	. . .	. . .
21	43.1	41.9	43.3	11.0	10.8	11.6	9.4	13.8	8.8	9.2	9.7	90	95	95	NE	40.0	N	28.0	W	14.5	. . .	. . .	. . .
22	45.9	46.2	47.7	12.8	17.4	12.8	9.7	17.5	9.7	8.0	9.2	88	54	84	W	4.0	E	12.0	E	15.0	. . .	N	. . .
23	50.6	49.8	51.1	13.6	18.8	13.2	9.2	19.2	9.8	9.3	10.0	84	57	88	NW	3.0	NE	8.5	E	8.5	. . .	W	. . .
24	54.9	54.8	55.8	13.4	19.4	15.8	11.2	20.0	10.1	9.3	10.3	88	55	77	W	11.0	W	1.5	W	9.5	. . .	WNW	. . .
25	57.9	56.7	56.7	17.8	17.6	15.4	10.7	21.3	9.6	10.6	10.8	63	70	83	W	3.5	SW	13.5	SW	8.0	W	W	. . .
26	58.5	57.3	56.8	17.0	21.0	18.2	10.9	21.6	8.7	8.2	9.3	61	44	60	SW	5.5	SW	3.5	SW	7.5	. . .	WSW	. . .
27	56.2	53.7	52.9	19.0	21.0	15.2	12.7	21.4	7.5	9.1	12.0	46	49	93	SW	3.5	NE	11.5	SW	5.0	. . .	W	. . .
28	48.3	46.9	47.6	15.0	17.0	14.2	12.2	17.9	11.3	10.9	6.7	89	76	55	SW	7.0	SW	8.0	W	17.0	. . .	WSW	. . .
29	46.5	45.6	45.1	15.4	18.8	13.0	10.0	19.4	7.2	6.7	10.4	55	41	93	W	8.5	SW	11.0	NE	18.0	. . .	NW	. . .
30	46.1	46.8	48.4	14.8	17.0	12.4	10.7	18.6	7.3	9.3	10.0	58	64	93	NE	39.0	NE	21.0	W	9.0	SE	SE	. . .
31	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .
III. Decade.	50.8	50.0	50.5	15.0	17.9	14.2	10.7	19.1	9.0	9.1	9.8	72.2	60.5	82.1	. .	12.5	. .	11.9	. .	11.2	. . .	. . .	. . .
Mese	54.0	52.8	53.3	14.6	19.0	14.4	9.2	19.7	7.9	6.8	7.9	64.4	43.6	65.4	. .	7.4	. .	10.9	. .	9.8	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
8 r	8 rs	0	2.65	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ all' orizzonte per tutto il giorno.
8 rs	9 r	1 m	3.09	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ all' orizzonte per tutto il giorno; ⌒ E. NE 15h - 20h.
10	0	0	3.56	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa n e mattino.
0	0	0	3.59	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	5 m	0	4.29	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino, orizzonte chiaro nel pom.
0	7 m	0	4.11	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ all' orizzonte durante il giorno.
9 s	7 rs	0	4.09	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	0	0	5.17	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° mattino.
0	0	0	4.48	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ⌒ E 19h - 22h.
1 mr	0	0	5.34	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; caligine nel pom.
3.6	3.6	0.1	40.37	. . .	. . .	. . .	. . .	
0	1 r	7 rs	6.33	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ▽ a sera.
4 r	5 mr	7 mr	3.98	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ☾ 20h20m a NW, 22h45m a E. SE.
2 r	0	0	3.79	. . .	. . .	. . .	. . .	— mattino.
0	0	9 m	4.76	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa. Orizzonte chiaro nel pom.
9 mr	7 m	0	5.49	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
10 m	10 m	10	4.82	. . .	. . .	2.13	2.13	≡ mattino; ◎° 10h50m; ◎ 18h30m - 21h50m e verso mezzanotte; ⌒ SE 22h - 24h.
10 m	9 m	10	2.60	2.00	. . .	0.13	2.13	◎ n e 5h - 6h40m; gocce 8h - 8h30m; ◎° 17h - 23h; ≡ III; ⌒ SE. E. NE matt.
9 m	9 m	10	1.82	2.00	0.63	0.81	3.44	◎ da 6h10m - 14h20m a riprese e da 20h25m a mezzanotte; ≡ mattino; ⌒ NE 16h30m.
4 mr	8 m	10 s	3.73	14.50	. . .	. . .	14.50	◎ mezzanotte - 4h; ≡ mattino; orizzonte bello pom.; ☾ N 2h20m; ⌒ W 15h - 17h.
9 rs	9 m	10 m	2.89	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ◎ 21h15m - mezzanotte; ⌒ E 16h - 18h.
5.7	5.8	7.3	40.21	18.50	0.63	3.07	22.20	
10	10	10 m	1.39	36.88	10.63	5.63	53.14	◎ a riprese per tutto il giorno e ≡; ⌒ NE mezzanotte - 16h.
10	9 m	1 m	2.34	1.00	. . .	. . .	1.00	◎° mezzanotte - 1h; 7h45m - 8h55m; 9h20m - 11h45m. Orizzonte bello nel pom.
10 m	9 m	9 m	1.61	. . .	. . .	5.50	5.50	≡ bassa n e mattino; ☾ S-SE ◎ 15h57m - 17h40m. A 16h55m ⌒ S-NE.
10	8 m	0	2.35	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino. Orizzonte chiaro pom.
5 rs	10 m	0	2.82	. . .	. . .	inc	inc	≡ n e mattino; ◎° 14h45m - 15h45m.
0	5 rs	3 r	3.51	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
10 m	9 m	10 m	2.86	. . .	. . .	1.25	1.25	≡ mattino. ◎° 16h25m - 19h55m; ◎ 20h - 21h10m e 23h - mezzanotte.
10 m	9 m	5 r	2.64	0.63	0.31	. . .	0.94	◎ mezzanotte - 2h e 10h55m - 11h55m; ☾ N III. | a 17h42m e 19h14m30s.
1 mr	8 m	10 m	3.61	. . .	. . .	3.00	3.00	◎ 19h15m - 19h30m; ⌒ 19h25m S-N. Tramonto rosso. ◎ 20h30m - mezzanotte. Terremoto
8 m	10 m	10	2.41	11.50	. . .	4.13	15.63	◎ mezzanotte - 5h; ☾ 15h41m - 15h50m e ◎ 15h48m - 21h45m; ⌒ NW. NE 1h - 16h.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
7.4	8.7	5.8	25.54	50.01	10.94	19.51	80.46	
5.6	6.0	4.4	106.12	68.51	11.57	22.58	102.66	

Digitized by Google

MAGGIO

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	49.8	50.9	52.8	14.8	14.0	12.8	11.1	15.6	9.8	10.0	10.2	78	84	93	W	12.0	SW	7.0	SW	10.5	E	. . .	. . .
2	55.5	55.0	56.1	13.7	16.2	14.0	8.7	16.9	9.8	9.5	10.3	84	69	86	E	4.0	NE	18.5	NE	5.5	E	NW	. . .
3	55.6	54.3	52.9	16.2	15.0	13.2	11.2	19.3	10.0	9.7	10.5	73	76	93	NE	1.5	NW	4.0	NW	4.0	WSW	WSW	. . .
4	51.1	49.2	49.5	17.2	20.2	15.2	11.7	20.9	9.7	8.7	7.3	66	49	56	NW	2.5	N	6.0	S	12.0	W	WNW	. . .
5	50.5	48.8	50.2	17.4	21.2	17.4	10.3	21.9	8.0	8.4	9.3	54	45	63	N	1.5	S	2.0	S	1.5	. . .	W	. . .
6	56.6	56.9	56.7	11.4	14.6	14.2	9.7	15.1	8.1	9.7	10.2	80	78	84	NE	12.0	NE	8.5	SE	4.5	. . .	. . .	. . .
7	55.4	55.4	55.3	16.2	14.6	13.2	11.4	17.9	10.6	10.2	10.8	77	82	95	NE	10.5	E	8.5	E	6.0	W	W	. . .
8	56.4	55.4	56.3	16.9	20.0	17.6	11.7	20.4	10.2	9.5	10.0	71	55	67	E	1.0	NE	6.5	NE	7.0	W	E	. . .
9	57.5	55.6	55.7	19.4	21.3	17.0	11.7	21.6	10.0	8.3	8.7	60	44	61	NW	3.5	E	7.5	E	12.0	E	N	. . .
10	55.6	53.8	53.9	19.1	23.3	17.8	11.5	23.5	10.2	7.4	10.7	62	35	71	SW	5.0	E	11.0	E	13.0	. . .	W	. . .
I. Decade.	54.4	53.5	53.9	16.2	18.0	15.2	10.9	19.3	9.6	9.1	9.8	70.5	61.7	76.9	. .	5.4	. .	8.0	. .	7.6	. . .	. . .	. . .
11	53.8	53.2	55.5	16.4	18.4	14.0	11.1	20.9	10.7	9.2	10.0	77	59	84	SE	5.0	NW	14.5	SE	10.0	S	W	. . .
12	55.3	52.7	51.7	18.0	20.6	14.6	11.6	21.4	9.2	9.3	11.0	60	51	89	NW	9.5	NE	8.0	E	10.0	. . .	WNW	W
13	52.0	51.5	53.1	11.8	15.8	13.0	10.4	15.9	10.1	10.3	10.6	98	77	95	W	14.5	NW	9.0	W	17.5	. . .	. . .	ENE
14	54.7	54.6	54.3	16.1	19.6	17.0	11.6	20.4	8.5	7.7	9.0	62	45	62	W	13.5	W	6.0	W	7.0	. . .	. . .	. . .
15	56.2	55.7	55.8	20.0	23.0	20.2	11.0	23.4	9.4	9.3	11.6	54	44	66	SW	0.5	SW	7.5	E	5.0	. . .	. . .	. . .
16	56.9	55.2	55.2	22.1	25.0	18.8	13.6	25.4	10.7	9.8	11.8	54	42	73	W	4.5	NE	6.0	SW	9.0	. . .	. . .	. . .
17	55.1	53.4	52.7	22.0	24.2	20.8	14.2	24.9	12.3	10.0	10.3	63	45	56	SW	3.0	NE	16.0	NE	3.0	W	E	. . .
18	52.2	50.8	50.8	22.4	24.6	20.0	14.8	25.1	10.5	9.2	12.0	52	40	69	W	8.0	E	6.5	NE	7.5	E	W	. . .
19	50.7	49.3	49.5	20.2	24.4	19.4	15.5	24.9	12.5	9.3	10.0	71	41	60	NE	6.5	NE	11.0	SW	4.0	E	S	. . .
20	50.2	49.6	49.6	18.7	16.4	16.2	14.4	23.3	11.6	12.1	10.9	72	87	79	NE	8.0	W	12.0	NW	5.0	E	W	. . .
II. Decade.	53.7	52.6	52.8	18.8	21.2	17.4	12.8	22.6	10.6	9.6	10.7	66.3	53.1	73.3	. .	7.3	. .	9.7	. .	7.8	. . .	. . .	. . .
21	49.2	48.5	48.2	19.0	17.1	16.0	12.2	22.3	11.6	10.6	12.7	71	73	94	SW	5.5	W	10.0	NE	6.5	E	S	. . .
22	50.2	52.0	54.5	19.0	19.4	15.4	13.3	19.9	9.7	10.3	10.2	59	62	79	NE	5.0	NW	7.0	NE	1.0	ENE	W	. . .
23	57.6	57.8	58.7	20.2	20.8	15.4	11.0	21.5	10.4	10.6	12.2	59	58	93	NE	2.0	E	14.0	SE	11.5	W	. . .	. . .
24	57.3	55.7	54.0	18.0	22.0	17.8	13.6	22.4	12.6	10.5	10.2	82	53	67	E	15.0	NE	18.5	SE	8.0	. . .	E	. . .
25	50.2	48.2	49.4	20.4	22.0	16.2	14.7	25.4	12.1	10.5	12.0	68	53	87	NE	16.0	NW	24.0	NW	8.5	E	WSW	. . .
26	45.5	43.3	43.1	15.4	20.4	15.6	12.2	20.5	10.0	7.8	9.4	77	43	71	SW	10.0	SW	11.0	W	12.0	. . .	W	. . .
27	41.8	42.3	44.5	21.2	21.0	12.8	11.7	23.3	7.1	5.4	7.0	37	28	63	SW	33.0	SW	37.5	SW	26.5	WSW	W	. . .
28	49.2	50.6	52.3	19.2	20.5	15.0	8.2	22.1	7.2	4.8	5.9	43	27	47	SW	8.0	SW	25.0	SW	5.0	W	W	. . .
29	53.5	52.6	53.4	19.2	22.4	18.0	9.2	22.9	6.6	7.6	7.4	40	38	48	SE	5.0	NW	4.5	W	16.5	W	W	. . .
30	54.3	53.1	53.7	15.6	18.0	16.7	12.7	19.5	10.4	10.3	10.6	79	67	74	W	2.5	W	2.0	W	5.0	. . .	WSW	. . .
31	55.1	54.2	55.0	20.3	19.8	17.8	11.7	23.3	10.6	10.4	12.2	60	60	80	SW	4.5	SE	17.5	NE	2.0	. . .	W	. . .
III. Decade.	51.3	50.8	51.5	18.9	20.3	16.1	11.9	22.1	9.9	9.0	10.0	61.4	51.1	73.0	. .	9.7	. .	15.6	. .	9.3	. . .	. . .	. . .
Mese	53.1	52.3	52.7	18.0	19.9	16.2	11.9	21.4	10.0	9.2	10.2	65.9	55.2	74.4	. .	7.5	. .	11.2	. .	8.3	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
0 m	10	2 r	1.24	2.00	6.63	1.00	9.63	◍ 1h - 16h20m a riprese.
0 m	10 m	10	1.67	. . .	inc	0.25	0.25	≡° bassa mattino; ◍° 16h55m - 18h50m; ⎓ NE 13h - 15h.
9 m	10 m	2 r	2.09	. . .	0.38	0.69	1.07	≡° bassa n e matt.; ⍂ attorno, ≺ SE 13h45m-13h58m, ◍ 13h25m-14h45m e 16h35m-17h10m.
5 rs	9 m	5 r	3.42	. . .	. . .	4.38	4.38	◍ 15h40m - 17h32m; ⍂ N - E e S - E, ≺ N. A 17h25m 2 ⌒ S - NE.
0	5 m	0	2.98	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	10	10	1.40	. . .	. . .	. . .	. . .	
9 m	10 m	10	1.62	8.38	0.62	. . .	9.00	◍ 2h - 6h; ⍂ W - E e S - E 11h55m - 13h8m, ◍° a riprese sin oltre 16h; ≡ mattino.
8 m	7 m	3 m	2.98	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
3 m	5 mr	0	4.31	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
2 r	8 r	2 r	4.68	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
6.6	8.4	4.4	26.39	10.38	7.63	6.32	24.33	
10 m	10 m	10 m	2.58	0.50	inc	5.85	6.35	≡ matt.; ◍ 8h35m - 9h50m; ⍂ WSW - E 14h57m - 16h52m, ◍ 15h37m - 18h40m; ⌒ 2 a
4 rs	9 m	5 rs	3.90	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ⍂ lontano WSW - SW - S pom. [NE 18h30m.
10	10 m	9 m	1.67	4.05	7.90	3.29	15.24	◍ n - 11h50m e 15h8m - 19h25m a riprese; ⎓ E . NW 4h - 8h.
10 m	0	0	3.00	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte bello tutto il giorno.
0	0	0	3.72	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	1	0	4.10	. . .	. . .	. . .	. . .	⍂ lontano a S II; ≺ ENE III.
2 r	1	1 rs	4.66	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
4 mr	4 r	7 s	4.83	. . .	. . .	. . .	. . .	≺ NNE 22h.
9 mr	5 mr	8 rs	4.51	inc	. . .	. . .	inc	◍° 7h20m - 8h25m; ⍂ lontano SW - S 16h47m - 17h5m; ⌒ S 18h10m; ≺ NE sera.
9 m	10 m	8 m	2.48	. . .	17.80	inc	17.80	≡ mattino; ⍂ ◍ ▲° 12h30m - 15h3m SW . W . NW - NE; ◍° 16h - 16h40m.
5.8	5.0	4.8	35.45	4.55	25.70	9.14	39.39	
1 m	9 m	7 m	2.78	. . .	5.32	inc	5.32	≡ bassa mattino; ⍂ ◍ WNW . W . S - NE 12h15m - 15h32m.
8 m	9 m	0	2.98	1.20	0.60	11.30	13.10	◍ n; ≡ matt.; ⍂ 11h16m-11h20m S.W-N.NE; ◍° 11h12m-11h40m e 14h5m-14h12m; ⍂◍²▲
5 rs	10 m	9 m	2.79	. . .	. . .	1.30	1.30	⍂ lontano SW II; ◍ 16h50m-20h35m. [S-SE 15h55m-16h20m; ⌒ NE 16h25m, S 17h25m.
10 m	9 mr	9 m	3.89	. . .	. . .	0.10	0.10	Gocce 8h30m; ◍ 20h8m - 20h25m.
7 r	8 m	0	3.96	. . .	. . .	. . .	. . .	⍂ W - N . NE 13h50m - 15h50m; ⎓ E . NE . SE . NW 10h - 17h.
10	9 m	10	3.90	1.00	0.69	. . .	1.69	≡ mattino; ◍° 6h28m - 6h55m; ◍ 7h25m - 11h10m e 21h25m - 22h10m.
5 mr	5 mr	5 m	7.34	1.35	. . .	0.58	1.93	Gocce 19h20m; ◍ 20h25m - 21h18m; ⎓ SW 8h - mezzanotte.
5 r	5 m	0	6.16	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte bello nel mattino; ⎓ SW 12h - 19h.
6 m	7 m	5 r	4.89	. . .	. . .	. . .	. . .	
10 m	7 m	0	2.37	. . .	0.70	. . .	0.70	≡ mattino; ◍° 7h35m - 8h e 9h25m - 12h55m; gocce 14h20m.
0	8 r	10 m	3.50	. . .	0.91	. . .	0.91	≡ mattino; ⍂ ◍ WSW - S - E 12h58m - 14h7m; ⌒ SSE 17h50m.
6.1	7.8	5.0	44.56	3.55	8.22	13.28	25.05	
6.2	7.1	4.7	106.40	18.48	41.55	28.74	88.77	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	57.3	56.7	57.9	20.4	20.0	18.8	13.7	24.3	10.6	11.7	8.4	59	67	52	W	7.5	W	8.0	SW	10.0	W	W	. . .
2	60.2	58.8	58.5	21.8	24.4	21.0	13.1	25.2	10.0	9.7	12.6	52	43	68	W	7.5	NE	4.5	NE	7.5	. . .	. . .	. . .
3	58.4	56.6	56.3	23.3	26.6	22.4	15.5	27.4	11.2	11.0	14.3	53	43	71	W	2.5	W	4.0	W	7.0	. . .	W	. . .
4	57.3	55.8	56.1	24.7	28.6	22.8	16.8	29.3	12.8	12.8	9.4	56	44	45	W	4.0	NE	6.0	W	9.0	. . .	WSW	. . .
5	56.8	55.4	54.6	24.0	27.6	23.6	16.7	28.4	12.3	10.9	6.9	56	40	32	W	3.5	E	7.5	NW	11.5	. . .	. . .	. . .
6	55.7	54.0	53.0	24.6	28.4	24.0	17.2	29.1	8.9	10.3	12.3	39	35	56	NE	6.0	NE	6.0	SW	9.0	W	. . .	. . .
7	51.1	49.6	49.8	25.4	26.2	21.2	17.4	28.4	10.9	8.8	8.7	45	35	46	W	9.5	SW	25.0	W	14.0	WSW	W	SSW
8	51.7	51.2	52.3	23.2	25.0	17.6	16.5	26.8	10.3	9.3	10.6	49	39	70	NW	13.5	N	13.5	E	23.5	WNW	W	. . .
9	56.5	56.4	57.7	15.6	19.7	16.8	13.5	20.2	9.3	7.6	9.4	71	45	66	E	9.0	NE	14.0	E	8.0	. . .	. . .	. . .
10	58.3	56.5	55.9	20.0	24.2	21.0	11.3	25.1	9.1	8.2	10.5	52	37	57	E	9.5	E	4.5	S	8.5	. . .	. . .	. . .
I. Decade.	56.3	55.1	55.2	22.3	25.1	20.9	15.2	26.4	10.5	10.0	10.3	53.2	42.8	56.3	. .	7.3	. .	9.3	. .	10.8	. . .	. . .	. . .
11	52.2	49.9	47.0	22.5	25.6	19.8	15.3	26.9	9.0	8.6	10.7	44	35	62	E	4.0	SE	15.5	W	7.0	. . .	W	. . .
12	48.1	49.6	50.4	15.8	16.2	14.0	10.6	16.6	11.5	10.2	10.6	86	74	89	E	9.0	W	14.0	S	6.0	. . .	. . .	NW
13	52.2	51.2	50.8	21.7	24.2	18.2	10.6	25.3	5.1	6.3	8.0	26	28	52	W	15.0	SW	15.5	N	7.0	WNW	W	. . .
14	52.9	52.7	53.6	16.6	19.2	15.4	11.1	20.6	8.2	7.7	8.1	58	46	63	W	14.5	W	5.5	SE	10.5	E	. . .	. . .
15	54.7	54.3	55.7	20.8	24.4	20.4	12.5	25.0	6.4	4.3	6.9	35	19	39	NW	12.5	W	18.0	NW	5.5	WNW	ENE	. . .
16	57.8	56.3	56.7	21.2	25.8	21.2	13.2	26.4	7.2	5.3	8.1	39	21	43	W	11.5	NW	9.0	W	8.5	. . .	. . .	. . .
17	58.1	57.8	58.0	21.6	23.2	20.0	14.4	24.4	8.7	7.4	7.7	45	35	44	NW	6.5	W	7.5	NW	6.0	. . .	. . .	. . .
18	58.8	57.2	56.5	21.8	25.6	21.0	13.7	26.3	8.8	7.7	9.3	45	32	51	SE	3.5	E	10.5	W	8.5	. . .	. . .	. . .
19	52.0	52.0	55.1	23.9	20.2	15.6	14.9	27.3	9.6	12.5	10.4	44	71	79	SW	17.5	NE	25.5	SE	16.5	W	W	. . .
20	57.7	57.4	57.7	20.7	24.6	20.4	11.5	25.9	10.4	6.0	7.7	57	26	43	W	11.0	S	7.5	SE	12.0	. . .	W	. . .
II. Decade.	54.5	53.8	54.2	20.7	22.9	18.6	12.8	24.5	8.5	7.6	8.8	47.9	38.7	56.5	. .	10.5	. .	12.9	. .	8.8	. . .	. . .	. . .
21	58.4	56.6	56.6	23.2	27.8	22.6	14.4	28.6	7.7	7.5	10.7	36	27	52	N	5.5	E	7.0	E	9.5	. . .	W	. . .
22	57.9	56.6	56.6	24.6	28.0	22.2	17.1	28.9	10.7	9.9	13.4	47	35	67	NW	5.0	SE	7.0	E	10.5	. . .	W	. . .
23	58.0	56.9	56.8	23.4	28.2	23.0	15.2	28.7	11.7	11.0	15.2	55	39	73	E	7.0	NE	12.5	E	13.0	. . .	. . .	. . .
24	58.2	57.5	57.7	25.4	30.0	26.6	16.2	31.4	12.7	9.3	13.3	53	29	52	NW	4.0	NW	6.0	E	8.5	. . .	W	. . .
25	59.5	58.1	57.5	27.6	30.8	26.6	20.7	31.4	11.7	10.4	14.4	43	31	55	NW	8.0	E	5.5	E	7.5	. . .	. . .	. . .
26	56.6	54.0	52.8	26.9	30.8	27.1	20.5	31.9	14.2	12.5	14.4	54	38	54	NW	9.0	N	5.0	N	10.0	. . .	W	. . .
27	52.6	51.3	53.5	26.6	28.4	22.4	20.2	29.4	16.5	16.8	18.3	64	58	91	NW	7.0	E	17.0	E	30.0	E	ESE	. . .
28	57.1	56.4	57.1	19.6	24.2	20.0	17.2	25.0	11.6	11.9	10.5	69	53	61	NE	12.5	E	21.0	E	16.5	. . .	S	. . .
29	58.9	58.1	59.5	22.2	26.2	21.0	16.1	26.6	12.1	10.0	9.0	61	40	49	E	8.5	E	18.0	E	17.0	E	ESE	. . .
30	63.1	61.9	61.7	23.7	26.8	23.8	14.6	27.7	9.7	6.3	7.6	45	24	35	NW	4.0	E	9.0	S	9.5	. . .	E	. . .
31	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .
III. Decade.	58.0	56.7	57.0	24.3	28.1	23.5	17.2	29.0	11.9	10.6	12.7	52.7	37.4	58.9	. .	7.1	. .	10.8	. .	13.2	. . .	. . .	. . .
Mese	56.3	55.2	55.5	22.4	25.4	21.0	15.1	26.6	10.3	9.4	10.6	54.6	39.6	57.2	. .	8.3	. .	11.0	. .	10.9	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
6 mr	10 m	0	4.16	...	4.30	...	4.30	☇ ⛈ WSW - SE 13h50m - 14h38m; ☈ lontano SSE - ENE II.
3 rs	1 s	8 mr	4.35	...	...	...	...	
0	4 r	1 rs	4.70	...	...	...	...	
0	5 r	3 r	5.69	...	...	...	...	
0	0	7 r	6.54	...	...	...	...	
7 r	1 r	8 m	7.22	...	...	...	...	≡ mattino.
3 m	7 m	7 m	7.97	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.; ⎓ W. SW 12h - 20h.
2 mr	10	0	5.63	...	...	inc	inc	☇ ⛈° WSW - SSE 15h - 16h20m; ⟋ SE 16h25m; ☾ N. E III; ⎓ N. S. E pom.
10 m	0	0	4.23	0.40	...	...	0.40	⛈ n; gocce 8h10m - 8h20m. Orizzonte chiaro durante il giorno; ☈ lontano.
1 rs	1 rm	0	5.45	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
3.2	3.9	3.4	55.94	0.40	4.30	inc	4.70	
0	8 m	10 m	5.96	...	...	0.45	0.45	≡ mattino; ⛈° 20h10m - 20h40m e 21h20m - 21h25m; ⎓ W. SW 15h - 19h.
10	10 m	4 m	2.81	3.30	3.41	2.35	9.06	⛈ 5h50m - 16h7m a riprese; ☈ ⛈ 9h7m - 10h57m.
3 rs	10 m	8 m	5.57	...	...	...	...	Orizzonte bello tutto il giorno; ☾ E III.
8 m	10	10	3.93	1.20	...	...	1.20	⛈ 5h - 8h25m; orizzonte limpido durante il giorno; ☾ WNW 20h15m.
2 mr	3 r	4 r	6.81	...	...	...	...	Orizzonte limpido pom.
0	2 s	10 s	6.13	...	...	...	...	≡° mattino; ∞ II.
9 s	10 m	2 mr	5.92	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	9 m	6.00	...	...	...	...	
5 m	8 m	1 m	5.37	...	...	0.36	0.36	≡ mattino; ☈ N - E 13h50m - 14h20m; gocce 15h20m; ☇ ⛈ W - S 16h45 - 17h48m;
0	3 r	3 s	6.78	...	...	...	...	Orizzonte bello pom. ⎓ SW. NE. E. SE 9h - 19h.
3.7	6.4	6.1	55.28	4.50	3.41	3.16	11.07	
0	8 rs	10	6.70	...	...	...	...	
0	4 mr	7 rs	6.08	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.
0	0	0	5.83	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte II.
0	3 mr	0	6.91	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	0	7.19	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	3 mr	0	6.85	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.; ☾ ENE III.
7 m	7 m	9 m	5.53	...	...	...	...	≡ mattino; gocce 19h50m - 20h; ☾ NE 21h15m; ⎓ E 17h - mezzanotte.
10	8 m	5 r	5.00	inc	...	...	inc	Gocce 8h20m; ⛈° 8h55m - 9h5m; ⎓ E mezzanotte - 3h, E. NE 14h - 19h.
8 mr	8 m	2 r	6.66	...	...	...	...	≡ mattino; ☾ NE 21h30m.
0	4 m	0	7.95	...	...	...	...	≡ mattino.
...	...	...	...	...	...	...	...	
2.5	4.5	3.3	64.70	inc	...	...	inc	
3.1	4.9	4.3	175.92	4.90	7.71	3.16	15.77	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	63.3	61.5	60.7	26.6	29.0	24.8	17.2	30.2	8.2	7.3	10.2	32	25	44	W	4.5	S	7.5	SE	10.0	ENE	. . .	. . .
2	61.2	59.5	58.9	27.2	30.0	26.0	19.2	30.9	9.4	9.6	11.2	35	30	45	SW	3.0	SE	6.0	S	10.5	. . .	. . .	. . .
3	58.3	55.9	55.4	27.8	31.8	25.6	20.2	32.9	12.4	9.2	10.7	45	26	44	SW	3.0	SE	7.0	SW	7.5	ENE	N	. . .
4	55.9	54.7	56.1	27.4	31.8	23.4	19.4	32.4	11.2	11.9	17.7	41	34	83	W	4.5	NE	5.5	NW	7.0	. . .	W	. . .
5	58.7	57.9	58.7	25.2	29.0	22.0	19.9	29.4	14.9	13.9	15.8	62	47	81	E	8.0	SE	8.5	NE	6.0	. . .	W	. . .
6	59.5	58.2	58.0	27.4	30.7	26.1	19.2	31.1	14.7	12.2	15.0	54	37	60	NE	3.5	NE	6.5	SE	11.5	. . .	. . .	. . .
7	59.6	57.7	57.8	26.8	31.7	24.2	19.6	32.4	14.9	12.2	17.6	57	35	78	E	4.5	SE	7.5	NE	13.0	. . .	. . .	. . .
8	57.1	54.7	56.3	27.0	30.4	22.2	19.7	31.4	12.8	13.1	15.0	48	41	76	W	11.5	NE	6.5	E	23.0	. . .	. . .	. . .
9	56.6	54.5	54.2	25.5	28.4	23.0	18.7	28.9	16.1	12.6	18.0	66	44	86	SE	5.0	E	11.5	NW	10.0	E	W	. . .
10	52.9	50.5	49.5	26.4	29.8	26.0	20.2	30.5	13.8	13.1	11.8	54	42	47	NW	7.0	NE	8.5	W	11.0	W	W	. . .
I. Decade.	58.3	56.5	56.6	26.7	30.3	24.3	19.3	31.0	12.8	11.5	14.3	49.4	36.1	64.4	. .	5.5	. .	7.5	. .	11.0	. . .	. . .	. . .
11	47.2	47.5	49.4	25.0	31.0	24.0	20.7	31.4	14.4	10.4	5.9	61	31	26	NW	10.0	W	24.0	SW	10.0	WSW	. . .	. . .
12	52.5	52.5	53.3	26.2	30.0	25.0	15.7	30.6	8.2	6.8	7.8	33	21	33	NE	6.5	W	26.5	NW	17.5	W	. . .	. . .
13	55.8	54.9	54.5	26.4	30.0	24.2	17.7	30.6	10.8	11.9	13.8	42	38	62	NW	3.5	E	10.0	E	10.0	. . .	W	. . .
14	52.9	51.9	50.6	26.2	30.8	28.0	19.5	31.8	15.7	12.2	9.0	62	37	32	N	5.0	S	10.5	SW	35.5	SW	W	. . .
15	51.0	51.3	54.0	28.7	30.3	24.2	21.0	31.4	7.0	6.9	11.3	24	21	50	SW	8.5	W	21.0	N	8.0	SSW	SW	. . .
16	56.6	56.0	57.1	26.2	29.0	21.2	17.6	29.5	11.3	8.3	11.5	45	28	62	NW	5.5	W	13.0	S	10.5	. . .	W	. . .
17	57.7	55.7	54.7	24.6	28.6	25.0	15.2	29.9	11.0	10.1	12.4	48	34	52	E	5.0	NE	6.5	E	12.5	. . .	. . .	. . .
18	53.2	50.6	49.4	26.4	30.0	25.8	19.6	30.6	10.2	10.3	10.6	40	32	43	W	7.0	NE	7.0	W	10.0	. . .	. . .	. . .
19	50.1	49.4	52.1	26.2	26.8	19.7	18.5	28.9	14.3	13.9	14.6	56	53	86	NW	4.5	E	17.0	NE	10.5	W	W	. . .
20	56.3	56.4	56.7	23.2	26.0	22.3	16.6	26.4	12.2	10.8	10.9	58	43	54	NE	17.5	E	17.5	E	15.0	E	SW	. . .
II. Decade.	53.3	52.6	53.2	25.9	29.3	23.9	18.2	30.1	11.5	10.2	10.8	46.9	33.8	50.0	. .	7.3	. .	15.3	. .	14.0	. . .	. . .	. . .
21	57.9	56.7	56.7	24.8	28.2	23.8	16.7	28.7	13.1	10.7	12.1	57	38	55	E	9.0	E	7.5	E	15.0	W	W	. . .
22	57.2	56.3	55.9	26.4	29.8	26.6	18.7	30.4	11.2	10.4	11.0	44	33	43	SE	3.5	NE	7.0	E	9.0	. . .	. . .	. . .
23	56.9	55.9	56.5	28.0	31.4	27.8	18.7	32.2	12.1	10.7	12.3	43	31	44	NW	4.5	N	6.0	NE	8.0	. . .	. . .	. . .
24	58.5	57.7	57.4	28.6	33.2	29.4	20.7	34.0	12.1	7.6	11.3	42	21	37	NW	6.0	SE	4.5	N	5.5	. . .	. . .	. . .
25	56.8	54.7	53.6	31.0	35.0	30.9	22.1	35.9	13.7	11.8	13.8	41	28	42	SW	4.5	E	5.0	NE	8.0	. . .	. . .	. . .
26	51.1	48.8	48.7	30.0	33.8	27.2	23.5	33.9	12.0	10.0	10.4	38	25	39	NE	8.0	N	7.5	SW	7.5	. . .	. . .	. . .
27	50.6	50.5	52.3	27.4	31.4	25.0	21.4	32.5	10.0	13.6	15.0	37	40	64	NW	18.5	N	9.0	N	16.5	. . .	W	. . .
28	55.8	54.8	56.0	24.6	29.6	25.2	20.2	30.4	14.2	13.2	13.9	62	43	58	N	14.5	N	15.0	E	16.0	. . .	W	. . .
29	57.8	55.7	55.5	26.0	29.6	25.0	18.3	30.2	13.0	10.8	10.0	52	35	43	E	19.0	E	14.5	E	14.0	W	NW	. . .
30	54.6	52.6	52.5	25.4	30.9	25.8	18.0	31.8	13.7	12.1	5.6	57	36	23	E	4.5	E	6.5	W	14.5	W	W	. . .
31	53.7	52.2	52.3	23.2	28.8	24.6	18.3	29.4	10.0	8.2	9.2	48	28	40	NW	17.0	NW	9.0	NW	11.5	. . .	W	. . .
III. Decade.	55.5	54.2	54.3	26.9	31.1	26.5	19.7	31.8	12.3	10.8	11.3	47.4	32.5	44.4	. .	9.9	. .	8.3	. .	11.4	. . .	. . .	. . .
Mese	55.7	54.4	54.7	26.5	30.2	25.0	19.1	31.0	12.2	10.8	12.1	47.9	34.1	52.7	. .	7.6	. .	10.3	. .	12.1	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
1 mr	0	0	8.38	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.
0	0	0	7.73	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
4 r	4 mr	7 rs	7.83	...	...	...	...	≡ matt.; ∞ orizzonte pom. [⌒ SSE-NE 16h58m. Tramonto rosso; ☾ N 21h30m.
0	7 m	7 s	5.69	...	...	11.15	11.15	≡ matt.; ∞ orizzonte pom.; ◎° 15h52m-16h10m; ⊓ ◎² SSE-ENE 16h28m-18h30;
0	6 m	0	5.34	...	...	inc	inc	≡ matt.; ⊓ NW-E 16h20m-17h18m; ◎" 18h29m-20h10m; ⌒ ENE 19h5m e 19h35m.
0	0	0	6.48	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.; ☾ N 21h45m.
0	1 r	9 r	7.16	...	...	1.05	1.05	≡ matt.; ∞ orizzonte pom.; ⊓ ◎ WNW-ENE 19h40m-20h55m; ☾ NE-E 21h30m.
0	0	10 m	5.50	...	...	7.60	7.60	≡ matt.; ∞ orizzonte pom.; ⊓ ◎° WNW-SE 17h18m-18h28m; ☾ SE 20h40m e III.
7 m	3 r	0	5.57	...	...	4.30	4.30	≡ matt.; ⊓ ◎ SW-E, 1 fulmine, 19h20m-19h54m, indi ◎ sino 20h12m; ☾ E 20h30m.
4 mr	7 mr	0	6.11	...	...	...	...	≡ mattino; ☾ NE III.
1.6	2.8	3.3	65.79	...	...	24.10	24.10	
9 m	0	1 r	8.74	...	inc	...	inc	Orizzonte bello pom. e sera; gocce 7h45m e 10h58m; ◎° 11h42m-11h45m; ⌓ SW.W 13h-19h.
1 mr	0	0	9.20	...	...	...	...	≡ mattino; orizzonte bello pom. e sera; ⌓ SW.W pom.
0	1 mr	8 r	6.69	...	...	...	...	∞ all'orizzonte nel pom.
4 mr	10 m	10 m	11.17	...	inc	...	inc	≡ mattino; ◎° 10h55m-11h5m; doppio ⌒ da S-NE; ⌓ SW.S 18h-mezzanotte.
4 r	3 m	1 r	9.00	...	...	...	...	☾ SSW 3h30m; orizzonte chiaro I e pom.; ⌓ W.NW 15h-17h.
0	9 m	0	6.06	...	...	...	...	≡ mattino; ⊓ lontano da N-E II; ⌓ SW.NE.E 16h-19h.
1 r	0	0	7.16	...	...	...	...	≡ mattino.
2 s	0	0	7.40	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
6 mr	6 mr	1 r	5.56	...	...	0.90	0.90	≡ mattino; ⊓ ◎ WNW-E 16h42m-19h54m; doppio ⌒ S-NE 19h36m.
3 mr	2 mr	2 r	5.80	...	...	...	...	Orizzonte bello durante il giorno.
3.0	3.1	2.3	76.78	...	inc	0.90	0.90	
3 mr	2 mr	0	7.30	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	0	7.24	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	6.99	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	8.41	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.
0	0	0	9.41	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.
0	0	0	10.47	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	8 m	0	7.36	...	...	...	...	
0	5 m	0	6.72	...	...	...	...	≡ mattino.
2 mr	8 r	0	7.97	...	...	...	...	≡ mattino; ⌓ E 9h-12h.
2 r	8 m	0	8.91	...	...	...	...	≡ mattino; ☾ ENE a sera, NE III; ⌓ SE.S.SW 16h-20h.
0	2 mr	0	7.98	...	...	...	...	Orizzonte bello tutto il giorno.
0.6	3.0	0.0	88.76	...	...	...	...	
4.8	3.0	1.8	231.33	...	inc	25.00	25.00	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nub		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21
1	53.9	53.0	53.6	23.4	28.2	25.3	19.2	29.4	10.8	8.5	9.4	51	30	39	W	15.5	NE	5.5	E	7.0	. . .	. . .	. .
2	54.4	53.0	52.8	25.4	30.6	24.8	18.2	31.3	10.5	7.7	11.2	44	23	48	SW	2.5	N	6.5	E	13.0	WNW	. . .	. .
3	53.3	51.9	51.8	25.2	30.2	26.2	18.8	31.0	13.2	11.2	9.7	56	35	38	W	7.5	SE	5.0	SW	6.0	. . .	W	. .
4	51.9	51.8	55.4	24.4	27.8	21.0	19.4	28.7	14.4	9.7	10.5	63	35	57	NW	8.0	W	23.0	E	15.0	W	. . .	. .
5	59.5	58.3	59.1	23.4	28.6	23.6	16.1	29.5	13.3	9.2	8.6	62	32	40	E	7.0	N	5.5	E	12.0	. . .	W	. .
6	60.4	58.8	57.4	24.0	29.2	23.8	16.2	29.9	12.0	9.1	11.8	54	30	54	NE	4.5	E	6.0	E	12.0	. . .	. . .	. .
7	56.5	54.4	53.1	26.2	31.4	26.0	20.0	31.9	12.6	8.1	10.5	50	24	42	E	5.5	NE	6.5	E	10.5	. . .	W	. .
8	54.9	54.3	55.7	25.0	27.8	19.2	18.7	28.7	11.1	10.3	11.9	47	37	72	NW	8.5	N	6.5	SE	14.0	WSW	W	. .
9	56.5	54.8	54.2	25.4	29.0	25.8	15.9	29.9	13.4	8.6	11.5	56	29	47	W	2.5	NE	5.0	E	11.0	. . .	. . .	. .
10	55.9	53.9	54.0	24.8	28.6	23.6	18.8	29.3	13.1	11.8	14.9	57	40	69	W	5.5	NE	9.0	NE	15.5	. . .	E	. .
I. Decade.	55.7	54.4	54.7	24.7	29.1	23.9	18.1	30.0	12.4	9.4	11.0	54.0	31.5	50.6	. .	6.7	. .	7.9	. .	11.6	. . .	. . .	. .
11	53.0	52.2	53.1	24.8	28.0	23.2	18.4	28.6	13.5	9.6	12.8	58	34	61	W	3.5	W	4.0	NE	11.5	E	W	. .
12	57.4	57.5	57.7	18.0	24.8	20.4	11.1	25.1	9.7	8.7	10.0	64	38	56	SW	7.5	NW	5.5	SE	14.5	. . .	. . .	. .
13	56.8	53.4	52.1	22.0	26.8	22.6	15.6	27.3	10.2	7.9	9.0	52	30	44	S	2.0	N	5.0	NW	9.5	W	. . .	. .
14	51.8	52.6	53.9	23.8	26.2	20.6	17.1	26.5	11.2	8.5	9.6	51	34	53	W	7.0	E	13.0	E	15.5	. . .	. . .	. .
15	55.8	54.2	55.0	20.8	27.8	22.0	14.4	28.3	10.9	8.3	12.3	60	30	63	E	3.5	E	15.0	E	13.0	. . .	. . .	. .
16	55.3	53.9	53.5	21.2	27.6	23.8	15.9	28.0	14.7	11.4	14.4	78	42	66	NE	2.5	E	9.5	W	11.5	W	W	. .
17	52.1	51.4	53.6	20.4	26.6	22.6	17.1	27.1	13.9	13.7	11.3	78	53	56	NW	4.5	NW	22.5	N	3.5	W	WSW	W
18	55.8	54.8	54.9	21.2	23.2	18.4	16.2	24.4	8.9	7.4	11.2	48	35	71	N	3.5	N	11.0	S	5.5	W	. . .	. .
19	57.8	57.0	57.2	19.1	23.4	19.4	13.2	24.1	10.1	7.3	8.3	61	34	50	SE	8.0	NE	7.5	SE	13.0	W	. . .	. .
20	57.5	55.2	53.7	20.0	25.2	21.0	13.2	25.7	10.5	6.8	10.8	61	29	58	E	3.0	E	3.5	S	8.0	W	W	. .
II. Decade.	55.3	54.2	54.5	21.1	26.0	21.4	15.2	26.5	11.4	9.0	11.0	61.1	35.9	57.8	. .	4.5	. .	9.7	. .	10.6	. . .	. . .	. .
21	51.7	51.3	54.0	22.8	26.6	20.4	16.2	27.4	11.5	9.5	12.3	56	37	69	NW	10.5	N	4.0	NE	20.5	. . .	. . .	. .
22	57.7	57.0	58.3	20.4	27.2	22.3	16.2	27.8	11.7	11.6	15.0	66	43	75	NE	2.5	N	3.0	E	10.5	. . .	W	. .
23	61.3	60.3	61.3	24.4	28.1	25.0	17.2	29.0	12.7	10.8	12.6	56	38	54	N	3.0	N	4.5	E	4.0	. . .	SW	. .
24	62.1	60.4	60.8	25.6	30.0	26.8	18.7	30.4	12.3	10.9	11.5	50	34	44	W	5.0	N	3.5	NE	3.0	. . .	. . .	. .
25	60.6	58.5	58.0	24.9	31.4	27.0	19.4	32.0	13.0	12.8	15.2	56	37	57	NW	6.5	N	3.0	E	9.5	. . .	. . .	. .
26	59.2	57.8	58.1	26.3	33.6	28.4	21.2	34.3	14.2	14.3	16.4	56	37	57	W	8.5	NE	5.5	E	13.0	. . .	. . .	. .
27	59.2	57.5	57.6	27.4	33.1	28.4	20.7	33.8	12.5	13.9	11.6	46	37	40	NW	7.0	NE	5.5	W	8.0	. . .	. . .	. .
28	58.3	56.2	55.8	27.4	33.2	27.2	19.5	33.9	9.6	7.6	11.6	35	21	43	W	6.5	N	3.0	W	13.0	. . .	. . .	. .
29	56.3	54.2	54.6	27.4	32.2	28.2	21.2	32.9	9.9	9.9	12.4	37	28	43	W	9.0	N	3.0	N	2.5	. . .	. . .	. .
30	57.6	56.9	58.1	25.4	29.5	23.4	20.9	30.0	13.7	11.2	10.8	57	36	51	NE	3.5	E	20.5	E	17.5	. . .	. . .	. .
31	61.0	59.8	60.1	23.0	27.0	21.8	17.1	27.4	12.9	10.1	10.9	62	38	56	E	21.0	NE	15.0	E	12.0	. . .	W	. .
III. Decade.	58.6	57.3	57.9	25.0	30.2	25.4	18.9	30.8	12.2	11.2	12.8	52.5	35.1	53.5	. .	7.6	. .	6.4	. .	10.3	. . .	. . .	. .
Mese	56.6	55.4	55.8	23.7	28.5	23.6	17.5	29.2	12.0	9.9	11.6	55.7	34.2	54.0	. .	6.3	. .	7.9	. .	10.8	. . .	. . .	. .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
0	1 mr	0	6.89	0.56	...	...	0.56	◎° notte. Orizzonte bello pom.
3 r	0	0	7.39	...	...	...	...	≡ mattino.
0	7 mr	0	7.61	...	...	...	...	≡ mattino; ≺ NE III.
3 mr	0	0	7.08	...	...	...	...	⌒ NW 13h - 18h.
0	2 mr	0	6.81	...	...	...	...	
0	0	0	7.15	...	...	...	...	≡ mattino; orizzonte bello pom.
0	6 r	0	8.37	...	...	...	...	≡ mattino.
9 mr	9 m	0	6.22	...	...	2.25	2.25	Gocce 6h40m; ⁞ attorno pom.; ⌒ ENE 16h12m; ⁞ ◎ NNE - SE 18h20m - 18h50m.
0	0	9 m	6.40	...	...	...	...	≡ mattino.
0	6 mr	2 rs	5.74	0.75	...	...	0.75	◎ n e ⌒ NW; ≡ mattino.
1.5	3.1	1.1	69.66	1.31	...	2.25	3.56	
2 r	8 m	0	5.62	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	0	4.62	33.00	...	...	33.00	⁞ ◎² ▲² 3h20m - 4h28m WNW - SE; ◎° 6h - 6h25m; orizzonte chiaro tutto il giorno.
7 rs	10 m	9 mr	5.38	...	...	...	...	≡ mattino.
1 rs	1 r	0	6.48	...	...	...	...	≡ mattino; orizzonte bello III.
0	0	0	5.82	...	...	...	...	∞ orizzonte pom.
9 m	6 mr	2 m	4.50	...	...	...	...	≡ mattino; ⁞ ◎° 15h40m - 15h48m; ≺ NNE 20h15m - 21h30m.
7 mr	8 m	8 m	5.07	inc	...	...	inc	≡ mattino; ◎° 6h40m e 7h40m - 7h55m; ⌒ NW 14h - 17h.
9 m	10 m	8 m	4.77	...	...	1.00	1.00	Gocce II; ◎ 15h35m - 16h25m; ⁞ SW - ENE 15h58m - 16h20m e ⁞ attorno W.N.NE;
5 mr	4 rs	9 r	5.09	...	...	...	...	≡ mattino; orizzonte bello pom. ≺ E.NE sera e III.
8 m	7 mr	10	5.21	...	...	...	...	≡ mattino e ≡° W - SE pom.; ⁞ in vista W - SW II.
4.8	5.4	4.6	52.56	33.00	...	1.00	34.00	
0	0	0	4.94	...	...	...	...	≡ mattino.
0	6 mr	0	4.60	...	...	...	...	⌒ E.NE 18h - 21h.
0	7 r	0	5.33	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	0	5.99	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	6.53	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	6.67	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	7.77	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.
0	0	0	9.06	...	...	...	...	≡ mattino.
0	0	0	6.85	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.; ≺ NE 20h30m e 21h30m.
0	0	0	7.73	...	...	...	...	≡ mattino; ∞ orizzonte pom.; ⌒ E.SE 15h - 18h.
0	8 r	0	7.01	...	...	...	...	≡ n e mattino; ⌒ E.SE 8h - 11h.
0.0	1.9	0.0	72.48	...	...	...	...	
2.0	3.4	1.8	194.70	34.31	...	3.25	37.56	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri			Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h	15h	21h
1	60.4	58.3	58.9	24.0	29.5	25.6	17.1	30.3	11.0	10.9	13.3	50	35	55	S 2.0	W 3.5	N 6.5	W	WNW	...
2	58.3	56.6	56.2	26.2	30.0	27.0	20.2	30.8	13.6	12.3	13.1	54	39	49	W 9.0	NE 4.5	NE 3.5	...	...	...
3	55.7	53.2	52.3	25.2	30.4	26.0	19.5	30.9	12.9	11.7	13.4	54	36	53	W 2.5	NE 10.5	NW 6.0	...	...	...
4	50.8	49.9	52.3	28.6	29.8	25.0	21.1	31.0	13.5	7.3	7.8	46	23	33	SW 8.0	SW 40.0	W 12.5	...	...	...
5	53.6	52.7	53.3	22.0	28.6	23.6	15.6	29.4	12.6	9.2	8.3	64	32	38	E 2.5	SE 6.0	SW 10.0	...	W	...
6	53.5	51.5	51.3	20.8	20.6	20.4	16.2	22.1	10.0	15.4	11.2	55	85	63	E 4.5	NE 6.5	SW 11.5	W	W	...
7	53.5	53.6	57.5	19.4	22.6	15.8	14.7	23.2	9.5	7.2	7.6	56	35	57	W 12.5	SW 15.5	SE 8.5	...	W	...
8	60.2	56.9	54.7	16.0	23.6	19.6	9.2	23.8	8.0	6.3	6.8	59	29	41	N 0.5	NE 8.5	NW 4.0	...	W	...
9	50.8	49.8	51.1	20.0	17.6	17.2	13.9	23.9	8.6	10.3	9.2	49	69	63	SE 1.5	NW 21.0	SE 15.5	W	W	...
10	56.2	56.4	58.5	15.0	19.6	16.4	11.1	21.9	8.9	5.3	6.5	70	31	47	NE 0.5	E 14.0	E 8.5	ENE	...	...
I. Decade.	55.3	53.9	54.6	21.7	25.2	21.7	15.9	26.7	10.9	9.6	9.7	55.7	41.4	49.9	.. 4.4	.. 13.0	.. 8.7	...	...	...
11	62.5	62.5	64.1	16.5	19.0	16.4	12.7	19.9	8.2	7.5	8.8	59	46	64	N 1.5	E 13.5	E 6.0	...	...	...
12	64.4	61.4	60.6	17.0	22.4	19.2	12.0	22.8	8.4	7.0	8.2	59	35	50	W 0.5	NE 4.0	E 9.0	WNW	NW	...
13	58.1	54.9	54.8	16.4	24.0	20.0	13.1	24.4	8.6	8.7	14.1	62	39	81	W 2.5	E 8.5	E 5.5	...	...	...
14	55.9	53.6	55.1	17.2	25.1	19.8	13.6	25.4	12.5	7.7	12.1	86	32	71	SE 2.0	N 7.0	E 15.5	...	...	...
15	59.1	59.1	60.4	16.8	21.6	16.8	14.1	21.8	9.4	8.4	7.8	66	44	55	NE 12.0	E 17.0	E 11.5	...	S	WNW
16	61.4	59.9	60.0	15.4	20.2	17.7	12.7	20.4	8.5	7.4	8.8	65	42	59	E 1.0	E 11.0	E 5.5	W	S	...
17	59.6	58.5	58.8	14.4	14.8	14.6	12.5	15.5	10.3	11.4	10.7	84	91	87	W 10.0	W 15.5	N 6.5	...	...	...
18	60.3	60.5	60.1	14.0	16.4	15.8	12.2	16.8	11.4	11.6	11.7	95	83	87	W 8.0	W 8.5	W 9.0	...	...	...
19	59.7	58.3	58.2	16.8	20.6	17.2	12.2	20.9	11.6	9.6	10.8	81	53	74	W 1.5	N 1.0	W 3.5	NNE	...	...
20	59.0	57.6	58.0	18.2	23.2	18.4	12.6	23.5	10.7	10.6	11.8	69	50	75	W 4.5	NW 5.0	SE 9.0	...	...	...
II. Decade.	60.0	58.6	59.0	16.3	20.7	17.6	12.8	21.1	10.0	9.0	10.5	72.6	51.5	70.3	.. 4.4	.. 9.1	.. 8.1	...	...	...
21	58.6	56.6	56.6	19.2	25.0	20.6	13.7	25.3	10.4	10.1	11.9	63	43	66	S 0.5	E 8.5	E 5.5	...	...	...
22	55.5	53.6	53.0	19.8	22.9	19.2	14.6	23.4	9.8	10.8	14.0	57	52	85	W 5.0	W 3.0	W 7.0	...	...	...
23	52.5	51.1	51.9	15.8	22.6	19.0	14.7	22.9	12.2	11.5	13.8	91	56	85	NW 10.0	N 5.5	NE 11.5	...	...	...
24	54.8	54.2	55.3	15.8	22.8	19.5	13.2	22.9	13.1	13.4	13.8	98	65	82	N 4.0	N 3.5	N 9.0	...	W	...
25	56.3	55.5	55.4	20.8	25.8	21.2	14.2	25.9	11.5	10.6	12.5	63	43	67	W 3.5	NE 7.5	SW 6.0	...	W	...
26	54.6	53.0	54.1	21.4	26.2	21.0	17.2	26.4	12.0	11.8	9.6	64	46	52	W 8.0	N 11.0	W 14.0	SE	SW	...
27	56.0	54.6	56.2	17.6	24.8	20.0	15.1	25.4	12.3	9.7	12.3	82	42	71	W 2.5	NW 3.5	W 9.5	W	WNW	...
28	55.7	53.6	53.3	19.4	24.6	20.2	14.7	25.2	11.2	11.0	8.7	67	48	49	NW 4.5	N 5.5	S 12.5	...	W	...
29	55.1	53.8	53.3	12.2	13.0	12.8	11.1	18.2	10.1	9.9	8.2	95	88	75	NE 12.0	E 4.0	NE 14.0	...	...	...
30	50.8	50.3	50.8	8.8	8.4	10.0	7.3	11.3	8.0	7.6	6.8	94	92	74	N 17.0	N 19.5	NE 27.5	...	...	...
31	..	..	..	...	...	...	...	...	..	..	..	..	..	..	.. ...	.. ..	..	...	...	...
III. Decade.	55.0	53.6	54.0	17.1	21.6	18.4	13.6	22.7	11.1	10.6	11.2	77.4	57.5	70.6	.. 6.7	.. 7.2	.. 11.7	...	...	...
Mese	56.8	55.4	55.9	18.4	22.5	19.2	14.1	23.5	10.6	9.7	10.5	68.6	50.1	63.6	.. 5.1	.. 9.8	.. 9.5	...	...	...

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
4 r	8 r	4 r	6.05	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
2 r	0	2 r	6.39	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
2 r	9 m	9 m	6.78	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² n e mattino; ≡° pom.
1 r	0	0	10.38	. . .	. . .	. . .	. . .	≺ E all'orizzonte a 22h; ⌓ W. SW 10h - 19h.
0	7 m	0	7.13	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; orizzonte bello pom.; ≺ NE III.
10 m	10 m	0	4.14	. . .	1.00	. . .	1.00	≡ mattino. Gocce 9h10m; ◎° 11h20m - 13h40m; ≺ NE e SSE 19h25m e III.
1 m	6 m	0	5.50	. . .	. . .	. . .	. . .	Orizzonte bello mattino; ⌓ NW 16h - 17h.
0	8 mr	10	4.99	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
3 r	10 m	9 r	4.21	. . .	0.75	0.38	1.13	≡ matt.; ◎ 13h55m - 15h12m e 17h25m - 17h40m; a sera ⊽; ⌓ E. NE 21h - mezzanotte.
5 mr	1 r	10 m	4.52	. . .	. . .	. . .	. . .	⊽ III.
2.8	5.9	4.4	60.09	. . .	1.75	0.38	2.13	
2 r	10	9 mr	3.89	. . .	. . .	0.13	0.13	≡ n e mattino; ☾ in vista WSW e E II; ◎ 15h12m - 16h25m.
1 r	8 mr	8 m	4.48	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² n e mattino; ≡° I.
10	0	0	3.37	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² n e mattino; ≡° I.
0	1 r	3 mr	4.85	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa n e mattino; ⌓ N. NE. E 16h - 19h.
10 m	5 mr	7 m	5.25	1.00	. . .	. . .	1.00	◎° n; ≡ mattino.
10 m	9 m	10 m	3.97	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; gocce 10h25m; ◎ 21h14m - 23h15m.
10 m	10	10	1.19	1.60	3.60	20.90	26.10	≡ pom.; ◎ 12h - mezzanotte.
10	10	10 m	1.30	7.33	0.40	. . .	7.73	◎ mezzanotte - 6h e 7h - 12h10m; ≡ durante il giorno.
7 mr	0	0	2.47	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	0	0	3.07	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
6.0	5.3	5.7	33.84	9.93	4.00	21.03	34.96	
0	0	0	3.77	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
9 r	9 mr	10	2.91	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; gocce 18h25m e 19h55m; ≺ N 20h.
10	1 rs	0	2.17	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino; ≡² bassa I.
10	9 m	0	2.18	. . .	. . .	. . .	. . .	≡² bassa n e mattino.
1 r	8 r	9 m	4.38	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino.
10 m	4 r	1 r	4.35	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° mattino; a sera e 21h30m ≺ E e NE; ⌓ W. SW 15h - 19h.
9 r	9 m	0	3.45	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino.
0	6 r	0	3.84	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° mattino; ≺ ENE III.
10	10	10	1.65	0.30	6.15	inc	6.45	≡ pom.; ◎ 8h40m - 11h35m e 15h15m - 16h45m; gocce 20h25m - 20h30m e ◎ 23h - mezzanotte.
10	10	10	1.34	20.80	11.19	11.75	43.74	≡ n e tutto il giorno; ◎ mezzanotte - 19h e 21h - mezzanotte. Cielo oscuro III; [⌓ N. NE 11h - 22h.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
6.9	6.6	4.0	30.04	21.10	17.34	11.75	50.19	
5.2	5.9	4.7	123.97	31.03	23.09	33.16	87.28	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nu		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	2
1	50.0	52.7	55.6	10.0	12.4	12.0	7.7	13.2	8.5	9.7	9.7	92	90	93	NE	18.0	S	5.0	NE	2.5	ENE	E	.
2	58.6	58.3	58.3	12.2	14.2	13.0	9.7	14.8	9.8	10.4	10.6	93	87	95	W	4.0	E	14.0	W	5.5	. . .	. . .	.
3	55.4	52.7	51.9	13.2	17.2	14.4	11.3	17.6	10.8	10.5	10.6	95	72	87	NW	7.5	W	12.0	W	12.0	. . .	E	.
4	48.9	47.9	49.0	15.6	19.4	14.0	9.6	19.5	9.9	9.8	10.0	75	58	84	SW	2.0	NE	12.5	W	14.5	. . .	S	.
5	51.3	51.6	53.0	15.6	16.6	14.0	10.7	17.9	9.6	9.5	9.8	73	68	82	SW	2.5	SE	11.5	NW	5.0	W	. . .	.
6	54.4	54.1	55.6	13.8	18.6	14.4	8.7	18.9	8.9	8.6	10.3	75	54	84	SW	3.0	SE	5.0	E	2.0	. . .	. . .	.
7	58.4	57.8	58.9	14.0	18.8	15.8	9.4	19.3	8.7	9.8	10.5	73	61	79	SW	2.5	NE	5.0	NE	4.0	. . .	W	.
8	60.3	59.3	60.1	14.1	19.4	15.6	10.7	19.4	9.2	9.4	10.4	77	56	79	NW	4.5	E	6.5	E	6.0	E	W	.
9	61.4	59.9	60.3	13.8	18.6	15.4	9.7	18.9	9.9	9.9	10.8	84	62	83	NW	3.5	NE	3.0	NE	5.5	NNW	W	.
10	61.4	60.6	61.3	16.0	19.4	15.4	10.6	19.5	9.9	9.2	10.5	73	55	81	W	4.5	SE	4.5	SE	4.5	E	E	.
I. Decade.	56.0	55.5	56.4	13.8	17.5	14.4	9.8	17.9	9.5	9.7	10.3	81.0	66.3	84.7	. .	5.2	. .	7.9	. .	6.2	. . .	. . .	. .
11	61.3	60.0	60.1	13.0	19.2	15.6	11.2	19.9	10.6	9.3	10.4	95	56	79	W	8.0	S	4.0	E	6.5	. . .	W	. .
12	60.6	59.6	60.3	14.0	16.6	13.4	11.0	17.3	10.2	7.4	9.6	85	53	84	E	8.0	E	24.5	E	5.0	E	W	. .
13	60.2	57.9	57.4	13.8	17.2	13.6	8.2	17.9	8.8	7.3	8.5	75	50	73	SW	1.5	E	4.0	SW	9.0	. . .	N	. .
14	54.5	52.2	50.8	13.0	17.6	14.4	8.3	18.4	6.8	7.9	8.8	60	52	72	SW	3.0	N	4.5	NE	6.0	. . .	NNW	. .
15	45.8	46.5	49.1	11.0	15.0	14.0	8.8	15.8	9.3	10.8	5.1	95	85	43	W	5.5	W	10.0	N	11.5	. . .	W	. .
16	53.1	52.9	54.2	9.6	14.6	10.4	7.0	14.6	8.0	6.4	7.3	89	52	77	NW	7.0	E	5.5	E	11.5	. . .	. . .	. .
17	56.0	55.1	55.9	10.6	15.0	12.6	5.7	15.3	6.9	7.4	8.0	72	58	73	W	5.0	E	3.5	E	2.5	. . .	W	. .
18	55.5	52.6	48.6	11.8	11.8	10.2	9.7	12.9	8.8	8.1	8.8	85	78	95	NW	3.0	NE	6.5	NW	8.5	. . .	. . .	. .
19	49.0	50.0	50.5	12.4	15.0	13.4	8.6	15.5	8.1	9.2	10.7	75	72	93	W	14.5	SW	6.0	E	10.5	. . .	SW	. .
20	48.3	48.7	51.6	14.0	22.6	20.6	12.1	23.6	11.4	9.8	8.5	95	48	47	E	9.5	SW	22.0	NE	7.5	. . .	W	. .
II. Decade.	54.4	53.6	53.9	12.3	16.5	13.8	9.1	17.1	8.9	8.4	8.6	82.6	60.4	73.6	. .	6.5	. .	9.1	. .	7.9	. . .	. . .	. .
21	54.1	54.4	55.8	19.6	16.8	14.0	12.7	20.4	9.1	13.1	11.4	53	92	95	N	7.0	SE	11.0	SW	7.0	WSW	. . .	. .
22	58.8	58.6	59.6	16.4	20.0	14.4	10.0	20.4	10.4	8.0	7.2	75	46	59	W	5.5	E	7.5	E	10.0	W	. . .	. .
23	60.6	59.6	60.4	15.6	18.8	15.4	9.9	19.4	8.3	9.2	10.5	63	57	81	SW	3.5	NW	5.0	NW	4.0	W	W	. .
24	59.2	56.5	53.9	13.2	17.6	14.6	10.6	17.6	9.7	11.4	11.8	86	76	96	SE	2.0	NE	6.5	E	11.5	WSW	E	. .
25	50.0	46.8	45.2	14.2	16.1	14.8	12.7	16.3	11.5	11.6	11.7	95	85	93	W	7.5	E	6.0	NE	4.5	W	NW	. .
26	49.5	50.0	51.2	15.2	20.6	15.8	11.8	20.6	10.6	11.0	11.4	83	61	85	W	15.5	NW	3.0	E	9.0	. . .	. . .	. .
27	50.5	49.5	51.4	12.6	21.0	15.4	10.2	21.9	10.6	9.4	12.2	98	51	93	E	9.0	W	14.0	NW	14.5	. . .	. . .	. .
28	54.1	54.2	55.3	13.2	17.6	15.6	10.7	17.8	10.8	11.4	9.9	95	76	75	NW	10.5	N	4.5	SW	7.0	. . .	W	. .
29	57.6	58.1	59.7	15.0	16.4	14.0	12.2	16.4	9.9	11.0	11.4	78	79	95	E	9.0	NW	5.5	NW	6.5	W	. . .	. .
30	60.6	59.1	59.0	13.2	16.8	14.0	10.9	16.8	10.5	11.3	11.4	93	79	95	NW	6.0	NW	3.5	NW	3.0	. . .	W	. .
31	59.0	57.5	59.8	11.8	17.6	13.4	8.1	17.9	9.1	10.0	10.4	88	67	91	NW	4.0	NW	4.0	NE	4.0	. . .	. . .	. .
III. Decade.	55.8	55.0	55.6	14.6	18.1	14.7	10.9	18.7	10.1	10.7	10.9	82.5	69.9	87.1	. .	7.2	. .	6.4	. .	7.4	. . .	. . .	. .
Mese	55.4	54.7	55.3	13.6	17.4	14.3	10.0	17.9	9.5	9.6	9.9	82.0	65.7	82.0	. .	6.3	. .	7.7	. .	7.1	. . .	. . .	. .

Digitized by Google

OTTOBRE

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	ANNOTAZIONI
10 m	10 m	10	0.85	34.05	4.25	10.98	49.28	mezzanotte - 8h e 13h50m-20h45m; ° 11h40m-11h55m; E 20h55m; N.NW 2h-7h.
10	10	10	0.71	. . .	0.24	7.29	7.53	° mattino; 9h15m - 9h25 , 13h50m - 15h10m e 17h - mezzanotte.
10	5 r	4 r	2.14	9.78	. . .	. . .	9.78	mezzanotte - 9h; n e mattino.
0	6 r	7 r	2.21	. . .	. . .	. . .	. . .	mattino; orizzonte bello pom.; NW 19h, WSW III.
5 r	10	0	2.41	. . .	. . .	inc	inc	² mattino; attorno pom.; ° 15h50m - 16h10m.
0	2 r	0	2.10	. . .	. . .	. . .	. . .	mattino; in vista S - E 12h; III.
0	4 r	0	1.64	. . .	. . .	. . .	. . .	mattino.
8 m	2 mr	9 mr	1.88	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
1 r	1 mr	8 rs	1.44	. . .	. . .	. . .	. . .	bassa n; ° mattino; , 18h45m e III.
6 r	1 r	1 s	1.91	. . .	. . .	. . .	. . .	mattino.
5.0	5.1	4.9	17.29	43.83	4.49	18.27	66.59	
10	1 r	8 r	1.50	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
9 mr	9 mr	0	1.92	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino; in vista SSW - WNW - E II; gocce 18h55m - 19h20m; E 13h-16h.
0	5 mr	9 r	2.09	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
4 rs	9 mr	1 mr	2.02	. . .	. . .	. . .	. . .	mattino.
10	9 mr	10 m	1.59	0.60	. . .	. . .	0.60	bassa n e mattino; ° mezzanotte - 1h.
10	0	0	1.71	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
0	9 mr	10	1.60	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
10	10	10	0.88	. . .	. . .	7.00	7.00	n e matt.; gocce 11h45m; ° 16h50m-17h50m; 18h30m-22h25m; NW 20h50m-21h35m.
0	10 m	10 m	1.13	2.39	. . .	. . .	2.39	° mattino; gocce 20h35m - 20h45m.
10	7 r	2 m	3.54	. . .	. . .	. . .	. . .	² n e mattino; orizzonte bello pom.; SW 19h10m; SW 15h - 17h.
6.3	6.9	6.0	17.98	2.99	. . .	7.00	9.99	
10 ms	10	1	1.33	. . .	0.70	. . .	0.70	Gocce 10h40m; ° 12h25m - 12h55m; 14h10m - 15h10m; ² bassa III.
7 r	4 r	0	2.98	. . .	. . .	. . .	. . .	n e mattino.
6 r	6 r	0	1.90	. . .	. . .	. . .	. . .	° mattino; ² I.
0 mr	8 mr	10	1.60	. . .	. . .	inc	inc	n e mattino; gocce 9h20m; ° II; ° 19h35m - 20h45m.
0 mr	10 m	1 r	0.79	. . .	inc	. . .	inc	² n e mattino; gocce 10h40m; ° 12h50m - 14h20m; II.
0	0	0	1.63	. . .	. . .	. . .	. . .	° mattino.
0	0	0	1.11	0.10*	. . .	. . .	0.10*	bassa, piovosa n e mattino.
0	7 r	1 r	1.55	0.05*	. . .	. . .	0.05*	bassa, piovosa n e mattino.
9 mr	0	1	0.96	0.60	. . .	. . .	0.60	3h - 5h; ° 6h - 8h; in vista SE 8h; ° I.
0	8 mr	0	0.79	. . .	. . .	. . .	. . .	bassa n e mattino; pom.
0	0	0	1.02	. . .	. . .	. . .	. . .	² n e mattino.
7.5	4.8	1.3	15.66	0.75	0.70	inc	1.45	
6.3	5.6	4.0	50.93	47.57	5.19	25.27	78.03	

Digitized by Google

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	64.7	65.2	66.9	11.0	14.6	10.6	8.2	14.6	9.3	9.4	7.1	95	76	75	N	3.5	NE	5.0	E	12.5	. . .	. . .	. . .
2	67.9	66.4	65.8	8.6	12.8	8.8	5.2	13.3	7.2	6.5	6.6	86	59	78	W	3.5	E	11.0	E	4.5	. . .	E	. . .
3	63.0	60.6	60.3	8.6	12.6	8.6	4.2	12.8	6.1	5.9	6.5	73	55	78	W	4.5	N	3.0	W	7.0	. . .	. . .	. . .
4	59.6	59.0	60.4	8.0	13.4	10.4	4.6	13.4	6.2	6.9	7.3	78	60	77	W	5.0	W	3.0	S	2.5	. . .	. . .	. . .
5	61.8	60.1	61.1	8.0	14.6	10.0	5.1	14.9	7.1	6.6	6.7	89	54	73	W	15.0	NW	5.5	W	14.0	. . .	. . .	. . .
6	60.1	60.2	60.3	10.2	15.8	10.6	6.1	16.0	5.3	6.1	6.4	58	46	68	SW	10.0	W	2.5	W	9.5	. . .	E	. . .
7	61.8	60.3	59.9	8.4	14.8	9.8	6.2	14.9	6.4	8.2	7.6	78	66	84	W	11.5	N	1.5	W	9.0	E	. . .	. . .
8	58.3	54.3	50.1	9.4	12.0	10.6	5.6	13.2	6.9	8.4	9.3	79	81	97	W	6.5	E	8.5	E	8.5	. . .	. . .	. . .
9	49.2	50.0	52.0	9.0	11.4	9.2	7.8	11.7	7.9	7.6	6.6	92	76	76	W	12.0	E	5.0	W	14.5	. . .	ENE	. . .
10	55.9	55.0	55.6	6.2	12.8	7.0	4.1	12.9	5.8	6.3	7.3	82	57	97	NW	8.5	W	2.0	NW	12.5	. . .	N	. . .
I. Decade.	60.2	59.1	59.2	8.7	13.5	9.6	5.7	13.8	6.8	7.2	7.1	81.0	63.0	80.3	. .	8.0	. .	4.7	. .	9.5	. . .	. . .	. . .
11	54.1	52.7	54.3	5.6	9.2	7.2	3.7	9.4	6.4	7.3	7.2	94	84	94	W	6.0	NW	4.5	NW	9.5	. . .	N	. . .
12	56.7	56.7	57.4	5.2	9.2	8.2	3.7	9.4	6.4	7.8	7.9	97	89	97	S	3.0	E	5.5	S	3.5	W	. . .	. . .
13	56.9	56.1	57.0	8.0	11.4	9.8	6.7	11.8	7.8	8.6	8.6	97	85	95	SW	3.5	W	3.0	W	17.0	. . .	WNW	. . .
14	57.7	56.3	57.2	9.4	12.2	11.0	8.1	12.4	8.6	8.8	9.1	97	83	92	W	11.0	W	4.0	W	6.0	. . .	. . .	. . .
15	57.0	55.9	56.8	8.8	9.7	10.2	7.7	11.4	8.4	8.8	9.0	99	99	97	E	7.5	E	6.0	E	4.0	. . .	. . .	. . .
16	58.7	60.0	61.3	11.8	13.2	13.0	9.2	13.3	10.3	10.8	10.9	100	95	98	E	7.5	E	2.5	S	4.0	. . .	. . .	. . .
17	64.1	64.2	64.4	13.0	14.8	13.6	12.3	14.9	11.2	11.1	10.8	100	89	93	E	10.0	S	4.0	SW	4.5	. . .	. . .	. . .
18	64.2	63.1	63.5	13.2	15.4	11.8	10.7	15.9	10.2	9.4	8.8	91	73	85	W	7.5	W	6.5	SW	13.0	WNW	WNW	. . .
19	63.7	63.0	63.6	10.6	12.2	10.2	8.1	12.8	9.3	9.3	9.3	97	88	100	NW	13.5	W	6.0	SW	7.5	. . .	. . .	. . .
20	64.2	63.3	64.8	8.6	10.8	7.8	7.6	10.9	8.1	7.7	7.7	97	80	97	W	7.5	NW	4.0	NW	8.5	. . .	. . .	. . .
II. Decade.	59.7	59.1	60.0	9.4	11.8	10.3	7.8	12.2	8.7	9.0	8.9	96.9	86.5	94.8	. .	7.7	. .	4.6	. .	7.8	. . .	. . .	. . .
21	66.4	64.9	65.1	6.8	10.2	6.0	4.1	10.4	6.1	6.5	6.6	82	70	94	NW	3.0	NW	2.5	NW	7.5	SE	. . .	. . .
22	65.1	63.3	63.8	6.8	6.8	6.2	5.1	7.2	6.1	5.9	5.6	82	79	79	W	8.0	NW	11.0	W	4.5	WNW	. . .	. . .
23	63.2	61.4	61.7	5.4	8.8	4.6	3.8	8.9	5.9	6.0	6.0	88	70	93	W	9.5	W	11.5	NW	15.0	. . .	. . .	. . .
24	57.9	58.4	59.7	4.6	4.8	3.6	2.6	7.3	4.9	6.0	5.5	77	93	93	W	4.0	SE	14.0	NW	14.0	. . .	. . .	. . .
25	58.6	57.4	57.2	3.2	3.0	2.4	0.5	4.1	4.2	5.3	5.3	73	93	96	NW	10.5	N	13.0	NW	9.0	E	. . .	. . .
26	56.5	58.4	61.0	1.8	3.4	2.2	-0.3	4.3	5.0	5.1	5.0	96	86	93	W	11.0	W	5.5	W	9.5	. . .	. . .	. . .
27	63.2	62.5	62.8	3.4	5.4	3.2	0.6	6.1	4.9	5.3	5.0	83	78	86	W	13.5	W	8.0	W	11.5	E	W	. . .
28	62.7	61.6	61.0	2.8	4.2	3.6	0.8	4.5	5.0	5.0	5.3	89	80	90	W	1.0	W	3.0	W	1.0	E	. . .	. . .
29	61.1	60.3	60.1	4.0	5.6	5.4	2.0	5.9	5.9	6.2	6.3	97	91	94	W	5.5	W	10.5	W	10.5	. . .	. . .	. . .
30	56.9	53.6	51.2	5.8	7.2	5.0	4.1	7.9	6.1	6.7	6.3	88	88	97	SW	13.5	W	11.0	N	6.5	W	E	. . .
31	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . . . .					. . .	. . .	. . .
III. Decade.	61.2	60.2	60.7	4.5	5.9	4.2	2.3	6.7	5.4	5.8	5.7	85.5	82.8	91.5	. .	8.0	. .	9.0	. .	8.9	. . .	. . .	. . .
Mese	60.4	59.5	60.0	7.5	10.4	8.0	5.3	10.9	7.0	7.3	7.3	87.8	77.4	88.9	. .	7.9	. .	6.1	. .	8.7	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	Neve in cm.	ANNOTAZIONI
10	0	0	0.99	...	...	...	...	...	≡ bassa n e mattino.
0	9 m	0	1.70	...	...	...	...	...	≡² n e mattino.
0	0	0	0.42	...	...	...	...	...	V ≡ n e mattino.
1 r	1 rs	10	1.17	...	...	...	...	...	V ≡ n e mattino.
0	0	0	1.81	...	...	...	...	...	≡² n e mattino.
0	2 r	0	2.06	...	...	...	...	...	≡° n e mattino.
10 mr	0	0	1.15	...	...	...	...	...	≡ n e mattino. [notte. Terremoto sussultorio a 15h2m.
0	10	10	0.78	...	...	12.19	12.19	...	≡² V° n e matt.; ≡ durante il giorno, bassa III; ● a riprese 14h50m - mezza-
10	10 mr	0	1.11	5.05	...	...	5.05	...	● mezzanotte - 9h15m; ≡ n e mattino; orizzonte bello III; ⌒ W. NW n.
0	1 r	0	0.95	...	...	...	...	...	≡° V n e mattino; ≡ bassa III.
3.1	3.3	2.0	12.14	5.05	...	12.19	17.24	...	
10	9 mr	10	0.52	...	...	...	...	...	≡² n e durante il giorno, bassa I e III.
10 r	10	10	0.37	...	...	...	...	...	≡² bassa n e mattino; ≡ pom.; ≡² III.
10	9 r	10	0.56	...	...	0.41	0.41	...	≡ tutto il giorno, bassa n e mattino; ●° 17h35m - 19h10m.
10	10	10	0.50	1.45	0.19	...	1.64	...	● n e 10h30m - 10h55m; ≡ mattino.
10	10	10	0.10	...	...	0.52*	0.52*	...	≡ bassa, piovosa n e tutto il giorno.
10	10	10	0.14	1.00	0.05	...	1.05	...	≡ bassa, piovosa n e mattino e III; ● n e 14h35m - 14h50m.
10	10	10	0.30	...	...	...	...	...	≡ tutto il giorno, bassa n e mattino.
9 mr	10 mr	0	0.88	...	...	...	...	...	≡ n e mattino.
10	10	0	0.48	...	...	...	...	...	≡ durante il giorno; ≡² bassa III.
10	0	0	0.64	...	...	...	...	...	≡ bassa n e mattino; ≡° pom.
9.9	8.8	7.0	4.49	2.45	0.24	0.93	3.62	...	
7 r	0	1 r	0.91	...	...	...	...	...	≡° n e mattino.
9 mr	10	1 r	1.07	...	...	...	...	...	≡ n e tutto il giorno.
0	0	10	0.94	...	...	...	...	...	≡ n e mattino.
0	10	0	0.84	...	0.80	...	0.80	...	≡ n e tutto il giorno; ∾ 12h50m, indi ● sino 15h20m. [mezzanotte.
0 mr	10	10	0.49	...	2.30*	6.89*	9.19*	inc	≡ durante il giorno; ✳° a riprese 8h5m-10h35m indi ∾ sino 11h55m; ● ✳ 12h20m-
0	10	10	0.55	5.28*	5.79*	1.10*	12.17*	10.5	≡ tutto il giorno; ≡² n e matt.; ✳ mezzanotte - 10h10m; ⌒ W. NW n.
6 r	7 mr	3 r	0.63	0.64*	0.10*	...	0.74*	...	≡ durante il giorno. Terremoto ondulatorio SE - NW 6h10m.
9 mr	10	10	0.49	...	...	...	...	...	≡ tutto il giorno, bassa matt.; ● 20h50m - mezzanotte. Terremoto suss.rio 10h8m.
0	10	10	0.60	4.30	inc	...	4.30	...	≡ tutto il giorno, bassa n e matt.; ● mezzanotte - 4h e ●° 11h45m - 11h55m.
9 r	7 r	0	0.40	...	...	...	...	...	≡° durante il giorno; ≡² bassa III.
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
8.0	7.4	5.5	6.92	10.22	8.99	7.99	27.20	10.5	
7.0	6.5	4.8	23.55	17.72	9.23	21.11	48.06	10.5	

Digitized by Google

DICEMBRE

GIORNO	Press. Barom. a 0° millimetri 700 +			Temperatura Centigrada					Tensione del vapore millimetri			Umidità relativa			Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle nubi		
	9h	15h	21h	9h	15h	21h	min.	mass.	9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h		15h		21h		9h	15h	21h
1	58.9	58.6	60.9	3.0	7.4	4.2	1.2	7.5	5.5	5.1	4.0	97	66	65	W	12.0	N	4.0	NE	11.0	. . .	. . .	. . .
2	63.1	60.5	61.8	2.2	7.0	4.6	0.0	7.3	3.5	3.7	4.1	64	49	65	N	10.5	E	33.0	NE	19.5	. . .	. . .	. . .
3	59.8	58.6	58.1	2.0	1.2	1.6	-0.1	4.9	4.9	4.8	4.8	93	96	93	N	6.5	W	20.5	W	14.5	. . .	. . .	. . .
4	56.3	54.5	55.6	2.0	4.6	2.0	0.1	4.8	4.9	5.1	4.9	93	81	93	W	14.0	W	9.5	W	3.0	. . .	. . .	. . .
5	58.1	58.6	59.8	1.8	3.2	2.8	-0.3	3.4	5.2	5.4	5.6	100	93	100	S	2.0	W	4.0	W	10.5	. . .	. . .	. . .
6	60.5	58.7	58.1	4.1	5.2	5.0	1.7	5.4	5.8	6.0	6.3	95	91	97	W	7.0	NW	7.5	NW	5.0	. . .	. . .	. . .
7	54.2	51.6	51.4	5.2	5.4	5.4	3.7	5.9	6.4	6.3	6.4	97	94	95	W	16.5	W	21.5	W	17.0	. . .	. . .	. . .
8	51.3	50.7	50.8	5.6	7.2	6.4	4.1	7.9	5.8	6.1	6.0	85	80	83	W	10.0	W	12.5	W	10.5	. . .	. . .	. . .
9	52.7	53.4	56.0	5.4	9.6	5.0	4.1	10.1	5.7	5.2	5.1	84	58	78	W	13.5	NE	14.0	NW	9.5	E	E	. . .
10	59.7	59.7	61.8	2.8	7.2	3.4	1.1	10.0	5.0	3.8	4.3	89	50	73	W	11.0	NW	4.0	W	13.5	. . .	. . .	. . .
I. Decade.	57.5	56.5	57.4	3.4	5.8	4.0	1.6	6.7	5.3	5.2	5.2	89.7	75.8	84.2	. .	10.3	. .	13.1	. .	11.4	. . .	. . .	. . .
11	63.8	63.6	64.8	1.6	5.5	2.6	-0.3	6.1	4.2	4.2	4.2	82	62	75	W	5.5	N	4.5	N	8.0	. . .	. . .	. . .
12	64.7	63.5	63.6	1.8	5.0	1.4	-1.5	5.2	4.3	3.9	4.1	82	60	81	W	13.0	NW	9.5	W	7.5	. . .	. . .	. . .
13	65.2	64.8	64.9	0.1	4.4	1.8	-2.3	4.5	3.7	4.1	4.1	80	65	79	W	13.5	W	12.0	W	18.5	. . .	. . .	. . .
14	62.4	60.7	60.1	1.4	7.6	5.0	-0.5	7.8	3.2	3.7	3.9	62	48	60	W	8.5	W	6.0	W	12.5	E	. . .	. . .
15	60.0	57.5	55.9	2.2	4.2	3.0	0.4	5.7	4.2	5.2	4.9	79	84	86	E	10.0	NW	11.5	NW	15.0	W	. . .	N
16	58.2	57.3	57.4	3.0	8.8	4.6	0.1	9.4	4.3	3.2	4.0	76	38	62	W	12.5	W	3.5	W	12.5	. . .	N	. . .
17	54.0	55.3	58.7	3.6	7.6	2.6	0.2	7.7	3.2	4.6	4.8	54	58	86	W	8.0	S	5.0	E	14.0	. . .	N	. . .
18	63.0	61.5	59.8	0.6	4.6	3.0	-1.3	4.6	4.6	4.3	4.3	96	68	76	W	10.0	W	8.0	W	9.0	N	. . .	. . .
19	55.6	51.8	51.2	1.6	2.4	2.0	0.7	3.9	5.0	5.2	5.1	96	95	96	N	4.5	NW	10.0	NW	8.5	. . .	. . .	. . .
20	51.6	51.1	52.5	0.0	2.0	1.6	-1.7	2.0	4.4	4.9	5.0	96	93	96	NW	6.0	W	9.5	NW	14.5	. . .	. . .	. . .
II. Decade.	59.9	58.7	58.9	1.6	5.2	2.8	-0.6	5.7	4.1	4.3	4.4	80.3	67.1	79.7	. .	9.2	. .	8.0	. .	12.0	. . .	. . .	. . .
21	54.7	54.9	57.4	-0.3	-0.2	-1.4	-2.4	0.9	3.4	4.4	4.0	98	96	96	NW	16.5	NW	16.0	W	14.5	. . .	. . .	. . .
22	59.2	56.2	53.4	-3.2	2.3	0.8	-4.8	2.4	3.5	4.2	4.5	98	77	92	NW	5.0	NW	1.0	NW	2.5	. . .	. . .	. . .
23	56.5	58.1	60.7	0.6	4.5	2.0	-1.5	4.9	4.2	4.2	4.4	88	66	82	W	9.0	NW	9.0	W	15.0	. . .	W	. . .
24	64.9	64.4	66.1	1.2	6.2	2.4	-1.3	6.4	3.1	3.8	3.7	62	53	68	W	10.5	NW	5.5	W	12.0	. . .	. . .	. . .
25	67.9	67.9	69.4	0.6	5.4	2.0	-0.8	5.5	2.9	3.8	3.8	60	58	71	NW	15.5	W	9.5	W	16.0	. . .	. . .	. . .
26	69.6	68.0	67.1	1.0	4.6	1.1	-2.0	4.9	3.5	3.9	4.1	72	62	83	W	10.5	W	6.5	W	7.0	E	. . .	. . .
27	63.4	60.9	60.0	-0.6	3.0	0.2	-2.6	3.3	3.7	3.9	4.3	84	69	93	W	3.5	W	0.5	W	3.5	E	E	. . .
28	62.1	62.3	62.6	0.4	3.8	0.6	-0.9	4.5	4.6	4.6	4.6	96	76	96	S	11.0	NW	8.5	W	13.5	. . .	W	. . .
29	57.7	51.1	45.6	-0.8	3.3	0.2	-3.3	3.5	3.0	3.8	4.2	69	65	89	SW	6.0	E	6.5	NE	12.5	. . .	. . .	. . .
30	41.0	37.8	37.1	0.2	1.3	-0.8	-1.9	1.4	4.3	4.2	4.2	93	83	96	W	11.0	NW	2.5	NE	4.0	. . .	. . .	. . .
31	38.8	39.2	42.1	-1.0	1.9	-1.6	-2.3	2.2	4.1	3.7	3.3	96	69	79	NW	10.0	NW	4.5	W	10.0	E	. . .	. . .
III. Decade.	57.8	56.4	56.5	-0.2	3.3	0.3	-2.2	3.6	3.7	4.1	4.1	83.3	70.4	85.9	. .	9.9	. .	6.4	. .	10.1	. . .	. . .	. . .
Mese	58.4	57.2	57.6	1.6	4.7	2.4	-0.5	5.3	4.3	4.5	4.6	84.4	71.1	83.4	. .	9.8	. .	9.0	. .	11.1	. . .	. . .	. . .

Digitized by Google

Stato del cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	Acqua caduta millimetri 21h-9h	9h-15h	15h-21h	Totale della pioggia mm.	Neve in cm.	ANNOTAZIONI
0	0	0	1.78	0.12*	. . .	. . .	0.12*	. . .	≡° n e mattino.
0	0	10	1.94	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	V n e mattino; ⌒ NE 13h - 16h e 21h - mezzanotte.
10	10	10	0.35	0.70	4.10*	3.62*	8.42*	3.5	≡° tutto il giorno; ◍ ✳ 7h8m - 18h25m; ⌒ NE mezzanotte - 1h, W 14h - 15h.
10	0	0	0.31	2.80*	0.35*	. . .	3.15*	. . .	≡ tutto il giorno; ⌒ W 11h - 12h.
10	10	10	0.10	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa tutto il giorno, ≡° n e mattino.
10	10	10	0.22	0.35*	. . .	0.20*	0.55*	. . .	≡ bassa n e mattino; ≡ bassa piovosa a sera e III.
10	10	10	0.52	1.95	4.19	3.29	9.43	. . .	≡ bassa n e matt.; ◍° n, ◍ 10h18m - 19h15m indi ≡ piovosa sino 20h35m;
10	10	10	1.42	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ tutto il giorno. [⌒ W. NW 11h - 17h.
5 r	4 mr	0	0.89	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino; ⌒ E. NE 13h - 14h.
0	0	0	1.10	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	V ≡ n e mattino.
6.5	5.4	6.0	8.63	5.92	8.64	7.11	21.67	3.5	
0	0	0	1.01	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — n e mattino; ≡° pom.
0	0	0	0.92	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — n, mattino e III.
0	0	0	0.94	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — n e mattino; ≡ II e III. Tramonto rosso; ⌒ W 20h - 21h.
6 r	1 r	10	1.16	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — n e mattino. Tramonto rosso; ≡ bassa a sera.
4 r	10	8 mr	0.96	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e tutto il giorno; ≡° pom.
0	4 r	0	2.53	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° V — n e mattino; ≡° II.
0	2 rs	0	0.99	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ mattino, ≡° ENE - WNW.
8 mr	1 rs	10	0.75	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	V — ≡ bassa n e mattino.
10	10	10	0.31	. . .	. . .	1.10	1.10	. . .	≡ n e durante il giorno; ≡° pom. bassa III. Gocce 10h; ◍° 14h55m - 17h15m.
10	10	10	gelato	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa n e tutto il giorno; ≡° n e mattino.
3.8	3.8	4.8	9.57	. . .	. . .	1.10	1.10	. . .	
10	10	10	gelato	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡° bassa n e tutto il giorno.
10	0	1 r	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ bassa — n e mattino; ≡ pom.; ≡ bassa III.
10	7 r	0	»	. . .	. . .	0.03*	0.03*	inc	◍ △ n e 7h50m - 9h40m; V — n e matt.; ≡ tutto il giorno. Tramonto rosso.
0	0	0	3.70	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — n e mattino; ≡° pom. Tramonto rosso; ≡ III.
0	0	0	1.18	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	V° n e mattino; ≡ tutto il giorno.
2 r	0	0	0.96	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ V — mattino; ≡ III.
9 mr	8 mr	0	1.04	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	V — n e mattino; ≡ tutto il giorno, ≡° n e mattino.
10	4 r	0	gelato	. . .	0.80*	. . .	0.80*	1.5	≡ n e tutto il giorno; ✳° 7h4m - 7h10m e 10h54m; ✳ 7h34m - 10h25m.
0	1 r	10	»	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	≡ n e mattino; V — tutto il giorno.
0	10	10	»	0.29*	. . .	. . .	0.29*	0.5	✳° 2h - 4h; ≡° n e mattino; — tutto il giorno; ≡ pom.; ≡° bassa III.
8 r	0	0	»	1.43*	. . .	. . .	1.43*	3.5	≡° matt.; — tutto il giorno; △ dopo le 2h; ✳ 2h45m - 3h30m. Tramonto rosso.
5.4	3.6	2.8	6.88	1.72	0.80	0.03	2.55	5.5	
5.2	4.3	4.5	25.08	7.64	9.44	8.24	25.32	9.0	

Digitized by Google

PIOGGIA

1894	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
1	....	....	....	....	9.63	4.30	....	0.56	....	49.28	....	0.12*
2	....	0.13	....	....	0.25	....	....	....	....	7.53	....	....
3	....	....	....	....	1.07	....	....	....	....	9.78	....	8.42*
4	....	....	....	....	4.38	....	11.15	....	....	....	....	3.15*
5	....	....	20.00	....	....	....	inc	....	....	inc	....	....
6	....	....	....	....	....	....	....	....	1.00	....	....	0.55*
7	....	....	inc	....	9.00	....	1.05	....	....	....	....	9.13
8	inc	....	....	....	....	inc	7.60	2.25	....	....	12.19	....
9	....	....	....	....	....	0.40	4.30	....	1.13	....	5.05	....
10	....	....	....	....	....	....	....	0.75	....	....	....	....
Decade I	inc	**0.13**	**20.00**	....	**24.33**	**4.70**	**24.10**	**3.56**	**2.13**	**66.59**	**17.24**	**21.67**
11	....	....	....	....	6.35	0.45	inc	....	0.13	....	....	....
12	....	....	....	....	....	9.06	....	33.00	....	....	....	....
13	....	....	....	....	15.24	....	....	....	....	....	0.41	....
14	....	....	5.50	....	....	1.20	inc	....	....	....	1.64	....
15	....	....	0.57	....	....	....	....	....	1.00	0.60	0.52*	....
16	....	....	....	2.13	....	....	....	....	....	....	1.05	....
17	....	....	....	2.13	....	....	....	inc	26.10	....	....	....
18	....	....	....	3.44	....	....	....	1.00	7.73	7.00	....	....
19	....	....	....	14.50	inc	0.36	0.90	....	....	2.39	....	1.10
20	inc	....	....	....	17.80	....	....	....	....	....	....	....
Decade II	inc	....	**6.07**	**22.20**	**39.39**	**11.07**	**0.90**	**34.00**	**34.96**	**9.99**	**3.62**	**1.10**
21	0.63*	....	1.13	53.14	5.32	....	....	....	....	0.70	....	....
22	....	....	....	1.00	13.10	....	....	....	....	....	....	....
23	1.90*	....	....	5.50	1.30	....	....	....	....	....	....	0.03*
24	3.50*	....	....	....	0.10	....	....	....	....	inc	0.80	....
25	0.40	1.00	....	inc	....	....	....	....	....	inc	9.19*	....
26	0.40	....	....	....	1.69	....	....	....	....	....	12.17*	....
27	1.60	....	....	1.25	1.93	....	....	....	....	0.10*	0.74*	....
28	....	....	....	0.94	....	inc	....	....	....	0.05*	....	0.80*
29	6.32	....	....	3.00	....	....	....	....	6.45	0.60	4.30	....
30	0.38	....	....	15.63	0.70	....	....	....	43.74	....	....	0.29*
31	....	....	2.63	....	0.91	....	....	....	....	....	....	1.43*
Decade III	**15.13**	**1.00**	**8.76**	**80.46**	**25.05**	inc	....	....	**50.19**	**1.45**	**27.20**	**2.55**
Mese	**15.13**	**1.13**	**29.83**	**102.66**	**88.77**	**15.77**	**25.00**	**37.56**	**87.28**	**78.03**	**48.06**	**25.82**
Diff. colla norm.	— 26.43	— 46.58	— 22.58	+ 39.43	+ 16.15	— 43.19	— 18.77	— 10.32	+ 17.19	— 6.97	— 31.12	— 33.15

Pioggia caduta nell' anno mm. 554.54
Differenza colla normale » — 166.33

NEVE

Gennaio . cm. 68.0 in giorni 6
Novembre » 10.5 » » 2 } Totale cm. 87.5 in giorni 12.
Dicembre » 9.0 » » 4

Digitized by Google

1894	I.ª DECADE				II.ª DECADE				III.ª DECADE				MESE			
	Temperatura centigrada				Temperatura centigrada				Temperatura centigrada				Temperatura centigrada			
	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo
Gennaio .	—2.35	— 7.6	3.9	5 1	— 2.59	—13.4	5.9	14 20	3.13	— 1.2	8.8	24 30	— 0.48	—13.4	8.8	14 30
Febbraio .	5.49	0.1	12.6	5 8	3.50	— 4.4	13.1	20 13	4.13	— 4.0	14.8	22 27	4.39	— 4.4	14.8	20–27
Marzo . . .	8.07	— 0.8	15.9	4 1	9.39	3.2	17.4	16/20 13	8.79	1.7	16.9	27 29	8.75	— 0.8	17.4	4 13
Aprile . . .	13.75	3.1	23.2	3 9	14.88	7.0	23.4	14–15	14.73	9.2	21.6	23 26	14.45	3.1	23.4	3 15
Maggio . .	15.42	8.7	23.5	2–10	17.89	10.4	25.4	13 16	17.22	8.2	25.4	28 25	16.86	8.2	25.4	28–16/25
Giugno . .	21.20	11.3	29.3	10 4	19.13	10.6	27.3	12/13 19	23.51	14.4	31.9	21 26	21.28	10.6	31.9	12/13 26
Luglio . .	25.35	17.2	32.9	1 3	24.54	15.2	31.8	17 14	26.20	16.7	35.9	21 25	25.39	15.2	35.9	17–25
Agosto . .	24.19	15.9	31.9	9 7	21.07	11.1	28.6	12–11	25.03	16.2	34.3	21/22 26	23.48	11.1	34.3	12–26
Settembre	21.49	9.2	31.0	8 4	16.94	12.0	25.4	12 14	17.93	7.3	26.4	30 26	18.79	7.3	31.0	30–4
Ottobre . .	13.99	7.7	19.5	1–4/10	13.08	5.7	23.6	17–20	14.70	8.1	21.9	31 27	13.95	5.7	23.6	17 20
Novembre	9.45	4.1	16.0	10 6	9.93	3.7	15.9	11/12–18	4.42	— 0.3	10.4	26 21	7.93	— 0.3	16.0	26–6
Dicembre.	3.93	— 0.3	10.1	5 9	2.36	— 2.3	9.4	13–16	0.41	— 4.8	6.4	22 24	2.19	— 4.8	10.1	22–9
Anno . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	13.08	—13.4	35.9	14 Genn. 25 Lugl.

	Temperatura media osservata.	Temperatura media normale.	Differenza colla normale.
Inverno	2.03	2.69	— 0.66
Primavera . . .	13.35	13.34	+ 0.01
Estate	23.38	23.77	— 0.39
Autunno	13.56	13.87	— 0.31
Anno	13.08	13.42	— 0.34

Digitized by Google

Digitized by Google

RISULTATI ELIOFANOMETRICI

OTTENUTI

AL R. OSSERVATORIO DI MODENA

per l'anno 1894

Nell'anno 1894 il numero dei giorni nei quali non s'è veduto il Sole è stato di 68 (nel 1893; 69) così ripartiti:

Gennaio	23
Febbraio	2
Marzo	4
Aprile	2
Maggio	2
Giugno	—
Luglio	—
Agosto	—
Settembre	5
Ottobre	8
Novembre	14
Dicembre	8

In gennaio si ebbero due lunghi periodi senza Sole e precisamente

12 giorni dal 2 al 13 inclusivi
10 » » 18 » 27 » .

Indicando con A la durata effettiva dello splendore del Sole e con B il tempo che il Sole sta sopra all'orizzonte; dei giorni nei quali $\frac{A}{B}$ non è stato zero, questo rapporto è stato inferiore a 0,5 in 92 giorni e precisamente in

Digitized by Google

Gennaio	5	Luglio	1
Febbraio	8	Agosto	4
Marzo	8	Settembre	11
Aprile	8	Ottobre	11
Maggio	13	Novembre	11
Giugno	5	Dicembre	7

I massimi mensili di $\frac{A}{B}$ sono stati i seguenti:

Gennaio	0,87	giorno	1	Luglio	0,92	giorni	12; 22; 23
Febbraio	0,93	»	14	Agosto	0,91	»	1; 15
Marzo	0,86	»	8	Settembre	0,80	»	28
Aprile	0,84	»	26	Ottobre	0,79	»	13; 26
Maggio	0,94	»	15	Novembre	0,88	»	10
Giugno	0,90	»	5	Dicembre	0,93	»	13

Il massimo assoluto 0,94 di questo rapporto è stato il 15 maggio (nel 1893 si ebbe pure 0,94 il 25 aprile).

Il Sole nel clima di Modena difficilmente lascia traccia sulla carta dell' eliofanometro nei primi momenti dopo il suo nascere e negli ultimi momenti prima di tramontare.

Il numero dei giorni nei quali il Sole lasciò traccia sulla carta subito dopo il nascere o prima di tramontare, è stato il seguente:

		Nascere	Tramontare
Gennaio	Giorni	3	1
Febbraio	»	4	—
Marzo	»	2	—
Aprile	»	1	1
Maggio	»	2	—
Giugno	»	12	—
Luglio	»	4	—
Agosto	»	6	2
Settembre	»	—	1
Ottobre	»	—	4
Novembre	»	—	6
Dicembre	»	11	14

Questo fatto in parte può dipendere dall' essere l' orizzonte di Modena, al mattino ed alla sera, piuttosto nebbioso, ma dipende anche in buona parte dalla poca sensibilità della carta eliofanometrica.

Digitized by Google

E difatti per renderla più sensibile nel mese di dicembre si e coperta la carta con leggerissimo strato di paraffina; e in quel mese si osserva appunto che il numero dei giorni, nei quali il Sole lasciò traccia subito dopo il nascere e prima di tramontare, è aumentato in confronto degli altri mesi.

Dai valori pentadici di $\frac{A}{B}$ risulta che questo rapporto è stato di zero in due pentadi, la seconda e la quinta (6-10, 21-25 gennaio) e massimo con 0,894 nella 41ª pentade (19-24 luglio).

Dai valori decadici invece risulta che il minimo di $\frac{A}{B}$ è stato 0,039 nella IIª decade di novembre ed il massimo 0,845 nella IIIª di luglio.

Il minimo valore mensile di $\frac{A}{B}$ è 0,130 in gennaio e il massimo 0,788 in luglio.

In tutto l' anno

$$\begin{matrix} A = 2316,1 \\ B = 4470,6 \end{matrix} \qquad \frac{A}{B} = 0,518$$

Invece nel 1893

$$A = 2224,8 \qquad \frac{A}{B} = 0,498.$$

Prof. Ciro Chistoni.

Digitized by Google

RISULTATI ELIOFANOMETRICI per l'anno 1894

A = Durata dello splendore del Sole in ore B = Durata del Sole sull'orizzonte in ore

Giorni	Gennaio			Febbraio			Marzo			Aprile			Maggio			Giugno		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
1	7.8	9.0	0.87	0.4	9.8	0.04	9.2	11.1	0.83	9.1	12.8	0.71	1.2	14.2	0.08	9.8	15.4	0.64
2	—	9.0	0.00	5.3	9.9	0.54	8.8	11.2	0.79	7.1	12.8	0.55	2.7	14.2	0.19	13.4	15.4	0.87
3	—	9.0	0.00	7.5	9.9	0.76	9.1	11.3	0.81	8.0	12.8	0.63	3.2	14.3	0.22	13.1	15.4	0.85
4	—	9.0	0.00	1.7	9.9	0.17	6.6	11.3	0.58	10.5	12.8	0.82	7.6	14.3	0.53	12.7	15.4	0.82
5	—	9.0	0.00	7.9	10.0	0.79	—	11.3	0.00	10.4	12.9	0.81	12.1	14.3	0.85	13.8	15.4	0.90
6	—	9.0	0.00	8.3	10.0	0.83	6.6	11.4	0.58	10.4	13.0	0.80	—	14.4	0.00	13.8	15.6	0.88
7	—	9.0	0.00	4.2	10.0	0.42	3.2	11.4	0.28	7.8	13.0	0.60	1.3	14.4	0.09	8.3	15.6	0.53
8	—	9.1	0.00	8.3	10.1	0.82	9.8	11.4	0.86	10.6	13.1	0.81	9.1	14.5	0.63	10.7	15.6	0.69
9	—	9.1	0.00	6.4	10.1	0.63	9.7	11.5	0.84	10.7	13.1	0.82	12.3	14.5	0.85	7.7	15.6	0.49
10	—	9.1	0.00	5.5	10.2	0.54	8.2	11.5	0.71	10.1	13.2	0.77	10.6	14.6	0.73	12.4	15.6	0.79
11	—	9.1	0.00	4.6	10.2	0.45	7.1	11.7	0.61	10.4	13.2	0.79	3.9	14.6	0.27	11.8	15.6	0.76
12	—	9.1	0.00	4.4	10.3	0.43	4.3	11.7	0.37	9.8	13.3	0.74	6.7	14.6	0.46	0.4	15.6	0.26
13	—	9.2	0.00	6.7	10.3	0.65	6.3	11.7	0.54	10.8	13.3	0.81	—	14.7	0.00	9.2	15.6	0.59
14	4.1	9.2	0.45	9.7	10.4	0.93	—	11.8	0.00	9.9	13.4	0.74	5.2	14.7	0.35	2.7	15.6	0.17
15	7.2	9.2	0.78	9.2	10.4	0.88	3.1	11.9	0.26	6.9	13.4	0.51	13.8	14.7	0.94	12.5	15.6	0.80
16	7.8	9.3	0.84	8.9	10.5	0.85	8.2	11.9	0.69	—	13.5	0.00	13.1	14.8	0.89	13.1	15.6	0.84
17	0.8	9.3	0.09	—	10.5	0.00	9.8	12.0	0.82	1.3	13.5	0.10	13.8	14.8	0.93	2.7	15.6	0.17
18	—	9.3	0.00	—	10.6	0.00	3.9	12.0	0.33	0.8	13.6	0.06	11.3	14.9	0.76	12.3	15.6	0.79
19	—	9.4	0.00	7.3	10.6	0.69	0.2	12.0	0.02	9.9	13.6	0.73	7.8	14.9	0.52	8.9	15.6	0.57
20	—	9.4	0.00	8.6	10.7	0.80	—	12.1	0.00	6.2	13.7	0.45	4.3	14.9	0.29	13.9	15.6	0.89
21	—	9.4	0.00	6.1	10.7	0.57	—	12.1	0.00	—	13.7	0.00	8.8	15.0	0.59	13.6	15.6	0.87
22	—	9.5	0.00	9.6	10.7	0.90	6.5	12.2	0.53	2.0	13.7	0.15	5.4	15.0	0.36	12.9	15.6	0.83
23	—	9.5	0.00	9.1	10.8	0.84	6.3	12.3	0.51	5.1	13.8	0.37	4.9	15.0	0.33	13.4	15.6	0.86
24	—	9.5	0.00	8.5	10.9	0.78	8.4	12.3	0.68	7.7	13.9	0.55	2.3	15.1	0.15	13.4	15.6	0.86
25	—	9.5	0.00	4.5	10.9	0.41	6.4	12.3	0.52	8.0	13.9	0.58	10.0	15.1	0.66	12.9	15.6	0.83
26	—	9.6	0.00	2.4	11.0	0.22	5.8	12.4	0.47	11.8	14.0	0.84	1.2	15.1	0.08	12.1	15.6	0.78
27	—	9.7	0.00	9.3	11.0	0.85	10.3	12.5	0.82	6.3	14.0	0.45	12.6	15.1	0.83	9.8	15.5	0.63
28	1.3	9.7	0.13	2.9	11.0	0.26	10.3	12.5	0.82	3.0	14.1	0.21	12.9	15.1	0.85	5.6	15.5	0.36
29	—	9.7	0.00	. . .	. . .	. . .	9.7	12.6	0.77	8.7	14.1	0.62	10.0	15.2	0.66	10.0	15.5	0.65
30	4.6	9.8	0.47	. . .	. . .	. . .	2.6	12.6	0.21	6.3	14.2	0.44	4.1	15.2	0.27	13.7	15.5	0.88
31	4.0	9.8	0.41	. . .	. . .	. . .	0.2	12.7	0.02	. . .	. . .	. . .	9.4	15.3	0.61	. . .	. . .	. . .
I decade	7.8	90.3	0.086	55.5	99.9	0.556	71.2	113.4	0.628	94.7	129.5	0.731	60.1	143.7	0.418	115.7	155.0	0.746
II »	19.9	92.5	0.215	59.4	104.5	0.568	42.9	118.8	0.361	66.0	134.5	0.491	79.9	147.6	0.541	87.5	156.0	0.561
III »	9.9	105.7	0.094	52.4	87.0	0.602	66.5	136.5	0.487	58.9	139.4	0.423	81.6	166.2	0.491	117.4	155.6	0.755
Mese . .	37.6	288.5	0.130	167.3	291.4	0.574	180.6	368.7	0.490	219.6	403.4	0.544	221.6	457.5	0.484	320.6	466.6	0.687

Digitized by Google

Seguito dei Risultati Eliofanometrici per l'anno 1894.

Giorni	Luglio			Agosto			Settembre			Ottobre			Novembre			Dicembre		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
1	13.6	15.5	0.88	13.3	14.6	0.91	9.4	13.2	0.71	—	11.7	0.00	1.1	10.3	0.11	6.0	9.1	0.66
2	12.9	15.5	0.83	11.2	14.6	0.77	9.2	13.2	0.70	—	11.7	0.00	3.0	10.2	0.29	7.6	9.1	0.84
3	10.7	15.5	0.69	10.5	14.6	0.72	6.8	13.2	0.52	3.2	11.7	0.27	8.5	10.2	0.83	—	9.1	0.00
4	10.3	15.5	0.66	12.7	14.6	0.87	5.5	13.1	0.42	7.4	11.7	0.63	2.5	10.2	0.25	1.4	9.1	0.15
5	11.1	15.5	0.72	12.7	14.5	0.88	9.8	13.1	0.75	3.4	11.6	0.29	7.2	10.1	0.71	—	9.1	0.00
6	13.5	15.5	0.87	11.2	14.4	0.78	—	13.0	0.00	5.6	11.5	0.49	7.8	10.0	0.78	—	9.1	0.00
7	12.4	15.5	0.80	10.8	14.4	0.75	4.6	12.9	0.36	8.2	11.5	0.71	5.1	10.0	0.51	—	9.1	0.00
8	11.4	15.5	0.74	5.7	14.4	0.40	8.9	12.9	0.69	6.1	11.4	0.54	2.7	10.0	0.27	—	9.1	0.00
9	9.6	15.5	0.62	11.6	14.4	0.81	4.7	12.9	0.36	7.5	11.4	0.66	—	9.9	0.00	7.4	9.1	0.81
10	10.6	15.5	0.68	12.6	14.4	0.88	7.0	12.8	0.55	5.5	11.4	0.48	8.7	9.9	0.88	8.2	9.1	0.90
11	9.8	15.3	0.64	8.8	14.2	0.62	1.0	12.7	0.08	4.6	11.2	0.41	—	9.8	0.00	8.1	9.0	0.90
12	14.1	15.3	0.92	10.7	14.2	0.75	7.4	12.7	0.58	—	11.2	0.00	—	9.8	0.00	8.2	9.0	0.91
13	13.4	15.3	0.88	9.7	14.2	0.68	7.1	12.7	0.56	8.8	11.2	0.79	—	9.8	0.00	8.4	9.0	0.93
14	7.3	15.3	0.48	12.7	14.2	0.89	7.1	12.6	0.56	2.2	11.1	0.20	0.4	9.8	0.04	6.8	9.0	0.76
15	13.6	15.3	0.89	12.8	14.1	0.91	3.3	12.6	0.26	—	11.1	0 00	—	9.8	0.00	2.5	9.0	0.28
16	9.9	15.2	0.65	6.7	14.0	0.48	0.8	12.5	0.06	6.3	11.0	0.57	—	9.7	0.00	7.2	9.0	0.80
17	13.9	15.2	0.91	9.4	14.0	0.67	—	12.4	0.00	7.0	10.9	0.64	—	9.7	0.00	8.0	9.0	0.89
18	13.0	15.2	0.86	5.3	13.9	0.38	—	12.4	0.00	—	10.9	0.00	0.6	9.6	0.06	5.7	9.0	0.63
19	9.4	15.2	0.62	10.5	13.9	0.76	6.1	12.4	0.49	5.1	10.9	0.47	—	9.6	0.00	—	9.0	0.00
20	12.4	15.2	0.82	5.7	13.9	0.41	10.0	12.3	0.81	5.7	10.9	0.52	2.8	9.6	0.29	—	9.0	0.00
21	13.5	15.0	0.90	10.5	13.7	0.77	8.2	12.2	0.67	—	10.7	0.00	4.4	9.5	0.46	—	8.9	0.00
22	13.8	15.0	0.92	9.1	13.7	0.66	1.0	12.2	0.08	7.9	10.7	0.74	—	9.5	0.00	4.2	8.9	0.47
23	13.8	15.0	0.92	9.4	13.7	0.69	6.7	12.2	0.55	5.5	10.7	0.51	4.5	9.5	0.47	2.1	8.9	0.24
24	13.7	15.0	0.91	10.7	13.6	0.79	2.4	12.1	0.20	0.4	10.7	0.04	1.9	9.5	0.20	7.9	8.9	0.89
25	13.0	15.0	0.87	10.8	13.6	0.79	7.6	12.1	0.63	—	10.7	0.00	—	9.4	0.00	8.0	8.9	0.90
26	13.2	14.8	0.89	11.0	13.5	0.81	4.9	12.0	0.41	8.3	10.5	0.79	—	9.3	0.00	7.0	9.0	0.78
27	12.4	14.8	0.84	10.9	13.4	0.81	5.7	11.9	0.48	4.0	10.5	0.38	—	9.3	0.00	2.2	9.0	0.24
28	11.8	14.8	0.80	11.2	13.4	0.84	9.5	11.9	0.80	1.1	10.5	0.10	—	9.3	0.00	2.4	9.0	0.27
29	8.9	14.8	0.60	10.8	13.4	0.81	—	11.9	0.00	2.7	10.5	0.26	—	9.2	0.00	8.2	9.0	0.91
30	11.2	14.8	0.76	9.4	13.3	0.71	—	11.8	0.00	—	10.5	0.00	3.7	9.2	0.40	3.1	9.0	0.34
31	12.9	14.6	0.88	9.4	13.2	0.71	. . .	. . .	. . .	8.0	10.3	0.78	. . .	. . .	. . .	5.2	9.0	0.58
I decade	116.1	155.0	0.749	112.3	144.9	0.775	65.9	130.3	0.506	46.9	115.6	0.406	46.6	100.8	0.462	30.6	91.0	0.336
II »	116.8	152.5	0.766	92.3	140.6	0.657	42.8	125.3	0.342	39.7	110.4	0.360	3.8	97.2	0.039	54.9	90.0	0.610
III »	138.2	163.6	0.845	113.2	148.5	0.762	46.0	120.3	0.382	37.9	116.3	0.326	14.5	93.7	0.155	50.3	98.5	0.511
Mese . .	371.1	471.1	0.788	317.8	434.0	0.732	154.7	375.9	0.412	124.5	342.3	0.364	64.9	291.7	0.223	135.8	279.5	0.486

Digitized by Google

Risultati pentadici

Pentadi	4^h-5^h	5^h-6^h	6^h-7^h	7^h-8^h	8^h-9^h	9^h-10^h	10^h-11^h	11^h-12^h	12^h-13^h	13^h-14^h	14^h-15^h	15^h-16^h	16^h-17^h	17^h-18^h	18^h-19^h	19^h-20^h	A	B	$\frac{A}{B}$
1	. .	. .	. .	0.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.7	—	. . .	. . .	. . .	7.8	45.0	0.173
2	. .	. .	. .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	. . .	. . .	. . .	—	45.3	0.000
3	. .	. .	. .	0.2	1.0	1.0	1.0	1.3	2.0	1.7	1.7	1.3	0.1	. . .	. . .	. . .	11.3	45.8	0.247
4	. .	. .	. .	0.1	1.0	1.3	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.7	—	. . .	. . .	. . .	8.6	46.7	0.184
5	. .	. .	. .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	. . .	. . .	. . .	—	47.4	0.000
6	. .	. .	. .	—	0.4	1.0	1.0	0.9	0.6	1.0	1.0	—	—	. . .	. . .	. . .	5.9	48.5	0.122
7	. .	. .	. .	0.4	1.1	2.2	2.2	2.4	3.0	3.1	3.1	1.4	—	—	. . .	. . .	18.9	49.3	0.383
8	. .	. .	. .	0.1	2.8	3.6	4.4	4.9	4.4	4.3	4.9	4.6	1.1	—	. . .	. . .	35.1	50.2	0.699
9	. .	. .	. .	0.8	1.9	2.4	2.8	4.7	5.0	4.3	4.2	3.4	1.4	—	. . .	. . .	30.9	51.4	0.601
10	. .	. .	—	1.1	2.3	3.0	2.8	3.0	2.9	2.9	3.0	3.0	1.4	—	. . .	. . .	25.4	52.6	0.483
11	. .	. .	—	2.7	4.5	4.6	4.8	5.0	4.9	4.3	5.0	4.4	1.7	—	. . .	. . .	41.9	53.8	0.779
12	. .	. .	—	1.1	2.1	2.1	2.0	2.1	3.4	4.2	4.7	4.4	2.2	—	. . .	. . .	28.3	55.0	0.515
13	. .	. .	—	1.7	3.8	3.7	3.8	3.8	3.7	3.0	3.1	2.6	1.9	—	. . .	. . .	31.1	56.5	0.550
14	. .	. .	0.1	1.9	3.0	4.0	4.3	4.0	4.0	4.3	4.5	4.5	3.4	—	. . .	. .	38.0	57.5	0.661
15	. .	. .	—	—	1.0	1.7	2.5	3.3	3.5	2.8	3.5	2.3	1.3	—	—	. . .	21.9	59.0	0.371
16	. .	. .	—	0.9	1.1	1.9	2.1	2.0	1.4	1.3	1.1	1.2	0.8	—	—	. . .	13.9	60.2	0.231
17	. .	. .	—	0.8	0.5	1.9	3.2	4.3	4.8	4.5	4.8	4.5	3.9	0.2	—	. . .	33.4	61.5	0.543
18	. .	—	—	2.7	3.0	3.0	3.1	3.0	3.6	3.8	4.1	3.2	2.9	0.7	—	. . .	33.1	62.9	0.526
19	. .	—	0.3	3.3	3.7	4.5	5.0	5.0	5.0	5.0	4.8	4.1	3.1	1.3	—	. . .	45.1	64.1	0.703
20	. .	—	0.5	3.7	4.2	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.6	1.6	—	. . .	49.6	65.4	0.758
21	. .	—	0.4	3.8	4.2	4.2	5.0	5.0	5.0	5.0	4.9	4.7	4.2	1.4	—	. . .	47.8	66.6	0.718
22	. .	—	0.8	1.2	1.5	1.0	0.7	1.4	2.2	2.6	1.8	1.7	2.0	1.3	—	. . .	18.2	67.9	0.268
23	. .	—	0.2	0.9	1.0	1.4	1.9	2.6	3.8	3.0	2.0	1.8	1.6	2.1	0.5	. . .	22.8	69.0	0.330
24	. .	0.3	2.9	2.9	4.0	3.0	3.3	3.7	3.7	3.4	3.0	1.6	2.4	1.5	0.4	—	36.1	70.4	0.513
25	—	0.3	1.0	1.2	2.2	2.3	2.4	3.8	2.9	2.8	2.5	1.4	1.3	2.2	0.5	—	26.8	71.3	0.376
26	—	0.8	2.0	2.5	3.1	2.6	3.2	2.9	2.5	2.3	2.7	2.9	2.4	2.2	1.2	—	33.3	72.4	0.467
27	—	1.0	1.7	1.7	1.6	2.0	1.9	2.5	2.9	2.9	3.4	2.0	2.0	2.0	2.0	—	29.6	73.3	0.404
28	—	1.9	2.9	2.5	3.3	4.5	5.0	4.9	4.5	4.0	4.0	3.6	3.0	3.8	2.4	—	50.3	74.3	0.677
29	—	1.3	2.5	3.4	3.4	3.6	2.5	2.5	3.5	1.6	1.9	2.1	0.9	1.1	1.1	—	31.4	75.2	0.418
30	0.4	2.0	2.7	2.9	3.0	2.1	2.4	2.8	2.3	2.6	2.8	4.4	4.4	3.5	2.5	—	40.8	75.7	0.539
31	0.3	3.8	5.0	5.0	4.9	5.0	4.9	4.8	4.1	3.7	3.7	3.5	3.9	3.5	2.3	—	58.4	76.9	0.759
32	0.2	2.0	2.5	3.1	3.7	3.7	4.6	3.8	3.9	4.6	4.6	4.1	5.0	5.0	3.5	—	54.3	77.8	0.698
33	0.5	3.0	3.0	3.0	3.6	3.0	3.2	3.0	3.2	2.8	2.0	2.3	1.7	1.5	0.7	—	36.5	78.0	0.468
34	0.1	2.3	2.8	3.7	4.0	4.2	4.4	3.9	4.0	4.0	3.3	3.8	3.3	3.0	2.0	—	49.5	78.0	0.635
35	0.8	4.6	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.9	4.7	3.9	3.3	—	67.2	78.0	0.862
36	—	1.0	2.1	2.3	3.3	3.4	3.5	4.2	4.3	4.6	4.7	4.9	4.8	4.7	2.6	—	50.4	77.7	0.649
37	—	3.4	4.9	4.9	4.9	5.0	4.6	5.0	5.0	5.0	4.8	3.8	4.2	3.6	2.1	—	61.2	77.5	0.790

Digitized by Google

Seguito dei Risultati pentadici.

Pentadi	4^h-5^h	5^h-6^h	6^h-7^h	7^h-8^h	8^h-9^h	9^h-10^h	10^h-11^h	11^h-12^h	12^h-13^h	13^h-14^h	14^h-15^h	15^h-16^h	16^h-17^h	17^h-18^h	18^h-19^h	19^h-20^h	A	B	$\frac{A}{B}$
38	—	3.9	5.0	4.8	4.8	4.8	4.1	4.7	5.0	5.0	4.8	5.0	3.5	1.9	0.7	—	58.0	77.5	0.748
39	0.4	2.7	3.6	4.2	4.2	4.6	3.8	4.6	4.8	4.0	4.0	3.5	3.8	3.8	3.2	—	55.2	76.7	0.720
40	0.2	4.4	4.9	5.0	4.9	4.8	4.5	4.1	4.6	4.3	4.5	3.8	3.6	3.3	2.9	—	59.8	76.1	0.786
41	—	4.4	5.0	4.8	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.9	3.1	—	67.2	75.2	0.894
42	—	2.4	4.9	5.0	5.0	5.0	4.7	5.0	4.9	5.0	4.2	3.6	3.9	3.8	1.9	—	59.3	74.2	0.799
43	—	1.5	4.0	5.0	5.0	4.9	5.0	4.9	4.4	5.0	4.7	4.5	5.0	3.5	1.7	—	59.1	73.2	0.807
44	—	0.9	3.2	4.9	4.8	4.5	4.2	4.0	4.5	5.0	4.1	3.5	4.4	4.1	1.0	—	53.1	72.3	0.734
45	—	1.3	4.0	4.3	5.0	4.5	4.0	4.0	4.5	4.3	3.9	4.0	4.4	4.1	1.1	—	53.4	71.4	0.748
46	. .	0.9	3.2	2.6	2.9	4.0	4.1	4.0	4.1	4.4	4.0	3.5	3.8	3.7	1.7	—	46.9	70.2	0.668
47	. .	0.1	2.0	3.0	4.7	4.4	4.0	4.2	4.9	5.0	5.0	3.2	3.0	1.6	0.1	. . .	45.2	68.9	0.656
48	. .	—	2.2	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	2.4	—	. . .	54.6	67.5	0.807
49	. .	—	0.3	3.5	4.8	5.0	4.9	5.0	5.0	4.8	4.8	4.7	4.4	1.0	—	. . .	48.2	66.3	0.727
50	. .	—	0.1	1.2	2.7	3.7	2.1	2.0	2.0	1.9	3.0	3.4	3.5	1.1	—	. . .	26.7	65.3	0.409
51	. .	—	—	1.4	3.5	4.6	4.0	4.0	3.5	2.8	2.7	2.0	0.5	—	—	. . .	29.0	64.0	0.453
52	. .	—	—	—	0.2	1.3	2.0	2.5	2.7	2.9	3.0	2.7	1.0	—	—	. . .	18.3	62.8	0.291
53	. .	—	—	1.6	2.5	2.7	2.2	2.6	3.6	3.0	3.0	2.7	1.3	0.1	—	. . .	25.3	61.5	0.411
54	. .	—	—	1.0	1.7	1.4	2.1	3.8	4.4	4.2	3.4	3.1	2.2	—	. . .	. . .	27.3	60.3	0.453
55	. .	—	—	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	—	. . .	. . .	9.5	59.0	0.161
56	. .	. .	—	0.3	1.6	2.2	2.0	2.4	2.9	4.3	4.9	5.0	2.2	—	. . .	. . .	27.8	58.0	0.479
57	. .	. .	—	1.0	2.2	3.0	2.2	3.2	2.2	2.5	3.5	2.9	1.0	—	. . .	. . .	23.7	56.6	0.419
58	. .	. .	—	1.4	2.9	2.6	2.4	2.9	3.1	3.0	2.4	1.9	1.7	—	. . .	. . .	24.3	55.3	0.439
59	. .	. .	—	1.3	2.0	1.7	2.3	2.2	2.8	2.2	1.6	1.8	0.8	—	. . .	. . .	18.7	54.1	0.346
60	. .	. .	—	0.6	1.9	2.0	1.9	1.9	2.4	2.2	2.1	2.7	0.5	—	. . .	. . .	18.2	53.1	0.343
61	. .	. .	—	—	0.9	1.0	1.0	1.0	1.2	1.7	2.8	3.0	0.3	. . .	. . .	. . .	12.9	52.1	0.248
62	. .	. .	—	0.1	1.9	4.3	4.7	4.4	3.7	3.0	3.0	2.7	1.2	. . .	. . .	. . .	29.0	50.7	0.572
63	. .	. .	—	0.3	2.0	1.9	1.8	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	0.5	. . .	. . .	. . .	16.5	49.6	0.333
64	. .	. .	—	—	—	—	—	—	0.4	—	—	—	—	. . .	. . .	. . .	0.4	48.9	0.008
65	. .	. .	—	—	—	—	—	0.8	1.4	1.9	2.0	1.6	0.1	. . .	. . .	. . .	7.8	48.0	0.163
66	. .	. .	. .	—	—	0.9	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.4	—	. . .	. . .	. . .	6.4	47.2	0.136
67	. .	. .	. .	—	—	1.0	1.2	2.0	1.6	1.8	1.0	1.1	—	. . .	. . .	. . .	9.7	46.1	0.210
68	. .	. .	. .	—	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	1.0	1.5	1.6	—	. . .	. . .	. . .	9.0	45.5	0.198
69	. .	. .	. .	0.2	2.6	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	2.9	2.8	0.2	. . .	. . .	. . .	23.7	45.4	0.522
70	. .	. .	. .	0.5	4.2	4.8	4.0	3.8	3.9	3.6	3.9	3.9	0.5	. . .	. . .	. . .	33.1	45.0	0.736
71	. .	. .	. .	0.2	0.9	1.4	2.0	1.8	1.7	1.7	2.0	1.8	0.2	. . .	. . .	. . .	13.7	44.9	0.305
72	. .	. .	. .	0.4	2.7	2.9	3.0	3.6	4.6	4.1	3.9	3.4	0.6	. . .	. . .	. . .	29.2	44.6	0.655
73	. .	. .	. .	0.1	2.0	1.7	2.5	3.4	4.1	2.3	2.5	2.1	0.4	. . .	. . .	. . .	21.1	45.0	0.469
Anno	2.9	50.2	85.8	136.0	191.6	211.2	213.8	229.3	238.8	231.3	230.7	209.7	150.9	89.4	44.5	—	2316.1	4470.6	0.518

Digitized by Google

Digitized by Google

OPERE INVIATE ALLA R. ACCADEMIA

nell' Anno 1894

I.

Istituti, ec.

AMIENS . . . . *Société des Antiquaires de Picardie.* — **Bulletin:** Année 1893, N.os 1, 2, 3.

» . . . . *Société Linnéenne du Nord de la France.* — **Bulletin:** T. XI, M os 247-258, 1893.

AMSTERDAM . . *Koninklijke Akademie van Wetenschappen.* — **Verhandelingen.** Afdeeling Letterkunde: Deel I, N. 3, 1892-94. — Eerste Sectie Deel II, 1893-94. — Tweede Sectie, Deel III, 1893-94. — **Verslagen en Mededeelingen.** — Afdeeling letterkunde, Derde Reeks, Tiende Deel 1894. — **Verslagen der Zittingen van de wiss-en Natuurkunde.** Afdeeling van 27 Mai 1893 tot 21 April 1894, 1894. — **Jaarboek:** voor 1893. — Vedi *Autori:* CARROZZARI, PASCOLI, ROSATI, STERZA.

ANGERS . . . . *Académie des Sciences et Belles-Lettres.* — **Mémoires:** Nouvelle Période. T. I (1890-1891). Souvenir de la séance solennelle du deuxième centenaire de la fondation célébré le 1er juillet 1886. — Séance solennelle de rentrée du 22 novembre 1888. Discours. (1890).

ATENE. . . . . Αρχαιολογικη Εταιρια εν Αθηναις Πρακτικα: 1892 (1894).

AUXERRE . . . *Société des Sciences historiques et naturelles de l' Yonne.* — **Bulletin:** Année 1893, Vol. 47e.

BASEL . . . . . Vedi BERNA.

BALTIMORA . . *Johns Hopkins University.* — **Circulars:** Vol. XIII, N.° 109-114, 1894.

BARCELLONA . *R. Academia de Ciencias y Artes.* — **Boletin:** Tercera época. Vol. I, N.os 9-12. — Vedi *Autori:* FELIÙ Y PEREZ B.

BATAVIA. . . . *Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.* — **Verhandelingen:** Deel XLVII; 2e Stuk, 1893 (Verklaring van

Digitized by Google

de meest bekende Javaansche Raadsels in proza door W. MEIJER RANNEFT); Deel XLVIII; 1e Stuk, 1893 (Bimaneesch-Hollandsch Woordenboek door I. C. C. JONKER). — **Notulen** van de algemeene en Bestuursvergaderingen. Deel XXXI, Aflevering I-IV, 1893-94. — **Tijdschrift** voor Indische Taal-Land-en Volkenkunde (onder Redactie van Mr. J. H. ABENDANON en P. I. F. LOW); Deel XXXVI, Afl. 4-6, 1893; Deel XXXVII, Afl. 1-3, 1893-1894. — **Dagh-Register** gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Anno 1664. (Mr. I. A. van der CHIJS) 1893. — **Nederlandsch-Indisch Plakaatboek,** 1602-1811; Deel XI (1893).

BERLINO. . . . *K. Akademie der Wissenschaften.* — **Abhandlungen:** Jahr. 1893.

» . . . . *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematick* (von CARL OHRTMANN) 1891; Band XXIII, Heften 1-3 (1894).

BESANÇON . . . *Société d' Émulation du Doubs.* — **Mémoires:** 6me Série, Vol. VII, 1892 (1893).

BERNA. . . . . *Schweizerische Gesellschaft für die Gesammten Naturwissenschaften* (*Société Helvétique des Sciences Naturelles*). — **Neue Denkschriften,** B. XXXIII, Abth. 1; Zürich, 1893. — **Verhrandlungen** der Schweiz. Nat. Gesell. in Basel (September 1892); 75 Jahresversammlung. Basel, 1892.

BOLOGNA. . . . *Società Medico-Chirurgica.* — **Bullettino** delle Scienze mediche. Serie VII, Vol. IV, Fasc. 11-12; Vol. V, Fasc. 1-10.

» . . . . *Processo verbale delle sedute della Commissione Geodetica Italiana* tenute in Bologna nei giorni 31 marzo e 1.° aprile 1894. — Firenze, 1894.

BORDEAUX. . . *Académie Nationale des Sciences, Belles Lettres ed Arts.* — **Actes:** 3e Série, 53e Année, 3e et 4e trimestre 1891.

BOSTON . . . . *Boston Society of Notural History.* — **Memoirs:** Vol. IV, N.° XI. — **Proceedings:** Voi. XXVI, Part. I (1892-93) 1993. — **Occasional Papers:** Geology of the Boston Basin by WILLIAM O. CROSBY, Vol. I, Part. I, 1893.

» . . . . *American Academy of Arts and Sciences.* — Whole Series, Vol. XXVIII, 1893.

BRUXELLES . . *Académie Royale de Médicine de Belgique.* — **Mémoires couronnés et autres Mémoires:** Collection in-8°, T. XII, 1893. — **Bulletin:** IVe Serie, T. VII, Nos 10-11 (dernier) 1893; T. VIII, Nos 1-10, 1894.

» . . *Société Entomologique de Belgique.* — **Annales:** T. XXXIII, 1893. — **Mémoires:** E. BRENSKE. Die Melolonthiden der palaearctischen und orientalischen Region im Königlichen Naturhistorischen Museum zu Brüssel. Bruxelles, 1894.

» . . *Société Belge de Microscopie.* — **Annales:** T. XVII, 2e Fasc. 1893. T. XVIII, 1er Fasc. 1894. — **Bulletin:** 20me Année, Nos I-IX, 1894.

Digitized by Google

BUCAREST . . . *Institut météorologique de Roumanie.* — **Annales:** Année 1891, T. VII (1893). Année 1892, T. VIII (1894). — **Bulletin:** Année I^re^ 1892. Année II^me^ 1893.

BUENOS-AIRES *Sociedad Cientifica Argentina.* — **Annales:** T. XXXV, Entrega VI, 1893; T. XXXVI. 1893; T. XXXVII, 1894.

CAIRO . . . . . *Institut Égyptien.* — **Bulletin:** 3^me^ Série, N.° 4, Année 1893 (1893).

CAMBRAI. . . . *Société d'Émulation de Cambrai.* — **Mémoires:** T. XLVIII, 1893.

CATANIA. . . . *Accademia Gioenia di Scienze Naturali.* — **Atti:** Serie 3.ª, T. I-IX, 1867-1874; T. XII, 1878; Serie IV, Vol. VI, 1893. — **Bullettino delle sedute:** Nuova Serie, Fasc. XXXIII-XXXVII, 1893-1894. -- Vedi *Autori:* RICCÒ F. e SAIJA G.

CHAMBERY. . . *Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Savoye.* — **Documents:** Vol. VII, 1893. (Anciennes Corporations des Arts et Métiers de Chambery et de quelques autres localités de la Savoye. — Personnel Ecclésiastique du Diocèse de Chambery de 1802 a 1893 par L. MORAND).

CHERBOURG . . *Société Nationale des Sciences Naturelles et Mathématiques de Cherbourg.* — Vedi *Autori:* LE JOLIS Auguste.

COPENHAGEN . *Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.* — **Skrifter** (Memorie): Historisk og philosophisk; 6 Raekke Serie) Afd. III. N.° 3, 1894. Om Sanskrits Stilling i den almindelige Sprogudvikling i Indien af S. SORENSEN. — **Oversigt** (Bullettino): 1893. N.° 3, 1894, N. 1-2. — Vedi *Autori:* DOLLERIS A.

CORDOBA. . . . (Argentina). *Academia Nacional de Ciencias.* — **Boletin:** T. XII, 1890-1892; T. XIII, 1892-1893.

CRACOVIA . . . *Académie de Sciences de Cracovie.* — **Bulletin International:** Comptes rendus des Séances de l'Année 1893, N^os^ 10 (1893); de l'Année 1893, N^os^ 1-5, 8-10 (1894).

CRISTIANIA . . *Université de Christiania.* — Beskrivelse af en raekke norske Bergarter af D.^r^ Th. KJERULF, 1892.

» . . *Norwegische Meteorologische Institut.* — **Jahrbuch:** für 1891 (1893); herausgegeben von D.^r^ H. MOHN.

DAVENPORT . . (Iowa). *Academy of Natural Sciences.* — **Proceedings:** Vol. V, Part. II, 1885-1889 (1893).

DELFT. . . . . *École Polytecnique.* — **Annales:** T. VIII, Livr. 1^e^ et 2^e^, 1894.

DOUAI . . . . . *Société d'Agriculture Sciences et Arts.* — **Mémoires:** 3^me^ Série, T. III, 1890-1890; 1891. — **Bulletin Agricole:** Année 1891.

DRESDA . . . . *Verein für Erdkunde.* — **Jahresbericht:** XXIV, 1894.

DUBLINO. . . . *R. Dublin Society.* — **Scientific Transactions:** Series II, Vol. IV, Part. XIV (1892); Vol. V, Parts I-IV (1893). — **Proceedings:** N. S. Vol. VII, Part. 5 (1892); Vol. VIII, Parts I-II (1893).

» . . . *R. Irish Academy.* — **Transactions:** Vol. XXX, Parts V-XIV (1893, 1894). — **Proceedings:** 3^rd^ Series, Vol. III, N.° 1-2 (1893-1894).

Digitized by Google

FILADELFIA . . *American Philosophical Society.* — **Proceedings:** Vol. XXXI, N.° 142, 1893; Vol. XXXIII, N.° 144, 1894.

» . . *Historical Society of Pennsylvania.* — **The Pennsylvania Magazine of History and Biography.** — Vol. XVII, N^os^ 3-4, 1893, 1894; Vol. XVIII, N^os^ 1, 1894.

» . . *Academy of Natural Sciences.* — **Proceedings:** 1893, Part. II-III (1893); 1894. Part. I (1894).

FIRENZE. . . *R. Accademia della Crusca.* — **Atti:** Adunanza pubblica del 26 di novembre 1893. — **Vocabolario:** Vol. VIII, Fasc. I (1894).

» . . . . *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.* — **Pubblicazioni:** Sezione di medicina e chirurgia. — Vedi *Autori:* CHIARUGI. — Sezione di Filosofia e Filologia. — Vedi *Autori:* CASANOVA.

» . . . . *Biblioteca Nazionale centrale.* — **Bollettino delle pubblicazioni italiane** ricevute per diritto di stampa. — Anno 1891 **Indici.** — Anno 1892 **Indici.** — Anno 1893 Bollettino N. 192. — Anno 1894 Bollettino N. 193-216.

» . . . . *Edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei, sotto gli auspicii di S. M. il Re d' Italia.* — Vol. IV, 1894.

» . . . . *Collegio dei Professori della R. Accademia di Belle Arti di Firenze.* — **Atti:** Anno 1892 (1893); Anno 1893 (1894).

FRIBURGO . . . *Naturforschende Gesellschaft zu Freiburg i. B.* — **Berichte:** Vol. VIII, 1894.

GENOVA . . . . *Società Ligure di Storia Patria.* — **Atti:** Vol. XXV, Fasc. I, 1892; Vol. XXVI (Decimo della seconda Serie) 1893.

GINEVRA. . . . *Société de Physique et d' Histoire Naturelle de Genève.* — **Mémoires:** Vol. XXXI, Seconde Partie (1892-1893).

GLASCOW . . . *Geological Society of Glascow.* — **Transactions:** Vol. IX, Part. II, 1890-91, 1891-92 (1893).

HALIFAX. . . . (Nova Scotia, Canadà). — *Nova Scotian Institute of Science.* — **Proceedings and Transactions:** Session of 1892-93, Second Series, Vol. I, Part. 3 (1893).

KÖNIGSBERG. . *Physikalisch-Oekonomische Gesellschaft.* — **Schriften:** Iahr. XXXIV, 1893.

LIEGI . . . . . *Société Géologique de Belgique.* — **Annales:** T. XX, 1^re^-2^e^ Livr. (1892-1893); T. XXI, 1^re^-2^e^ Livr. (1893-94).

LIONE . . . . . *Académie des Sciences, Belles-Lettres ed Arts de Lyon.* — **Collection des Documents** inédits pour servir à l' histoire du Lyonnais. — **Cartulaire Lyonnais:** recuelli et publié par M. C. GUIGUE. T. II. Documents de l' année 1255 a l' année 1300. Lyon, 1893.

LIPSIA. . . . . *K. Sächsiche Gesellschaft der Wissenschaften.* — **Abhandlungen:** Mathematisch-Physische Classe: XXI Band, N^os^ I-II, 1894. — Philologisch-Historiche Classe: XIV Band, N^os^ V-VII, 1894;

Digitized by Google

XV Band, N° I, 1894. — **Berichte über die Verhandlungen:** Mathematisch-Phisische Classe: 1893, VII-IX (1894); 1894, I (1894). — Philologisch-Historische Classe: 1893, II-III (1894); 1894, I (1894).

LONDRA . . . . *London Mathematical Society.* — **Proceedings:** Vol. XXIV, N^os^ 469-487, 1893-94. — List of members of the London Mathematical Society 9 th. November 1893. Thirtieht Session, 1893-94 (1893).

» . . . . *British Association for the advancement of Science.* — **Report** of the sixty-third Meeting held at Nottingham in september 1893. London, 1894.

LUSSENBURGO. *Institut Royal Grand-Ducal.* — **Pubblications:** Section des Sciences naturelles et mathematiques, Tome XXII, 1893.

MADISON WIS. *Wiscosin Academy of Sciences, Arts and Lettres.* — **Transactions:** Vol. IX, Part. I, 1892-93; Part. II, 1893.

MANCHESTER . *Literary and Philosophical Society.* — **Memoirs and Proceedings:** 4^th^ Series, Vol. VII, N.° 2-3 (1892-1893); Vol. VIII, N.° 1-3 (1893-94).

MELBOURNE. . *Royal Society of Victoria.* — **Proceedings:** New Series, Vol. V, 1893; Vol. VI, 1894.

Illustrated Official Handbook to the Aquarium, Picture Galleries, and Museum Collections under the control of the exhibition Trustees also description of Cyclorama of old Melbourne. Compiled by JAME L. SHERRARD, 1894.

MESSICO . . . . *Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya.* — **Boletin:** T. I, N.° 15-19 (1893-1894). — **Anuario:** para el año de 1894: año XIV, 1893. — para el año de 1895; año XV, 1894.

» . . . . *Sociedad Cientifica « Antonio Alzate ».* — **Memorias y Revista:** T. VII, N^os^ 3-10 (1893-94).

» . . . . *El Instructor periodico cientifico y literario.* — Aguascalientes: Año X, N^os^ 7-12, 1893-94.

MILANO . . . . *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.* — **Memorie:** Classe di Scienze Matematiche e Naturali: Vol. XVII, Fasc. III-IV, 1894. — Classe di Scienze Storiche e Morali: Vol. XIX, Fasc. II ed ultimo. — **Rendiconti:** Vol. XXVI, Fasc. XVIII-XX, 1893; Vol. XXVII, Fasc, I-XVII, 1894.

» . . . . *R. Osservatorio di Brera.* — **Osservazioni Meteorologiche** eseguite nell'anno 1893 da E. PINI.

» . . . . *Fondazione Scientifica Cagnola.* — **Atti:** Vol. XI (1893).

MODENA . . . . *Consiglio Provinciale.* — **Atti:** 1891 (1893); 1892 (1894).

» . . . . *Comune.* — Relazione sullo stato igienico sanitario per l'anno 1893 in confronto con quello del 1892, del D.^r^ A. BOCCOLARI, Ufficiale Sanitario. 1894.

» . . . . *R. Università degli Studi.* — **Annuario:** Anno Scolastico 1893-94 (1894).

Digitized by Google

MODENA . . . . *R. Deputazione di Storia Patria per le Provincie Modenesi.* — **Atti e Memorie:** Serie IV, Vol. IV-V, 1893-94. — Commemorazione dell'Ab. Girolamo Tiraboschi di TOMMASO SANDONNINI letta nella plenaria seduta 10 giugno 1894.

» . . . . *R. Biblioteca Estense.* — Lettere di Girolamo Tiraboschi al Padre Ireneo Affò tratte da Codd. della Biblioteca Estense di Modena e della Palatina di Parma a cura di CARLO FRATI Bibliotecario dell'Estense. Parte I, 1894.

MONACO . . . . *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.* — **Abhandlungen:** Philosophisch-Philologische Classe: XX Band, I Abth. 1894. — Historische Classe: XX Band, III Abth. 1893. — Mathematisch-Phisikalische Classe: XVIII Band, II Abth. 1893. — **Sitzungsberichte:** Philosophisch-Philologische und historische Classe: 1893 I Band, Heft III, 1893; 1893 II Band, Heft I-III 1803-94. **Festrede,** 22 November 1893. — Vedi *Autori:* RÜDINGER N.

MONCALIERI . . *Osservatorio Centrale del Real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri.* **Bollettino Mensuale:** Serie II, Vol. XIII, N. XII (1893); Vol. XIV, N. I-XI (1894).

MONTPELLIER . *Académie des Sciences et Lettres de Montpellier.* — **Mémoires:** Section des Lettres, 2e Série, T. I, Fasc. 1-3, 1893; Section des Sciences, 2e Serie, T. I, Fasc. 1-2, 1893.

MOSCA . . . . . *Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* — **Bulletin:** Année 1893, N.° 2-3, 1893.

NANCY. . . . . *Académie de Stanislas.* — **Mémoires:** 5e, Série, T. X. (1892) 1893.

NAPOLI . . . . *Società Reale.* — **Annuario** 1894. — R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche. — **Atti:** Ser. II, Vol. VI, 1894. — **Rendiconto:** Vol. VII (Anno XXXII) Fasc. 8-12, 1893; Vol. VIII (Anno XXXIII) Fasc. 8-10, 1894. — R. Accademia di Scienze Morali e Politiche. — **Atti:** Vol. XXVI, 1893-94. — **Rendiconto:** Anno XXXI (1892); Anno XXXII (1893). — R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. — Nuova Serie, Anno VII (1893); Anno VIII (Gennaio-Giugno 1894).

» . . . . *Accademia Pontaniana.* — **Atti:** Vol. XXIII, 1893. — **Annuario** 1894.

» . . . . *Reale Istituto d' Incoraggiamento.* — **Atti:** Serie 4, Vol. VI, 1893.

NIMES. . . . . *Académie de Nimes.* — **Mémoires:** VII Série, T. XIV, (Année 1891) 1892: T. XV, (Année 1892) 1893.

PADOVA . . . . *R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova.* — **Atti e Memorie:** Nuova Serie, Vol. IX (1892-93) 1893.

» . . . . *Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali.* — **Atti:** Ser. II, Vol. I, Fasc. II, Anno 1894. — **Bullettino:** T. V, N. 4, 1894.

PALERMO . . . *Società Siciliana per la Storia Patria.* — **Archivio Storico Siciliano:** Nuova Serie, Anno XVIII, Fasc. IV, 1894; Anno XIX, Fasc. I-II, 1894. — **Documenti:** Prima Serie Diplomatica, Vol. XIII, Fasc. IV, 1894.

Digitized by Google

PALERMO . . . *Circolo Matematico.* — **Rendiconti:** T. VII, Fasc. VI, 1893; T. VIII, Fasc. I-VI, 1894.

PARIGI. . . . . *Institut de France.* — **Comptes rendus** hebdomadaire de Séances de l'Académie de Sciences, Tomes 116. 117, 1893.

» . . . . *Société des Études Historiques.* — **Revue:** 4me Série: T. XI, 1893.

» . . . . *Société Nationale des Antiquaires de France.* — **Mémoires:** 6me Série, T. II, 1891. — **Bulletin:** 1891, 1892.

PIETROBURGO . *Académie Impériale des Sciences.* — **Mémoires:** T. XLI, N.° 2-5, 1893. — **Bulletin:** Ve Série, T. I, N.° 1-3, 1894. — Société physico-chimique russe à l'Université de St. Pétersbourg. T. XXV, N.° 9, 1893; T. XXVI, N.° 1-7. 1894. — Commission Impériale Archéologique pour les années 1882-88 avec un Atlas, 1893. — Matériaux pour servir à l'archéologie de la Russie. N.° 4-12. 1890-1893.

PISA. . . . . *Società Toscana di Scienze Naturali.* — **(Atti) Memorie:** Vol. XIII, 1894. — **Processi Verbali:** Vol. IX (1894-95) pag. 1-132.

PRAGA. . . . . *K. Bochmische Gesellschaft der Wissenschaften.* — **Sitzungsberichte:** Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, Jahrgang 1892 (1893); Jahrgang 1893 (1894). — Philos. Histor. Philolog. Classe, Jahrgang 1892 (1893); Jahrgang 1893 (1894). — **Jahresbericht:** für das Jahr. 1892 (1893); für das Jahr. 1893 (1894).

QUITO . . . . . *Universidad Central del Ecuador.* — **Anales:** Serie IX, N. 62-65 (1893); Serie X, N. 66-71.

RIO DE JANERIO. *Observatorio do Rio do Janeiro.* — **Annuario** para anno de 1893.

» *Museu Nacional do Rio de Janeiro.* — **Archivos:** Vol. VIII, 1892.

ROMA . . . . . *Ministero dell' Istruzione Pubblica.* — **Annuario Ufficiale:** 1893. — **Stato di previsione della spesa** per l'esercizio finanziario dal 1.° Luglio 1893 al 30 Giugno 1894. — **Bollettino Ufficiale:** Anno XXI, Parte I-II (1894). — **Indici e Cataloghi:** XII. Disegni antichi e moderni posseduti dalla R. Galleria degli Uffizi di Firenze, Vol. unico. Fasc. 2.° e 3.° (1893-94); XV. I manoscritti della R. Biblioteca Riccardiana di Firenze, Vol. I, Fasc. III (1894). — **Notizie storiche, bibliografiche e statistiche** sulle biblioteche governative del Regno d'Italia pubblicate in occasione del Congresso Internazionale dei Bibliotecari Chicago, Luglio 1893.

» . . . . . *Ministero d'Agricoltura Industria e Commercio.* — **Annali di Statistica:** Fascicoli XLVII-LII (1893-1894). — **Elenco** delle pubblicazioni fatte dal 1861 al 1894 dalla Direzione Generale della statistica, e delle principali pubblicazioni statistiche fatte dalle altre Direzioni di A. I. C. e dagli altri Ministeri negli

Digitized by Google

stessi anni (1894). — **Statistica dell' Istruzione Elementare** per l'anno scolastico 1891-92 (1893). — **Cause di morte. Statistica** degli anni 1891 e 1892. Introduzione, 1894. — **Notizie** sulle condizioni demografiche, edilizie ed amministrative di alcune grandi città italiane ed estere nel 1891 (1893). — **Statistica della Emigrazione italiana** avvenuta nell'anno 1893 (1894). — **Popolazione.** Movimento dello stato civile. Anno 1892 con notizie sommarie per l'anno 1893 (1894). — **Bilanci comunali e provinciali** per l'anno 1891 e situazione dei debiti comunali e provinciali al 31 Dicembre 1891 (1894).

ROMA . . . . . *Direzione Generale della Statistica.* — **Statistica Giudiziaria penale** per l'anno 1892 (1894). — **Statistica Giudiziaria civile e commerciale** per l'anno 1892 (1894).

» . . . . . *Institut International de Statistique.* — **Bulletin:** T. VII, Deuxième et dernière Livraison (1894).

» . . . . . *R. Accademia dei Lincei.* — **Atti:** Anno CCLXXXVIII, 1891, Serie IV. — **Memorie:** Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Vol. IX, Parte I (1892); Vol. X, Parte I (1893); Serie V, Vol. I, Parte II; Notizie degli scavi Agosto-Dicembre 1893; Indice topografico per l'anno 1893, Vol. II, Parte II; Notizie degli Scavi, Gennaio-Settembre 1894. — **Rendiconti:** Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie V, Vol. II, Fasc. 12.° e Indice del volume 2.° semestre (1893). Vol. III, Fasc. 1-12 e Indice del volume 1.° semestre (1894). Vol. III, Fasc. 1-9, 2.° semestre (1894). — Vedi *Autori:* RICCÒ F. — Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Serie V, Vol. II, Fasc. 11-12 e Indice del volume (1894); Vol, III. Fasc. 1-9 (1894). — **Annuario:** 1894. — **Rendiconto** dell'Adunanza solenne del 3 Giugno 1894.

» . . . . . *R. Accademia Medica di Roma.* — **Bullettino:** Anno XIX, Fasc. V-VIII 1894; Anno XX, Vol. XV, Fasc. unico 1894.

» . . . . . *R. Comitato di sanità militare.* — **Giornale Medico** del R.° Esercito e della R.ª Marina, Anno XLI, N. 12 (1893); Anno XLII, N. 1-11 (1894).

» . . . . . *R. Comitato d'Artiglieria e Genio.* — **Rivista** di Artiglieria e Genio Anno 1894, Vol. I, Gennaio-Marzo; Vol. II, Aprile-Giugno; Vol. III, Luglio-Settembre; Vol. IV, Ottobre-Dicembre.

» . . . . . *R. Comitato Geologico d' Italia.* — **Bollettino:** Anno XXIV, N. 1-4 (1893).

» . . . . . *Uffizio Centrale Meteorologico e Geodinamico Italiano.* — **Annali:** Serie II, Vol. XII, Parte I, (1890); Vol. XIV, Parte I, (1892); Vol. XV, Parte I, 1893. — Vedi *Autori:* RICCÒ F.

Digitized by Google

ROMA . . . . . *Società degli Spettroscopisti Italiani.* — **Memorie:** Vol, XXII, 1893, Disp. 11 e 12 (1894); Vol. XXIII, 1894, Disp. 1-10 (1894). — Vedi *Autori:* RICCÒ F.

ROUEN. . . . . *Académie des Science, Belles-Lettres et Arts de Rouen.* — **Précis analytique des Travaux:** Année 1891-92 (1893); 1892-93 (1894).

ROVERETO . . . *I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto.* — **Atti:** Anno XI, 1893

SAN FRANCISCO *California Academy of Sciences.* — **Memoirs:** Vol. II. N. 3 (1894). — **Proceedings:** Second Séries, Vol III. Part. 2 (1890-92). **Occasional Papers:** IV, 1893.

SIENA . . . . . *R. Accademia dei Fisiocritici.* — **Atti:** Serie IV, Vol. IV, Fasc. 1-10 (1892); Vol. V, Fasc. 1-4, 7-8 (1893); Vol. VI, Fasc. 1-10 (1894). — **Processi verbali delle adunanze** redatti per cura della Segreteria: Anno accademico 203, N. 1-3-6, 1894.

S.t LOUIS . . . *Academy of Science of S.t Louis.* — **Transactions:** Vol. VI, N. 9-17 (1893-1894).

SYDNEY . . . . *Royal Society of New South Wales.* — **Journal and Proceedings:** Vol. XXVII, (1893).

» . . . . *Australasian Associations for the Advancement of Science.* — **Report** of the fifth Meeting held at Adelaide. South Australia, September, 1893. South Australia, 1894.

TOKIO . . . . . *Deutsche Gesellschaft für Natur-und Völkerkunde Ostasiens in Tokio.* — **Mittheilungen:** Supplement-Heft I, zu Band VI (1894). Band VI, 53-54 Heft, Seite 103-196. Tokio (1894).

TOLOSA . . . . *Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres.* — **Mémoires:** IX^me^ Serie, T. V (1893).

» . . . . *Société Archéologique du Midi de la France.* — **Bulletin:** Série in 8°, N. 11-12 (1893).

TORINO . . . . *R. Accademia delle Scienze.* — **Memorie:** Serie II. T. XLIV (1894). — **Atti:** Vol. XXIX, 1893-94. Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1893 all'Osservatorio della R. Università di Torino, 1894.

» . . . . *R. Accademia di Medicina.* — **Giornale:** Anno LVI, N. 8-12 (1893); Anno LVII, N. 1-10 (1894).

» . . . . *Campagne del Principe Eugenio di Savoia.* — Serie I, Vol. VI, 1894. Dono di Sua Maestà il Re.

TRIESTE. . . . *Osservatorio Astronomico-Meteorologico di Trieste (IV Sezione dell' I. R. Accademia di Commercio e Nautica).* — **Rapporto Annuale** contenente le osservazioni meteorologiche di Trieste e di alcune altre Stazioni Adriatiche per l'anno 1891; redatto da EDOARDO MAZELLE, Vol. VIII, 1894.

» . . . . *Società Adriatica di Scienze Naturali.* — **Bollettino** redatto dal segretario prof. AUGUSTO VIERTHALER, Vol. XV, 1893.

Digitized by Google

UPSALA . . . . *R. Societas Scientiarum Upsaliensis.* — **Nova Acta:** Serie III, Vol. XVI, 1893.

VENEZIA. . . . *R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* — **Memorie:** Vol. XXV, 1894. — Vedi *Autori:* CISCATO G, DA SCHIO A.

VIENNA . . . . *K. Akademie der Wissenschaften.* — **Denkschriften:** Philosophisch-Historiche 'Classe. XLII Bd. 1893. — **Sitzungsberichte:** Mathematisch-Naturwiss. Classe. Erste Abtheilung; CII Bd., I-VII Heft., 1893; Abth. IIa; CII Bd., I-VII Heft., 1893; Abth. IIb; CII Bd., I-VII Heft., 1893; Abth. III; CII Bd., I-VII Heft., 1893. — Philosophisch-Historiche Classe. CXXIX Bd., 1893. — **Archiv für österreichische Geschichte:** LXXVIII Bd., II Hälfte, 1892; LXXIX Bd., I-II Hälfte, 1892-93; LXXX Bd., I Hälfte 1893. — **Almanach:** XLIII Jahrgang, 1893.

. . . . *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.* — **Verhandlungen:** Jahrgang 1893, XLIII Bd., III-IV Quartal; Jahrgang 1894, XLIV Bd., I-IV Quartal.

WASHINGTON . *Smithsonian Institution.* — **Annual Report** of the Board of Regents, showing the operations, expenditures, and condition of the Institution to July, 1891 (1893). — **Report** of the U. S. National Museum for the year ending June 30, 1891 (1892); for the year ending June 30, 1892 (1893).

» . *United States Coast and Geodetic Survey.* — **Report** of the Superintendent: for the fiscal year ending June 30, 1891 in two parts. Part II (1892).

» . *United States Geological Survey.* — **Annual Report:** Eleventh, 1889-90, Part I Geology, Part II, Irrigation (1891). Twelfth, 1890-91, Part I Geology, Part II Irrigation (1891); Thirteenth, 1891-92 in three Parts, Part I. Report of the Director, Part II Geology, Part III Irrigation (1892-93). — **Bulletin:** 26-30 (1893-94).

» . *United States Naval Observatory.* — **Report** of the Superintendent for the year ending June 30 1893. — **Observations** made during the year 1889 (1893).

WELLINGTON . *New Zealand Institute.* — **Transactions and Proceedings:** Vol. XXVI (Ninth of New Series) 1893.

ZURIGO . . . . Vedi BERNA.

Digitized by Google

II.

Autori:

Abendanon I. H. — Vedi *Istituti:* Batavia.

Abetti A. — Vedi Lorenzoni.

Aschieri Ferdinando. — *Sopra un particolare complesso di rette del secondo grado.* Bologna, 1879. — *Introduzione alla geometria dello spazio rigato.* Milano, 1885. — *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni.* Roma, 1887.

Barduzzi prof. D. — *Per la solenne inaugurazione degli studi nella R. Università di Siena.* Parole del Rettore Prof. D. B. Siena 1893.

Bentivoglio Tito. — Vedi Magnanini Gaetano.

Boccolari Anfonio. — Vedi *Istituti:* Modena Comune.

Brenske E. — Vedi *Istituti:* Bruxelles.

Camus Jules. — *Les Voyages de Mandeville copiés pour Valentine de Milan.* Extrait de la Revue des Bibliotheques, T. IV.

Carrozzari Raphael. — *Horatia a fratre interfecta.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1894.

Casanova Eugenio. — *La carta nautica di Conte di Ottomano Freducci d'Ancona* conservata nel R. Archivio di Stato in Firenze. Firenze, 1894.

Celani Enrico. — *Saggio di una bibliografia marittima italiana.* Roma, 1894.

Chiarugi Giulio. — *Contribuzioni allo studio dello sviluppo dei nervi encefalici nei mammiferi in confronto con altri vertebrati.* Firenze, 1894.

Chijs (v). J. A. — Vedi *Istituti:* Batavia.

Ciscato Giuseppe. — *Determinazione della latitudine dell' Osservatorio astronomico di Padova* fatta nel 1892 coll' Altazimut e collo strumento dei passaggi. — *La stessa* nel 1893. Venezia, 1894.

Crespellani Arsenio. — *Medaglie Estensi ed Austro Estensi*, edite ed illustrate. Modena, 1893.

Da Schio Almerico. — *Leggi del Vento da 28109 registrazioni dell'Anemografo di Vicenza.* Dicembre 1885-Novembre 1886, con nove tavole grafiche. Venezia, 1894.

De Crescenzo Salvatore. — *Saggio di una scala normale del pensiero astratto secondo la risultante di due fattori.* Moduli secondo e terzo di media e d'infima grandezza. Napoli. 1893.

Diaz de Leon Jesus. — *Curso de raices griecas.* 4.ª edition, Aguascalientes, 1893. — *Apuntes para una tesis sobre la immortalidad del alma.* Aguascaglientes, 1894. — *El Instructor periodico cientifico y literario.* N. 7-12. Aguascalientes, Noviembre 1893-Abril 1894.

Digitized by Google

Dolleris Andreas. — *Danmarks Boghandlere. En personalhistorisk Haanbog*, Copenhagen, 1893.

Feliu y Pere zDr. D. Bart. — *Influencia de la Filosofia en la constitución de la Fisica*. Barcelona, 1894.

Frati Carlo. — Vedi *Istituti:* Modena, R. Biblioteca Estense.

Gonnelli-Cioni Antonio. — *Primo istituto italiano dei Frenastenici.* 4.° rapporto annuale 1892-93. Lecco, 1893. — *Dell' educazione de' fanciulli frenastenici.* Lecco, 1893.

Grandi Luigi. — *Lettera aperta agli astronomi.* Caserta, 1894.

Jonker I. C. C. — Vedi *Istituti:* Batavia.

Kjerule Th. — Vedi *Istituti:* Cristiania.

Klossovsky A. — *Organisation de l' étude climatérique spéciale de la Russie et problèmes de la météorologie agricole.* Odessa, 1894. — *Distribution annuelle des orages à la surface du globe terrestre.* Odessa, 1894.

Le Jolis Auguste. — *Remarques sur la Nomenclature Hépaticologique.* Cherbourg, 1894.

Lorenzoni Giuseppe. — *Giovanni Santini la sua vita e le sue opere.* Discorso letto nella chiesa di S. Sofia in Padova. Padova, 1877. — *Correzione di scala ed elevazione sul mare del barometro dell' Osservatorio astronomico di Padova e risultati medi con esso ottenuti nel ventennio 1868-1887.* Venezia, 1888. — *Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio astronomico di Padova in agosto 1885 e febbraio 1886 per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi, premessa la esposizione dei principii del metodo e la descrizione dello strumento di Repsold.* Roma, 1888. — *Sulle condizioni del progresso astronomico.* Discorso inaugurale letto nell'aula magna dell'Università di Padova il giorno 24 novembre 1889. Padova, 1889. — *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri determinate da* L. Respighi, A. Abetti, G. Lorenzoni. Padova, 1891. — *Determinazioni di Azimut* eseguite nel R. Osservatorio Astronomico di Padova in giugno e luglio 1874 con un altazimut di Repsold ed in luglio 1890 con un altazimut di Pistor. Padova, 1891. — *Nuovo esame delle condizioni del supporto nelle esperienze fatte a Padova nel 1885-86 per determinare la lunghezza del pendolo a secondi, e mezzo pratico per individuare gli assi geometrici di rotazione nelle due posizioni reciproche del pendolo convertibile.* Venezia, 1893. — *Determinazione relativa della gravità terrestre negli osservatori di Vienna, di Parigi e di Padova mediante gli apparati e colla cooperazione dei signori colonnello di* Sterneck *e comandante* Defforges. Venezia, 1893.

Louw P. I. F. — Vedi *Istituti:* Batavia.

Magnanini Gaetano. — *Sul Piperilene.* Boma, 1886. — *Sulla trasformazione degli omologhi dell' indolo in derivati della chinolina.* Roma, 1887. — *Sulla trasformazione del metilchetolo in chinaldina.* Roma, 1888. — *Sui derivati acetilici del metilchedolo e dello scatolo.* Roma, 1888. —

Digitized by Google

Azione della anidride acetica sull' acido levulinico. Roma, 1888. — *Azione dell' ammoniaca sull' acido deidrodiacetillevulinico.* Roma, 1889. — *Sul comportamento dell' acido deidrodiacetillevulinico rispetto alla fenilidrazina ed alla idrossilamina.* Roma, 1892. — *Azione della aldeide benzoica sopra il derivato ammoniacale dell' acido deidrodiacetillevulinico.* Roma, 1892. — *Sopra l' aldolo.* Roma, 1889. — *Sul comportamento del pirrolo e dei suoi derivati rispetto alla legge di Raoult.* Nota I e II. Roma, 1889. — *Determinazione del peso molecolare delle pirocolle col metodo di Raoult.* Roma, 1888. — *Sopra alcuni derivati del dimetilpirrolo assimetrico.* Nota I, II e III. Roma, 1888. — *Sulla costituzione del Lepidene.* Roma, 1889. — I. *Sullo spettro di emissione dell' ammoniaca.* II. *Sullo spettro di assorbimento del cloruro di nitrosile.* Roma, 1889. — *Forze elettromotrici fra uno stesso metallo immerso in differenti elettroliti.* Roma, 1890. — *Sul comportamento della Mannite rispetto all' acido borico.* Roma, 1890. — *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose di acido borico in presenza di Mannite..* Roma, 1890. — *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni di acido borico in presenza di dulcite.* Roma, 1890. — *Sul potere assorbente dei sali colorati in rapporto colla dissociazione elettrolitica.* Roma, 1891. — *Applicaiione del metodo fotometrico allo studio della reazione fra i sali ferrici ed i solfocianati solubili.* Venezia, 1891. — *L' affinità chimica — Prolusione al corso di chimica generale nella R. Università di Messina.* Messina, 1891. — *Azione degli acidi minerali sulla velocità della reazione fra gli acidi bromico e jodidrico.* Palermo, 1890. — *Azione catalitica degli acidi sulla velocità della reazione fra il perossido di idrogeno e l' acido jodidrico.* Palermo, 1891. — *Sopra due nuovi derivati della caffeina.* Modena, 1890. — *Sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose di acido borico in presenza degli alcoli polivalenti.* Palermo, 1890. — *Influenza dell' acido borico sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose di acido tartrico.* Palermo, 1890. — *Influenza dell' acido borico sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose degli acidi organici.* Palermo, 1891. — *Influenza dell' acido borico sulla conducibilità elettrica delle soluzioni idroalcooliche degli acidi organici.* Palermo, 1892. — *Sul punto di congelamento delle soluzioni acquose di acido borico e mannite.* Palermo, 1891. — *Ricerche ulteriori intorno alla influenza dell' acido borico sulla conducibilità elettrica delle soluzioni acquose degli acidi organici.* Catania, 1892. — *Azione dell' acetilacetone sopra il bromoacetone in presenza di alcoolato sodico.* Roma, 1893. — *Intorno alla ipotesi della colorazione degli joni.* Roma, 1893. — *Sulla pressione osmotica.* Roma, 1893.

MAGNANINI G. e T. BENTIVOGLIO. — *Intorno allo spettro di assorbimento delle soluzioni di alcuni cromoossalati della serie bleu.* Nota. Roma, 1893. — *Conducibilità elettrica delle soluzioni dei sali di acidi organici in*

Digitized by Google

presenza di acido borico. Nota. Roma, 1893. — *Azione della anidride acetica sopra l' acido succinico in presenza di cloruro di zinco.* Nota. Roma, 1894.

Mazelle Edoardo. — Vedi *Istituti:* Trieste.

Meijer Ranneft W. — Vedi *Istituti:* Batavia.

Mohn H. Vedi *Istituti:* Cristiania.

Morand L, — Vedi *Istituti:* Chambery.

Pascoli Ioh — *Phidyle.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Amstelodami, 1894. — *Laureolus.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1894.

Piette Ed. — *L' époque éburnéenne et les races humaines de la période glyptique.* Saint-Quentin, 1894.

Pini E. — Vedi *Istituti:* Milano, R. Osservatorio di Brera.

Respighi L. — Vedi Lorenzoni.

Riccardi Pietro. — *Intorno ad alcune edizioni dell' « Algorismus » del Sacrobosco.* Nota. Estratto dal *Journal d' histoire des Mathematiques* publiè par G. Eneström. Stockolm, 1894.

Riccò Annibale. — *Osservazioni astrofisiche solari eseguite nel R. Osservatorio di Catania. — Statistica delle macchie solari nell' anno 1892.* (1893). — *Sui movimenti microsismici.* 1893. — *Sulla percezione più rapida delle stelle più luminose.* 1893. — *Sulla relazione fra le perturbazioni magnetiche e le macchie solari.* 1894. — *La lava incandescente nel cratere centrale dell' Etna e fenomeni geodinamici concomitanti.* Roma, 1894. — *Velocità di propagazione delle principali scosse del terremoto di Zante e Catania.* 1894. — *Osservazioni termometriche esequite nel R. Osservatorio Etneo.* Nota dei Professori A. Riccò e G. Saija. 1894.

Rosati Petrus. — Siderhodophylax. *Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum.* Amstelodami, 1894.

Rossi Luigi. — *IX Gennajo.* Modena, 1895.

Rudinger N. — *Ueber die Wege und Ziele der Hirnforschung.* München, 1893.

Ruffini F. P. — *Delle linee piane algebriche le pedali delle quali possono essere curve che hanno potenza in ogni punto del loro piano.* Memoria II. Bologna, 1894.

Saija G. e Riccò F. — *Osservazioni termometriche eseguite nel R. Osservatorio Etneo.* 1894.

Sandonnini Tommaso. — Vedi *Istituti:* Modena R. Deputazione di Storia Patria.

Sorensen S. — Vedi *Istituti:* Copenhagen.

Sterza Andreas. — Poeta a musis christianis edoctus. *Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum.* Amstelodami, 1894.

Vierthaler Augusto. — Vedi *Istituti:* Trieste.

Zagni Gustavo. — *Cattedrale di Modena. La Porta dei Principi.* Torino, 1894.

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI SCIENZE

Digitized by Google

Digitized by Google

LE SCIENZE ESATTE
NELL' ANTICA GRECIA

Libro II.

Il periodo aureo della Geometria greca

PROEMIO.

1. Il secondo periodo della storia della geometria greca differisce sostanzialmente da quello che diede materia al I Libro dell' opera presente, sia per la natura e l' entità dei documenti che ad esso si riferiscono, sia per la fisonomia intellettuale e le abitudini scientifiche dei personaggi che ad esso appartengono, sia finalmente per la dimora che ebbero coloro ai quali la nostra scienza è debitrice dei più rilevanti progressi che in allora compì.

Mentre le notizie intorno alle produzioni scientifiche dell' epoca pre-euclidea devono venir raggranellate quà e là, attingendo a fonti di seconda o terza mano e di attendibilità che varia e non sempre si può precisare, dei corifei dell' epoca di cui ora intraprendiamo lo studio ci fu conservato un gran numero di opere, delle quali è quindi agevole valutare con esattezza il valore intrinseco (1). E se non sempre siamo in grado di misu-

---

(1) Perciò coloro che, con Arago, pensano che « il n' y a qu' une manière rationnelle et juste d'écrire l'histoire des sciences, c'est de s' appuyer exclusivement sur des pubblications de date certaine », devono far comincare almeno dal periodo che principia con la morte di Alessandro di Macedonia lo studio della matematica presso i Greci.

Digitized by Google

rare con precisione l'entità del progresso che esse segnano, gli è che le informazioni intorno ai matematici precedenti sono esigue e mal sicure: ragione per cui la storia della matematica greca non può sempre raggiungere lo scopo supremo della storia scientifica che è quello di rivelare il logico concatenamento, il carattere quasi di necessità delle varie scoperte.

Mentre gli scienziati anteriori ad Euclide non erano di regola specialisti, ma risolvevano questioni di geometria come prendevano parte ad una disputa filosofica o facevano osservazioni di fenomeni naturali, da quelli di cui stiamo per occuparci (1) trae origine la numerosa serie di coloro che avvertirono essere la matematica capace e degna di assorbire da sola l'attività intellettuale di un' intera esistenza. Essi furono i fondatori della letteratura matematica dei Greci e debbono essere venerati siccome i nostri progenitori scientifici: onde il conoscerne le opere ha, non solo un valore storico, ma eziandio, in un certo senso, un valore pratico.

Mentre finalmente nell' epoca precedente il centro della coltura, dopo essere andato ramingo per tutta la Grecia, trova da ultimo per qualche tempo in Atene un asilo sicuro, nell' epoca verso cui ora ci dirigiamo è in Alessandria che fa d' uopo rintracciare il centro di attrazione intellettuale: donde la ragione per cui questa nuova epoca (che, come la precedente, dura all' incirca tre secoli) suole da molti designarsi col nome di *periodo greco-alessandrino.*

2. Tale mutazione del centro della coltura non è dovuto — come gran parte delle trasmigrazioni analoghe che rilevammo nel Libro precedente — alla casuale presenza di qualche grande personalità raccogliente attorno a sè una coorte di ammiratori o discepoli, ma bensì al cambiamento radicale che la morte di Alessandro il Macedone produsse nell' immenso impero che egli ridusse sotto il proprio scettro. Spento infatti questo grande

---

(1) Eccezion fatta per Eratostene (v. più avanti, n. 48) e forse per lui solo.

Digitized by Google

capitano e terminate le terribili lotte che in conseguenza si accesero fra i generali aspiranti a raccoglierne l'eredità, il mondo conquistato dal valoroso discepolo di Aristotele (cfr. L. I, n. 66) venne diviso in varie parti; e come Alessandro nella vittoriosa sua corsa attraverso l' Asia soleva condurre seco uno stuolo di letterati, scienziati ed artisti, così i suoi successori, ammaestrati dal suo esempio, vollero avere costantemente a lato, forse per consiglieri e maestri, alcune persone eminenti. Donde la spiegazione del fatto che i Seleucidi diffusero la coltura ellenica fino nell' interno dell' Asia, gli Attalidi si sforzarono di raccogliere in Pergamo ricche biblioteche, e perfino i signori di Atene, malgrado la loro variabilità ed i tormenti di guerre incessanti, non mancarono di incoraggiare e sovvenire chi si consacrava ai lavori della mente. Ma in nessuna corte la scienza potè fiorire con tanta tranquillità e sicurezza quanto sotto i Lagidi di Alessandria.

Le benemerenze di questa grande dinastia cominciano col fondatore di essa, giacchè Tolomeo Sotero, non appena salito sul trono dei Faraoni, raccolse attorno a sè un circolo di dotti e, dall' ateniese Demetrio Falereo, fece in Alessandria gettare le basi di una grande biblioteca (1); siccome però egli ebbe da sostenere durante i suoi quarant' anni di regno parecchie guerre a fine di consolidare il proprio trono, così era riserbato al suo successore, Tolomeo Filadelfo, di consacrare i trentasette anni di pacifico governo che la sorte gli concesse esclusivamente a far fiorire tutte le arti della pace, a raccogliere immensi tesori letterarii, ad assicurarsi il primo posto fra i sovrani fautori delle scienze e protettori degli scienziati.

---

(1) Questa — che sorse circa nel momento della morte di Aristotele — fu modellata sulla biblioteca raccolta e ordinata dal celebre filosofo di Stagira (cfr. L. I, n. 82); essa in origine fu allogata in un locale attiguo alla Reggia; ma quando, sotto Tolomeo Evergete, lo spazio disponibile si trovò tutto occupato, i libri si depositarono nel tempio di Serapide ed altrove. A queste biblioteche pubbliche se ne aggiunsero ben presto in Alessandria delle private.

Digitized by Google

3. A quale dei due principi testè citati spetti il nome di fondatore del Museo di Alessandria (1) non si può affermare con certezza (2); però la bilancia pende dalla parte del padre, mentre d'altronde non v'ha dubbio che è sotto il governo di Tolomeo Filadelfo che, per numero di dotti ed entità di materiale scientifico, il Museo raggiunse l'apice della grandezza. — Quale fosse l'organizzazione di questo celebre istituto è impossibile dire con qualche precisione: non è noto, anzi è poco probabile, che agli studiosi ivi accolti (fra cui venivano scelti i precettori dei principi) fosse imposto l'obbligo del pubblico insegnamento; per converso veniva ad essi agevolata con ogni mezzo la ricerca scientifica, ed è presumibile fosse ad essi fatto invito di comunicare i proprii ritrovati ai giovani che la loro grande rinomanza chiamava attorno ad essi. Era dunque uno stabilimento *sui generis* in cui forse è vano cercare delle profonde somiglianze con qualche istituzione moderna (3); esso è meritevole di studio e di venerazione da parte dei dotti per la grande durata che ebbe (circa nove secoli) (4), pei personaggi che ivi rappresentarono parti

---

(1) Riguardo al Museo si vegga il T. I, p. 180-198 dell'*Histoire de l'École d'Alexandrie par* M. J. Simon (Paris 1845).

(2) Nel dubbio taluno colloca la creazione del Museo negli anni 284-282 a. C. durante i quali i due primi Tolomei tennero insieme le redini del governo.

(3) G. Parthey a pag. 60 della sua pregievole memoria *Das Alexandrinische Museum* (Berlin 1838) — a cui attingemmo largamente — cita parecchie istituzioni moderne a cui venne paragonata quella di cui ci occupiamo: sono le Accademie di Parigi e Londra, il Collegio di Oxford ed il ginnasio di Zweibrück. Sembra però che ad istituire dei paragoni verosimili manchino dati abbastanza copiosi e sicuri: cfr. F. Susemihl, *Geschichte der griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit*, I Band (Leipzig 1891), p. 7.

(4) Si possono distinguere nel Museo tre fasi. La prima va dall'incoronazione di Lago sino ad Augusto e comprende i tre secoli (332 — 30 a. C.) in cui l'Egitto fu indipendente; la seconda da Augusto a Costantino (30 a. C. — 324 E. v.), tre secoli in cui l'Egitto fu provincia romana; la terza da Costantino a Amru ben Alâs (324-640 E. v.) ed abbraccia altri tre secoli in cui ferve la lotta del Cristianesimo con l'elemento pagano indigeno. Durante la prima fase il Museo, sotto la protezione dei Lagidi, arriva all'apogeo della grandezza; durante la seconda decade; durante la terza è il teatro di dispute teologiche.

Digitized by Google

importanti (1), e per i grandi progressi che le scienze (specialmente le scienze esatte) vi compirono. La sua influenza fu incomparabilmente superiore a quella che esercitarono gli antichi istituti congeneri, quali sarebbero le scuole di Atene, di Pergamo, di Antiochia; ad esso è dovuta la conservazione e la diffusione di scritti importanti che altrimenti sarebbero andati perduti o rimasti ignorati; in esso le matematiche arrivarono ad una grandezza comparabile soltanto a quella che raggiunsero nel periodo della scoperta del calcolo infinitesimale (2).

Ed è di somma importanza per noi il rilevare come dopo le conquiste di Alessandro non si avverta nelle scienze esatte una alterazione d' indirizzo somigliante a quello percepibile nelle filosofiche ed in altre discipline; esse conservano e accentuano quei caratteri eminentemente scientifici di genialità e generalità che si cercano invano nelle produzioni degli Egiziani, anzi di tutti gli antichi popoli: sicchè la matematica di cui stiamo per occuparci è essenzialmente greca, benchè essa siasi sviluppata su terra egiziana. Se noi includeremo nel nostro racconto anche le gesta di uomini che vissero fuori di Alessandria, è perchè gli investigatori del Museo, col tenere vive corrispondenze con i più cospicui pensatori stranieri, riuscirono a coordinare e far convergere verso un fine comune gli sforzi fatti da questi per accrescere il nostro patrimonio intellettuale; laonde, benchè non pochi filosofi del periodo greco-alessandrino abbiano insegnato o vissuto lungi dalla terra fecondata dal Nilo, con pieno diritto Alessandria dà il nome alla nobile famiglia di pensatori che essi formano e della quale tenteremo ora di descrivere l' opera matematica.

---

(1) Il loro numero era variabile, ma doveva probabilmente arrivare a cento quando il Museo era fiorente.

(2) Tale è l' avviso di M. Cantor: *Vorlesungen*, T. I, p. 99.

Digitized by Google

1.

Euclide.

4. Fra i geometri del periodo greco-alessandrino, primo forse per ordine di tempo e certamente per popolarità, se non per originalità ed elevatezza d'investigazioni (almeno se lo si giudica in base alle produzioni superstiti), è Euclide. Ce ne occuperemo ora, riferendo anzitutto il giudizio che su di lui pronunciò il commentatore Proclo nella continuazione del brano che ci servì (L. I, n. 3) quasi di piattaforma su cui erigere la ricostruzione che tentammo della geometria dell'epoca precedente.

Euclide, l'autore degli *Elementi,* non è molto più giovane (di Ermotimo da Colofone e Filippo da Medma); egli ha messo in ordine varii lavori di Eudosso (1), migliorati quelli di Teeteto (2) ed inoltre date dimostrazioni indiscutibili di quanto i suoi predecessori non avevano dimostrato con sufficiente rigore. Euclide fiorì (3) sotto Tolomeo I, perchè è citato da Archimede (4), il quale nacque verso il termine del regno di questo sovrano, ed inoltre si narra come Tolomeo chiedesse un giorno ad Euclide se per apprendere la geometria non esistesse una via più breve degli *Elementi* e ne ricevesse per risposta: *In geometria non esistono cammini fatti pei re* (5). Euclide è adunque posteriore ai discepoli di Platone, ma anteriore ad Eratostene ed Archimede, i quali erano contemporanei, come afferma Eratostene in qualche luogo. Euclide era di opinioni platonico e molto famigliare con la filosofia del Maestro tanto che pose per iscopo finale de' suoi *Elementi* la costruzione delle figure platoniche (corpi regolari).

Si hanno di lui molte altre opere matematiche scritte con singolare precisione e piene di scienza teorica. Tali sono l'*Ottica,* la *Catottrica,* gli *Elementi di musica* e anche i libri *Sulle divisioni.* Ma si ammirano specialmente i suoi

---

(1) V. L. I, n. 70-71.

(2) V. L. I, n. 64.

(3) Cfr. Rhode in *Rhein. Museum,* 2e Reihe, XXXIII, Bd., p. 161.

(4) Nella II propos. del I Libro *Su la sfera ed il cilindro* (v. più avanti n. 39).

(5) Cfr. l'aneddoto analogo concernente Menecmo: L. I, n. 74.

Digitized by Google

Elementi di geometria per l'ordine che vi regna, per la scelta dei teoremi e problemi assunti come fondamentali (giacchè egli non ha inseriti tutti quelli che era in grado di dare, ma bensì quelli soltanto che sono capaci di fungere da elementi), e anche per la varietà dei ragionamenti i quali sono condotti in tutti i modi possibili e convincono ora partendo dalle cause, ora risalendo dai fatti, ma sono sempre inconfutabili, esatti e dotati del carattere più scientifico. Si aggiunga che egli adopera tutti i procedimenti della dialettica: il metodo di *divisione* per determinare le specie, quello di *definizione* per i ragionamenti essenziali, l'*apodittico* nel procedere dai principii alle cose ignote, l'*analitico* nel procedere inversamente dall'ignoto ai principii. Lo stesso trattato ci presenta anche esattamente distinte le varie sorte di proposizioni reciproche, ora più semplici ed ora più complicate, potendo le reciprocità aver luogo o fra il tutto ed il tutto, o fra il tutto e una parte, o fra questa e quello, o infine fra una parte una ed parte. Che diremo poi del metodo di ricerca, dell'economia e dell'ordine da quello che precede a ciò che segue, della forza con cui è assodato ogni punto? Se tu vuoi aggiungervi o togliervi alcuna cosa, riconoscerai che ti allontani dalla scienza e ti lasci trascinare verso l'errore e l'ignoranza. — In realtà molte cose hanno l'apparenza di essere verità e scaturire dai principii dalla scienza, mentre in fatto si scostano da questi principii ed ingannano gli spiriti superficiali. Perciò Euclide ha esposti anche i metodi, adoperati dalla mente chiaroveggente e coi quali devono famigliarizzarsi coloro che intraprendono lo studio della geometria, per ravvisare i paralogismi ed evitare gli errori. È nello scritto intitolato Ψευδάρια (*Sofismi*) (1) che egli ha fatto questo lavoro, enumerando partitamente e con ordine i varii generi di ragionamenti erronei, esercitando su ciascuno la nostra intelligenza col mezzo di teoremi di ogni specie, ove oppone il vero al falso e fa concordare la dimostrazione della verità con la confutazione dell'errore. Questo libro ha pertanto siccome scopo di purificare ed esercitare l'intelligenza, mentre gli *Elementi* sono una guida sicura e completa per la contemplazione scientifica delle figure geometriche (2).

Alle notizie intorno alla vita ed alle tendenze scientifiche di Euclide somministrate da questo brano importante, ben poche siamo in grado di aggiungerne ricorrendo ad altri autori greci;

(1) Lo si considera per irremissibilmente perduto. Heiberg però osserva (*Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, Leipzig 1882, p. 38 nota) che Alessandro d'Afrodisia lo conobbe e citò nel suo *Commento* ad Aristotele. In conseguenza il Tannery congettura (*Bull. des Sc. math. et astr.*, 2e Série, T. VI, 1882, Ière Partie p. 147) che è da quell'opera di Euclide che il commentatore citato tolse le quadrature del circolo di Antifonte e Brisone (L. I, n. 45, 48, 49), nonchè le notizie sulle lunule di Ippocrate (L. I, n. 44-47).

(2) Proclo-Taylor I, p. 101-103.

Digitized by Google

l' unica anzi che questi sono in grado di porgerci si legge in un passo della *Collezione matematica* di Pappo; questo commentatore conferma infatti che Euclide visse in Alessandria, e ce lo dipinge modesto, di carattere dolce, pieno di benevolenza verso chiunque fosse in grado di far progredire le matematiche ed avente per principio di apportare il minimo numero posssibile di cambiamenti in quello che i suoi predecessori avevano scritto (1).

5. A queste informazioni di origine greca si potrebbero aggiungerne altre di fonte araba (2), secondo le quali Euclide sarebbe figlio di Naucrate e nipote di Zenarco, greco di origine ma nativo di Tiro e domiciliato a Damasco; ma come prestar fede a tali notizie in cui la ricchezza nei particolari stranamente contrasta con l' ignoranza di Proclo che pure, come greco ed erede delle tradizioni scientifiche della scuola d' Alessandria, doveva essere assai meglio informato degli Arabi di molto posteriori? ed inoltre chi ignora come fosse consuetudine degli Arabi di svisare, completare dove erano deficienti e poetizzare le informazioni attinte dai Greci, come fosse loro aspirazione costante di collegare in qualche modo le produzioni greche alla coltura dell' Arabia od almeno a quella dell' Oriente (3)? Comunque, sarebbe indubbiamente interessante venisse decifrata e pubblicata quella biografia di Euclide che il Persiano Kâdi-zâdeh Ar-Rûmî (morto nel 1412 o nel 1413) scrisse *dopo avere attinto a fonti greche,* e che si dice esistere tuttora manoscritta (4). — Frattanto non sarà giudicato inopportuno che noi estragghiamo da una delle

---

(1) Pappo ed. Hultsch p. 676-8. Per valutare la fede che si deve attribuire a queste informazioni, bisogna tener conto dell' esser desse contenute in un passo che l' Hultsch considera come un' interpolazione posteriore a Pappo. Cfr. anche Heimberg in *Revue critique*, T. XI, 1881.

(2) Cfr. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen* (Berlin 1842) p. 184-5 note. Inoltre Heiberg, citate *Studien*, Cap. I; ove sono riferiti i passi originali contenenti i dati più importanti, di cui il più antico è di un autore che morì nel 1249.

(3) Tuttavia ci sembra che a ragione il Suter avverta (*Einiges aus Nassir ed-Dins Euklidausgabe;* Bibl. Math. 1892, p. 6) nulla opporsi ad ammettere essere Euclide nativo di Tiro.

(4) Cfr. Cantor, *Vorlesungen* I, p. 669-670.

Digitized by Google

raccolte più importanti per la storia letteraria degli Arabi (1) l'articolo concernente Euclide (2), articolo che rappresenta il più antico documento arabo di tal fatta:

EUCLIDE. Geometra; figlio di Naucrate figlio di Berenice (?); insegnò la geometria e si atteggiò ad autore in questo campo prima di Archimede e di altri; egli apparteneva ai filosofi esatti. — *Sul suo libro* « Degli elementi di geometria ». Il titolo di esso è στοιχεῖα, vale a dire Elementi di Geometria..... Questo libro venne poi commentato da Erone il quale cercò di snodarne le difficoltà..... Al-Kindî nel suo libro *Intorno agli scopi del libro di Euclide* ricorda che questo libro era stato scritto da un uomo di nome Apollonio (?) il Carpentiere e diviso in 15 sezioni, ma che col tempo era divenuto antiquato ed aveva bisogno di miglioramenti; allora uno dei re di Alessandria si decise a studiare la geometria; appunto in quest'epoca viveva Euclide ed a lui venne commesso di rifondere il libro e commentarlo; una cosa e l'altra egli fece, epperò è a lui che quel libro viene oggi attribuito. Più tardi Ipsicle, discepolo di Euclide, trovò due altri libri, il XIV ed il XV, e li portò al re; essi vennero aggiunti all'opera. Tutto questo accadde in Alessandria.

Fra gli scritti di Euclide si trovano poi: Il libro dei fenomeni (celesti). Il libro sulle diversità delle immagini (Ottica). Il libro delle quantità date (Dati). Il libro dei toni, conosciuto sotto il nome di Musica: *falso*. Il libro della divisione, migliorato da Tâbit. Il libro delle aggiunte (porismi): *falso* (3)

---

(1) Alludo al *Kitâb-al-Fihrist* (Libro degli indici) di Abû 'l-Faradsch Muhammed ben Isahâk noto sotto il nome di Ibn Abî Ia^{c} kûb an Nadîm, la cui parte principale fu scritta nel 987 dell'E. v. e che venne edito a Lipsia negli anni 1871-72. Questo manuale — di cui il prof. G. Flügel ha pubblicato un riassunto fedele nel T. XIII (1859) p. 559-650, della *Zeit. d. deutsch. morgenländ. Gesellsch.* — è, come dice la prefazione, « il catalogo dei libri di tutti i popoli, cioè arabi e non arabi, che sono trascritti in lingua e scrittura araba sulle varie scienze, le notizie su i loro autori, la loro genealogia, le date di loro nascita, la durata della loro vita, il tempo della loro morte, i luoghi relativi, le loro qualità buone e cattive, dalle origini fino al nostro tempo cioè sino all'anno 377 (987-988). » Per la storia della scienza ha una speciale importanza la sezione VII, onde molto opportunamente il Suter la tradusse e pubblicò nel VII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1892). Da esso abbiamo già tolta una notizia (veramente poco degna di fede) su Platone (L. I, n. 55); in seguito verrà più volte utilizzato e citato coll'abbreviatura: *Suter-Fihrist.*

(2) Sopprimendovi però quanto si riferisce alle traduzioni ed ai commenti che di Euclide fecero gli Arabi.

(3) Il Suter ha rilevato (*Zeitschrift für Math. und Phys.*, Hist.-Litt. Abth., 1893 p. 194) come gli Arabi si servissero di due distinti vocaboli per rendere i due sensi

Digitized by Google

Il libro del canone (musicale) (1). Il libro della composizione (sintesi): *falso* Il libro della risoluzione (analisi): *falso* (2).

Ci mancano i mezzi che sarebbero necessarii per discutere a parte le asserzioni contenute in questo squarcio: vogliamo soltanto osservare che quelle relative alla mancanza di originalità degli *Elementi* non contraddicono a quanto sappiamo intorno ai geometri greci precursori di Euclide, e che non vi è ragione di rifiutarvi fede in base all' osservazione che ivi Apollonio è considerato come anteriore ad Euclide, dal momento che l' esame accurato di tutto il *Kitâb al-Fihrist* mostra che chi lo scrisse non confondeva (3) l' ignoto Apollonio *il Carpentiere* e col grande Apollonio *Pergeo*.

6. Con ciò resta esaurita la disamina dei documenti intorno ad Euclide che gli antichi ci trasmisero: essi sono così scarsi ed insignificanti che è vano tentare di ricostruire col loro ajuto la biografia di questo scienziato; soltanto ci abilitano a ritenere che la sua esistenza cade fra i primi discepoli di Platone e Archimede; quindi egli fiorì verso il 300 a. C. Educato probabilmente ad Atene, dove tuttora era accesa la fiaccola della ricerca scientifica, egli in Alessandria fondò una scuola ed ivi passò una vita tranquilla all' ombra del trono dei Lagidi. Il nostro Euclide non deve adunque scambiarsi con Euclide da Megara, contemporaneo e costante ammiratore di Socrate, vissuto

---

che i greci attribuivano alla parola *porisma*; uno di esse significa « scoperta di ciò che si cerca » e l'altro « frutto » o « utilità »; il primo corrisponderebbe quindi a quei porismi che assomigliano ai problemi e il secondo ai corollarii; è il primo che viene usato nel testo. L' epiteto *falso* di cui viene decorata l' opera relativa di Euclide significa che gli Arabi ritenevano [come vedremo (n.[1] 27-8), senza ragione] che quell' opera a torto fosse stata attribuita ad Euclide.

(1) κατατομὴ κανόνος.

(2) Suter-Firhist p. 16-17.

(3) Ivi pag. 49, nota 46. L' opinione opposta ha il Klamroth: si vegga il lavoro *Ueber die Auszüge der griechischen Schriftsteller bei al-Jaᶜqûbî* (Zeit. d. deut. morg. Ges. T. XLI, p. 419, nota), dal quale si possono anche ricavare dei dati interessanti intorno allo stato in cui gli Arabi conobbero gli *Elementi*.

Digitized by Google

quindi circa un secolo prima. Tale avvertimento può sembrare superfluo a più d' un lettore: se non l' abbiamo taciuto è che ricordiamo come, a partire da Valerio Massimo, contemporaneo di Tiberio, delle persone per sapere eccellenti — fra esse basti il ricordare il Petrarca (1) e il Regiomontano (2) — non abbiano saputo evitare questa fantastica identificazione; la quale è visibile anche in molte edizioni degli *Elementi,* specialmente in quelle che, nel secolo XVI (3), vennero fatte in base alle edizioni di Campano (1482) (4) e Zamberti (1516) (5); essa scomparve soltanto più tardi per merito del Commandino (6) e del Clavio (7) i quali per primi rilevarono quel grave errore.

7. La celebrità mondiale di Euclide è in massima parte dovuta ai suoi *Elementi* (*στοιχεῖα*) (8), opera che per la diffusione che ebbe — nell' originale e mediante traduzioni in tutte le

---

(1) Il quale nel *Commento alla Divina Commedia* scrisse: « Euclide geometra onde si fosse nè di che parenti disceso non so, ma assai appare per Valerio Massimo nel suo VIII libro, capitolo XII, lui essere stato contemporaneo di Platone, e perciocchè insino ne' nostri dì è perseverata la fama sua puote assai essere manifesto lui avere in geometria ogni altro filosofo trapassato. »

(2) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, II, p. 239.

(3) Ib. id. p. 91, 267, 336.

(4) Ib. id. p. 311.

(5) *Euclidis Elementorum libri XV una cum scholiis antiquis* (Pisauri 1572). Pref.

(6) *Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI. de regulari solidorum comparatione.* (Romae 1574).

(7) Cito ad esempio le edizioni italiane del Tartaglia, di cui la più antica è del 1543.

(8) Intorno al significato di questa parola v. L. I, n. 75. Si aggiunga che secondo il dotto editore di Pappo, sotto l' appellativo di στοιχεῖα gli antichi comprendevano una serie di opere fondamentali pei varii rami delle matematiche — quali sarebbero le *Coniche* di Aristeo e forse quelle di Apollonio, i *Luoghi piani* di questo, i *Fenomeni* di Euclide e via dicendo — e per distinguerle dall' opera di Euclide designarono questa col nome di τὰ πρῶτα στοιχεῖα (Pappo ed. Hultsch. *Index graecitatis* p. 103; v. anche *Repertorium der litterarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angew. Math.*, T. II, Leipzig 1879, p. 323).

Digitized by Google

lingue conosciute (1) — trova rivali soltanto nella *Bibbia* e forse nella *Divina Commedia*, opera a cui si deve se per molti *Euclide* sia sinonimo di *Geometria* come *Vignola* è sinonimo di *Architettura*. In essa Euclide non adunò tutto il sapere geometrico de' suoi tempi (cfr. il brano di Proclo riferito nel n. 4), ma soltanto quelle proposizioni che si debbono considerare siccome ingredienti, diretti o indiretti, di tutte le verità geometriche, il cui ufficio può quindi equipararsi a quello delle lettere dell'alfabeto nella formazione delle parole (2). Egli divise la sua opera in tredici libri, contenenti in totale 465 proposizioni, cioè 93 problemi e 372 teoremi. I primi quattro libri ed il sesto si riferiscono esclusivamente alla geometria del piano, mentre gli ultimi tre quasi completamente (3) alla geometria dello spazio; nel libro V è esposta la teoria delle proporzioni e nel X quella di un' importante classe di linee irrazionali; finalmente i libri VII-IX concernono l' aritmetica dei numeri razionali. Alla geometria a due dimensioni appartengono 163 proposizioni e 60 alla geometria a tre dimensioni; 25 alle proporzioni, 102 all' aritmetica e 115 alle linee irrazionali anzidette. Malgrado questa varietà di argomenti l' opera di Euclide è, a parer nostro, un tutto organico e di indole essenzialmente geometrica: ivi infatti, mentre la geometria ci si presenta siccome una disciplina autonoma, indipendente anche dalla scienza dei numeri, per converso (non soltanto la teoria delle proporzioni (4) e quella degli irrazionali, ma anche) l' aritmetica fa appello alla geometria per avere da essa

---

(1) Basti dire che fin dalla prima metà del sec. XVII ne venne fatto un riassunto in cinese: v. *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero ecc. con G. A. Mangini, pubblicato ed illustrato da* A. Favaro (Bologna 1886) p. 108, nota 4. Cfr. anche *Journal asiatique*, V Serie, T. XV, p. 279.

(2) Come nota giustamente il Tannery (*Le géométrie grecque*, Paris 1887, p. 136); il quale rileva eziandio che le lettere dell' alfabeto venivano dai Greci pure denominate στοιχεῖα.

(3) Eccettuate cioè le prop. 1ª, 2ª e 16ª del Libro XII e le prime dodici del XIII.

(4) Cfr. L. I, n. 21, introduzione.

Digitized by Google

a prestito parte delle sue denominazioni e degli ausiliari per le dimostrazioni; noi crediamo pertanto priva di solido fondamento l' opinione (1) secondo cui i libri VII-X degli *Elementi* avrebbero in origine costituito un' opera a sè, testo di aritmetica nelle scuole greche, che posteriori commentatori si sarebbero arbitrati di inserire nel posto in cui oggi la troviamo.

8. Il testo degli *Elementi* è giunto sino a noi completo, ma non senza avere sofferto delle modificazioni e ricevuto delle aggiunte per parte dei ricopiatori greci, dei traduttori arabi, dei commentatori dell'una nazione e dell'altra; l'entità di queste alterazioni venne giudicato in modo variabile e non sempre conforme al vero, come ora brevemente esporremo (2).

Teone Alessandrino (IV sec. dell'E. v.), in un passo del parziale commento di cui corredò l'*Almagesto* di Claudio Tolomeo (3), si dice autore di una *redazione* degli *Elementi di Euclide*, asserzione che viene confermata da un gran numero di manoscritti degni di fede. Ora questa notizia fece credere tanto a Boezio quanto ai primi editori di Euclide che negli *Elementi* gli enunciati delle varie proposizioni appartenessero ad Euclide e le dimostrazioni a Teone; donde la ragione di certe edizioni degli *Elementi* ove i teoremi sono esenti da dimostrazioni, edizioni che vengono presentate quasi come una restituzione dell' opera originale; donde anche la ragione della libertà con cui molti editori modificarono i ragionamenti contenuti negli *Elementi*, essendo convinti che così facendo non alzavano su Euclide una mano sacrilega; e

---

(1) Flauti, *Preliminare agli Elementi di Euclide* (Napoli 1816) p. XXXIII.

(2) Cfr. Heiberg, citate *Studien*, p. 174 e seg. Gow, *A short History of greek Mathematics* (Cambridge 1884) p. 199 e seg. Per giudicare lo stato attuale del testo degli *Elementi* il migliore sistema consiste nel paragonare le proposizioni ivi contenute con le citazioni letterali che delle stesse fecero antichi scrittori; ma i risultati che così si ottengono sono di mediocre entità perchè i casi in cui si può fare un confronto della detta specie sono poco numerosi.

(3) *Commentaire de Théon d' Alexandrie sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée; trad. Halma* (Paris 1822-25) T. I, p. 201.

Digitized by Google

quest'opinione fu esagerata al punto che molti — fra cui basterà citare il Ramus — si credettero in diritto di asserire che Teone nella sua redazione degli *Elementi* utilizzò il lavoro di Euclide in misura analoga a quella in cui Euclide si servì dei trattati anteriori (1). Ma l'esame del *Commento* di Proclo ed il confronto della redazione di Teone con altre anteriori (2) dimostra che tutti questi apprezzamenti sono infondati; ed è merito di Giovanni Buteo di avere per primo sostenuto e dimostrato (3) che Teone non può avere arrecato agli *Elementi* se non modificazioni di secondaria importanza, deve anzi essersi limitato ad aggiungere quale piccola spiegazione, nell'intento forse di rendere quell'opera più adatta a servire di testo alle proprie lezioni.

Per quanto poi concerne l'entità delle modificazioni arrecate dagli Arabi (4), ben poco di attendibile se ne sapeva sino a poco fa; ma di recente un distinto orientalista, M. Klamroth, studiò a fondo la questione e si credette autorizzato a concludere (5) che non meno di ventisei proposizioni e molte definizioni del testo pervenutoci a mezzo dei Greci furono interpolate e che, specialmente nei libri XI-XIII, le dimostrazioni originali

---

(1) « Sic enim Pytagorae Hippocrates, Hippocratis Leo, Leonis Theudius, Theudii Hermotimus, Hermotimi Euclides, Euclidis Theon στοιχεἰωσιν retexuit et emendavit ». *Scholae mathem.* Basil. 1569, p. 77.

(2) La più celebre fra esse è contenuta nel Ms. Vat. 190 ed ha servito di base all'edizione di F. Peyrard: *Les Oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en français d'après un manuscrit très-ancien qui avait resté inconnu jusqu'à nos jours* (I Vol., Paris 1814; II, 1816; III, 1818).

(3) Ioan. Buteonis, *De quadratura circuli. Eiusdem annotationum opuscula in errores Campani, Zamberti, Orontij, Peletarii, Io. Penae interpretum Euclidis.* Lugduni 1559, p. 209-212.

(4) Com'è noto, le più riputate versioni arabe di Euclide sono quella di Haġġâġ ibn Jûsuf ibn Matar e quella di Ishâq ibn Hunein, fatte la prima in principio e la seconda in fine del I Sec. dell'E. v. La traduzione che porta il nome di Nasîr-ed-Dîn (morto nel 1273) è piuttosto un rimaneggiamento che una versione.

(5) Nell'importante lavoro intitolato *Ueber den arabischen Euklid* (Zeitschrift der deut. morgenl. Gesellschaft, T. XXXV, p. 270-326).

Digitized by Google

vennero sostituite con altre più complicate. Sembra però (1) che questo giudizio si debba accogliere con qualche riserva, perchè: 1.° nulla assicura che gli Arabi non abbiano mutilato il testo di Euclide, sospetto questo che vien rafforzato osservando che nei manoscritti arabi non si rinvengono cose citate da Proclo; 2.° la tradizione di questi manoscritti risale ad un' epoca non più antica di quella a cui giungono i mss. greci. Non si hanno dunque finora decisive ragioni di preferenza per le redazioni di fonte orientale; per concludere se ve ne siano o non, sarebbe opportuno che anche i matematici non orientalisti giungessero a conoscerne le principali, onde è degno di encomio la pubblicazione e traduzione della più antica fra esse, che venne ai dì nostri intrapresa (2).

A queste poche notizie intorno alla storia del testo degli *Elementi* (storia che si può dire abbia oggidì una letteratura sua propria) dobbiamo quì limitarci e rimandiamo il lettore desideroso di maggiori particolari all' eccellente edizione critica che di essi possediamo (3) e specialmente ai *Prolegomena* con cui si apre l' ultimo volume di essa. — Nè crediamo di doverci diffondere ad enumerare e descrivere le principali edizioni e versioni di Euclide perchè, così facendo, abbandoneremmo la storia per la bibliografia (4) o saremo trascinati a trattare un

---

(1) Heiberg, *Die Arabische Tradition der Elemente Euklid' s* (Zeit. f. Math. u. Phys., 1884, Hist.-lit. Abth. p. 1-22); inoltre *Philologus* T. XLIII, 1884, p. 477-8); le cui conclusioni vennero più tardi nel loro complesso accettate dal Klamroth stesso: cfr. *Zeit. d. deutsch. morg. Ges.* T. XLII (1888) p. 4 nota.

(2) Besthorn et Heiberg, *Codex Leidensis* 399, 1. *Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschhadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt.* I, 1. (Hauniae 1893). Di questa edizione rese conto con competenza H. Künssberg in *Göttingische gelehrte Anzeigen* 1893 (p. 828-846) e H. Suter in *Zeitschrift f. Math und Phys.* 1893, p. 191-194.

(3) *Euclidis Opera Omnia ediderunt* I. L. Heiberg et H. Menge. *Euclidis Elementa. Edidit et Latine interpretatus est* I. L. Heiberg. Lipsiae. Vol. I, 1883, Vol. II, 1884, Vol. III, 1886. Vol. IV, 1885, Vol. V, 1888.

(4) Chi desiderasse sopperire al nostro silenzio ricorra alle opere seguenti (oltre a quelle dianzi citate): Kästner, *Geschichte der Mathematik* (Göttingen 1796-1800).

Digitized by Google

tema, per fermo assai interessante, ma che ci allontanerebbe dall' assunto nostro, a descrivere cioè gli sforzi fatti dai varii popoli civili per passare dal Mare Morto dell' ignoranza in fatto di geometria al Giordano purificatore della verità (1).

Premesse queste notizie intorno al modo ed allo stato nei quali ci pervenne il testo degli *Elementi*, passeremo ad esaminare partitamente i tredici libri in cui quest' opera si divide. Nell' intraprendere questa disamina ci si affaccia il ricordo delle lodi sconfinate (2) e dei vituperii non rari di cui quell' opera venne fatta segno, delle opinioni disparatissime che vennero emesse sul suo valore intrinseco e didattico (3); siamo quindi assaliti dal timore che nel nostro pur che sia giudizio venga a

---

Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schediasma historicum* (Halae 1823). Wenrich, *De auctorum graecorum versionibus et commentariis syriacis arabicis persicisque commentatio* (Lipsiae 1842). Wüstenfeld, *Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische* (Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1877, Hist.-phil. Klasse, XXII Bd.). Weissenborn, *Die Uebersetzungen des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelard von Bath* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, III Heft. 1880). Eneström, *Notices sur les versions latines des eléments d' Euclide publiées en Suède* (Bibl. math. 1884; Bullettino di Bibliografia ecc. T. XVIII, 1885). Heiberg, *Ein Palimpsest der Elemente Euklids* (Philologus XLIV, 1885). Steinschneider, *Euklid bei den Arabern* (Zeit. für Math. u. Phys., 1886, Hist.-Litt. Abth. p. 81-110). Riccardi, *Saggio di una Bibliografia Euclidea* (Mem. dell' Accademia di Bologna, Serie IV, T. VIII e IX, Serie V, T. I e III). Steinschneider, *Miscellen zur Geschichte der Mathematik* (Bibl. math. 1889, p. 36). Heiberg, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter* II (Zeitschrift f. Math. u. Phys., 1890, Hist. lit. Abth. p. 48-58 e 81-100). Suter, *Der V Band der arabischen Bücher der vice-königlichen Bibliothek in Kairo* (Zeitschrift fur Math. u. Phys., Hist.-lit. Abth. 1893, 1-24 e 42-57).

(1) Un gran numero di dati su questo importante argomento si trovano nel II Vol. delle *Vorlesungen* di M. Cantor.

(2) Cfr. le prefazioni alle edizioni degli *Elementi* fatte da Clavius, Keill, Gregory, Flauti, ecc.

(3) Si vegga il mio articolo *A. I. G. T.* nel T. V (1889) del *Periodico di matematica per l' insegnamento secondario* e l' altro lavoro più esteso *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare* faciente parte dell' VIII Vol. (1893) della stessa raccolta.

Digitized by Google

nostra insaputa ad introdursi qualche elemento personale sufficiente ad offuscare l' imparzialità che è dote indispensabile in qualunque storico; epperò sentiamo il bisogno d' appoggiarci ad un codice per redigere qualunque opera matematica, da tutti accettato per tale in grazia della sua indiscutibile eccellenza, quello cioè che Pascal fece conoscere in alcune pagine del celebre saggio che tratta *De l' esprit géométrique* (1). Tenendone sempre presente gli articoli, passiamo a descrivere e criticare il contenuto degli *Elementi*.

9. Euclide dà principio al proprio insegnamento geometrico esponendo una serie di proposizioni, alcune delle quali servono a dichiarare il significato dei termini tecnici, altre lo autorizzano a compiere certe operazioni geometriche, di altre infine il lettore deve percepire la verità senza il sussidio di alcuna dimostrazione. Tale serie decomponesi in conseguenza in tre gruppi di cui il primo comprende le *definizioni* (Ὅροι), il secondo i *postulati* (Αἰτήματα) ed il terzo le *nozioni comuni* (Κοιναὶ ἔννοιαι).

Al primo gruppo si possono muovere alcune critiche che, essendo di qualche gravità, non possiamo passare sotto silenzio: I. Parecchie definizioni mancano di chiarezza e pre-

---

(1) « *Règles pour les définitions:* 1. N' entreprendre jamais de définir aucune des choses tellement connues d' elles mêmes, qu' on n' ait point de termes plus clairs pour les expliquer. 2. N' omettre aucun des termes un peu obscurs et équivoques, sans définitions. 3. N' employer dans la définition des termes que de mots parfaitement connus, on déjà expliqués. — *Règles pour les axiomes:* 1. N' omettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu' il puisse être. 2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d' elles mêmes. — *Règles pour le démonstrations:* 1. N' entreprendre de démonstrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d' elles mêmes qu' on n' ait rien de plus clair pour les prouver. 2. Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n' employer à leur preuve que des axiomes très-evidents ou des propositions déjà accordées on démontrées. 3. Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'equivoque des termes que les définitions ont restreint ». *Oeuvres complètes de B. Pascal*, T. III (Paris 1889) p. 178. È da notarsi che Pascal aggiunge non essere strettamente necessario osservare la prima delle regole di ciascuna di queste tre categorie.

Digitized by Google

cisione; tali sono quelle (1ª, 2ª, 4ª, 14ª) di punto, linea in generale, linea retta e figura: sembra anzi che Euclide stesso lo abbia avvertito, giacchè le def. 3ª e 6ª, non potendo considerarsi per definizioni di punto e retta, dal momento che dell' uno e dell' altra parlano già le def. 1ª e 4ª, devono riguardarsi come ulteriori chiarimenti necessarii all' intelligenza di queste ultime. Resta così nello stesso tempo avvertito che Euclide — al pari di alcuni suoi contemporanei cultori di altre discipline — non era sempre in grado di discernere la vera natura logica delle proposizioni assunte come fondamentali. II. Alcune definizioni furono giudicate superflue (1), mentre altre includono certi teoremi o ne esigono la conoscenza. Così la def. (10ª) di angolo retto presuppone la costruzione della perpendicolare (prop. 10ª e 11ª del I libro) chè altrimenti non si è certi dell' esistenza di un tale angolo; invece la 17ª abbraccia il teorema — di Talete (L. I, n. 7) — che afferma ogni diametro bisecare un cerchio e la circonferenza; similmente dicasi della def. (23ª) di rette parallele; d' altronde la classificazione dei triangoli in base alla grandezza degli angoli, affinchè abbia valore e sia riconosciuta per esauriente, esige la previa conoscenza di non pochi teoremi. III. La forma in cui vengono enunciate le definizioni è scelta con criterii variabili e non è sempre pregevole; così, mentre il centro di un circolo è definito (def. 16ª) separatamente dal circolo stesso (def. 13ª) e dal semicircolo (def. 18ª), una sola definizione (la 20ª) include le tre specie di triangoli in base alla lunghezza dei lati, un' altra (la 21ª) le tre specie di triangoli in base alla grandezza degli angoli, ed una terza (la 22ª) tutte le varie specie di quadrangoli (2). Si avverta di più (3) che Euclide definisce il ῥόμβος, del quale

(1) Le def. 8.ª e 13.ª furono infatti soppresse dal Simson e dai suoi imitatori.

(2) Le necessità di modificare questo punto degli *Elementi* fu avvertita, come vedremo, fino dai tempi di Erone Alessandrino.

(3) P. Tannery, *Sur l' authenticité des axiomes d' Euclide* (Bull. des Sc. math. Serie II, Vol. VIII, 1884, 1ère Partie. p. 162-175).

Digitized by Google

non si occupa più in seguito, e il ῥομβοιδὲς, quadrangolo che egli indicherà poi sempre col nome di παραλληλογράμμον (1). — Tutto ciò induce a supporre che il testo da noi posseduto delle definizioni abbia più del resto subita l' influenza modificatrice dei ricopiatori, in generale più audaci nel ritoccare i preliminari che nel modificare i ragionamenti e le costruzioni, e consiglia di essere cauti nell' imputare ad Euclide le imperfezioni che vi si trovano e non soverchiamente timidi nel toglierle. In particolare nulla assicura che a ragione venga a lui fatto colpa (2) di avere raccolti in principio degli *Elementi* tutte le definizioni invece di distribuirle nel corso dell' opera (cfr. n. 20).

Questa circospezione che riteniamo indispensabile nel pronunciarci intorno al primo gruppo di proposizioni preliminari, deve esserci compagna anche nell' esame degli altri due, chè altrimenti come non far discendere Euclide dal piedestallo, su cui lo collocarono i suoi fautori, trovandosi di fronte a gravi incongruenze? Come infatti giustificarlo altrimenti di avere ascritto fra gli assiomi — dopo le tre proposizioni che accordano la facoltà di congiungere due punti con una retta, di prolungare indefinitamente una retta limitata e di descrivere un cerchio datine il centro ed il raggio, proposizioni che determinano completamente le operazioni geometriche lecite (3) — l'eguaglianza

---

(1) Notisi a questo proposito che del *trapezio* — figura notissima agli antichi Egiziani (v. L. I, App. II) — Euclide non parla; ma designa col nome di τραπέζια tutti i quadrangoli non aventi alcuna regolarità. Cfr. Proclo-Taylor I, 176; Weissenborn, *Das Trapez bei Euklid, Heron und Bhramegupta* (Abh. zur Gesch. der Mathematik, II Heft 1879); Heiberg, *Philologus* XLIII, 1884, p. 480.

(2) « Neque enim natura initio sylvae omnium arborum radices praeposuit, nec architectus initio civitatis omnium aedificiorum fundamenta collocavit, sed suis arboribus suas radices natura, suis edificiis sua fundamenta architectura subjecit. Itaque debuerat Euclidis definitiones trianguli triangolurum doctrinae praeponere; eamque viam in caeteris principiis servare ». P. Ramus, *Scholae mathem.* (Francf. 1627) p. 98.

(3) Euclide si credette costretto a indicarle esplicitamente perchè, come opina lo Zeuthen (*Die Lehre der Kegelschnitte in Alterthum*, Kopenhagen 1886, p. 271), prima erano ammesse ancora altre operazioni? — Osserviamo a questo proposito

Digitized by Google

di tutti gli angoli retti e poi il celebre postulato delle parallele? Per ragioni già addotte, non insisteremo nel criticare Euclide di avere equiparate queste due proposizioni alle tre precedenti; ma come non rilevare che egli pose al medesimo livello uno scoglio contro cui vennero a urtare i più esperti piloti (la celebre *crux geometrica* degli *Elementi*) (1) ed uno che ogni principiante è capace di evitare, come quindi non sentirsi trascinati ad accettare l' ipotesi del Gregory secondo cui Euclide in origine avrebbe messo il postulato delle parallele come corollario alla prop. 28ª del I libro? — Importa da ultimo rilevare (2) come Euclide, oltre alle tre operazioni dianzi indicate (3), nel corso delle sue ricerche ritenga lecito di determinare i punti (dato che esistano) comuni a due rette, a una retta e una circonferenza o a due circonferenze (4); a torto egli si credette dispensato dall' enunciarli accanto ai tre surriferiti.

Nelle stesse, se non in peggiori, condizioni ci troviamo di fronte al terzo gruppo di proposizioni preliminari (5). Nella prima

---

che la riduzione a due (riga e compasso) degli istrumenti concessi al geometra si dovrebbe ritenere dovuta a Platone se si potesse trovare qualche documento che giustificasse un' asserzione di Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, p. 156). Riguardo all' invenzione del compasso, Ovidio afferma (*Metam.* VIII. 247-9) che Dedalo

> Anch' ei primier due ferree lastre in nodo
> Giunse; onde egual fatto del raggio il metro,
> Stesse una punta; e dasse l' altra il cerchio.

(La versione mètrica adoperata quì è quella di Giuseppe Solari, Genova 1814).

(1) Se una retta, cadendo su due altre, forma gli angoli interni dalla stessa parte minori in somma di due retti, queste rette prolungate s' incontreranno dalla parte in cui angoli stessi sono in somma minori di due retti.

(2) Cfr. Schubert, *Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen* (Hamburg 1889) p. 12-13.

(3) Quest' ultimo postulato è una conseguenza dei due precedenti.

(4) Notiamo col Kempe (*How to draw a Straight Line*, London 1877, p. 47 e seg.) che la seconda si può ridurre alla prima servendosi della terza.

(5) Ricordiamo al lettore che noi ci riferiamo sempre all' ed. dell' Heiberg, dalla quale sono soppresse non poche nozioni comuni che altri editori ritennero invece per euclidee.

Digitized by Google

di esse è enunciata la proprietà fondamentale dell' eguaglianza (se $a = b$ e $a = c$, è pure $b = c$) e nelle due successive l' univocità dell' addizione e della sottrazione (se $a = b$ e $c = d$ è pure $a \pm c = b \pm d$); ad esse tien dietro una che si sospetta essere stata interpolata (se $a \gtrless b$ e $c = d$ sarà $a + c \gtrless b + d$), poi l' affermazione dell' eguaglianza dei doppii di cose uguali, a cui un commentatore aggiunse (togliendola forse da un passo di una dimostrazione ove era applicata) l' eguaglianza della metà di cose uguali. Dopo questa collezione di verità, il cui scambievole legame è evidente (1), si trovano due altre proposizioni; una geometrica (che, secondo il Veronese, sarebbe una definizione (2)) affermante l' eguaglianza di due cose coincidenti (cfr. anche più avanti n. 12), l' altra generale affermante essere differenti il tutto ed una parte. Sono anche queste interpolate? lo farebbe supporre averne Erone, come diremo a suo tempo, propugnata la soppressione. Ma ancor più probabile è che un commentatore abbia estratto dalla dimostrazione della prop. 4ª del libro I la proposizione " due rette non comprendono uno spazio „ e, introducendola fra le nozioni comuni, abbia dato un complemento necessario alla definizione di retta (3): ammesso ciò Euclide avrebbe posta in non cale la prima delle regole di Pascal sugli assiomi (4).

---

(1) *Fondamenti di geometria* ecc. (Padova 1892) p. 54 nota.

(2) Perchè così resta assodato che due punti individuano una retta.

(3) Certe edizioni contengono altre nozioni comuni che sembrano aggiunte per analogia da ricopiatori.

(4) La questione dell' autenticità dei prolegomeni agli *Elementi*, che noi abbiamo soltanto sfiorata, venne trattata diffusamente dal Tannery (nella mem. dianzi cit.), dall' Heiberg (ed. cit. T. V, p. LXXXIX) e dal Mansion (*Sur les postulats et les axiomes d' Euclide*, Annales de la Soc. scient. de Bruxelles, T. XIV, II Partie, p. 35-45). Il primo di questi scienziati sostenne l' impossibilità di attribuire ad Euclide le *nozioni comuni* e l' ultimo che i sei *postulati* ed i nove *assiomi* debbono attribuirsi a lui. Per altre osservazioni sullo stesso tema si vegga poi: Clifford *The postulates of the Science of space in Lectures and Essays* Vol. I (London 1875) p. 295-340. Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch*, II Bd., I Thl. (Leipzig 1891) p. 540-558. Zeuthen, *Forelaesning over Mathematikenshistorie* (Kjobenhavn 1893) p. 100-122.

Digitized by Google

10. I tre postulati di costruzione richiesti da Euclide impongono al geometra di ricondurre ad una combinazione delle tre uniche operazioni lecite tutte le altre costruzioni geometriche. Le più semplici fra queste consistono nel condurre a partire da un punto dato una retta di lunghezza conosciuta e nel tagliare da una data retta limitata una parte eguale ad una retta data minore della precedente; e siccome se ne ha bisogno continuamente, così di esse si occupa Euclide in principio degli *Elementi*, dopo avere insegnata la costruzione di un triangolo equilatero di dato lato che gli è necessaria nel corso della soluzione de' citati problemi. Nel seguito del I libro Euclide espone una serie di proprietà dei parallelogrammi e dei triangoli, intercalando fra essi la soluzione di alcuni problemi col mezzo dei quali egli si pone in grado di non adoperare alcuna costruzione che non abbia dianzi insegnato ad eseguire. Le proprietà citate si riferiscono o a triangoli speciali (5ª e 6ª) (1) o a triangoli qualunque (16ª-18ª, 20ª, 21ª e 32ª); trattano del confronto fra triangoli (7ª, 24ª e 25ª) o in particolare dei casi di eguaglianza (4ª, 8ª e 26ª) (2); riflettono gli angoli adiacenti od opposti al vertice (13ª-15ª), le parallele (27ª-30ª), i parallelogrammi (33ª-34ª) ed aggiungeremmo *il gnomone* (43ª) ove non ricordassimo che questa figura è definita soltanto nel libro II degli *Elementi*. Dell'eguaglianza di due parallelogrammi trattano le prop. 35ª e 36ª, dell'equivalenza di due triangoli le 37ª-40ª e del confronto di un parallelogramma con un triangolo la 41ª. Invece i problemi citati (di due dei quali la soluzione era già nota ad Oinopide; v. L. I, n. 33) hanno per iscopo di bisecare un angolo o una retta limitata (9ª, 10ª), di tracciare per un punto dato la perpendicolare o la parallela ad una retta data (11ª, 12ª, 31ª), di costruire un triangolo di dati lati (22ª), o un angolo di cui sia conosciuto il vertice e un lato (23ª), o un

(1) Come sappiamo la prima è dovuta a Talete (L. I, n. 7).

(2) L'ultima è forse dovuta a Talete (L. I, n. 8).

Digitized by Google

quadrato di dato lato (46ª) o finalmente di costruire un triangolo o un parallelogramma soggetti a certe condizioni. — Questo riassunto di un libro così conosciuto potrà sembrare superfluo a taluno; se non lo abbiano soppresso è perchè esso ci permette di osservare che, siccome detto libro ha l'aspetto piuttosto di una puddinga che di un cristallo, così è spontanea la domanda: quali criterii diressero Euclide nello sceglierne e ordinarne la materia? *Quanto all' ordine,* è facile vedere che Euclide si attenne fedelmente al precetto contenuto nella seconda delle regole per le dimostrazioni enunciata da Pascal, è facile convincersene esaminando una specie di tavola genealogica delle proposizioni del I libro degli *Elementi* compilata da uno strenuo campione del metodo euclideo (1). *Quanto alla materia,* è stata emessa l' ipotesi (2) che Euclide siasi proposto nel I libro degli *Elementi* di dimostrare rigorosamente ed in generale il teorema di Pitagora, al quale dianzi si era giunti per induzione attraverso a casi particolari; a sostegno di quest' ipotesi si osservi anzitutto che l' importanza eccezionale del teorema anzidetto fu avvertita dai Greci i quali (similmente a quanto facciamo noi) lo designarono ben presto con un nome speciale (3); si aggiunga che il I libro degli *Elementi* chiudesi appunto con il teorema testè citato (4) ed il suo inverso (47ª-48ª) e che tentando di applicare ad esso il metodo di analisi geometrica si ritrovano successivamente tutti i problemi e i teoremi (e persino le definizioni) esposte da Euclide (5), distribuiti in tanti gruppi ognuno dei quali è formato di proposizioni fra loro strettamente legate, mentre i varii gruppi appaiono estranei fra loro ove non si tenga

---

(1) Dodgson, *Euclid and his modern Rivals* (II ed. London 1885).

(2) Cfr. i pregevolissimi *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik von* L. F. Ofterdinger (Ulm 1860) p. 2-3.

(3) Θεώρημα τῆς νύμφης: v. P. Tannery, *La géom. gr.*, 1.ère Partie, p. 105.

(4) Ricordiamo che la dimostrazione che si legge negli *Elementi* appartiene a Euclide (L. I, n. 26).

(5) Escluse le prop. 42ª-45ª, a cui spetterebbe un posto nel II libro.

Digitized by Google

conto della loro qualità comune di ausiliarii nella dimostrazione del teorema di Pitagora. A sostegno di questa ingegnosa congettura aggiungiamo (1) che se ne possono emettere di analoghe per mettere in evidenza la struttura intima dei libri successivi: si può infatti ritenere che il II libro abbia per intento di generalizzare il teorema di Pitagora a triangoli obliquangoli, mentre i quattro seguenti cospirerebbero a dimostrare la possibilità di di sostituire nel teorema stesso ai quadrati sui lati tre figure qualunque purchè fra loro simili (*Elementi,* VI, 31).

Quali metodi di dimostrazione abbia preferiti Euclide è evidente, quelli cioè che con maggiore rapidità e rigore menano allo scopo (2). Fra essi spiccano il metodo di sovrapposizione e la riduzione all' assurdo; quello purgato da qualunque ingrediente meccanico, questo applicato quando era per naturalezza e semplicità superiore a qualunque altro; rileviamo anche, come affine a quest' ultimo, il *procedimento per esclusione,* col quale si costringe chi ascolta a riconoscere che la cosa non può essere diversa da quella che si è enunciata Nè è da tacersi che le prime ventisei proposizioni sono indipendenti dal postulato sulle parallele e che parecchii teoremi del I libro son collegati fra loro dalla legge delle reciproche (3).

11. La sostanza del I libro di Euclide doveva essere nota nella scuola di Crotone. Altrettanto può ripetersi pel II libro, che alcuni considerano per un commento al teorema di Pitagora; tale libro, che è assai più breve del I, comincia con due definizioni

---

(1) Queste osservazioni ci sembrano avere anche qualche valore didattico.

(2) Coloro che, per spiegare il procedere serrato delle argomentazioni di Euclide, ripetono con Clairaut (*Elémens de Géométrie*, Paris 1741, Pref. p. X-XI) che « ce géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés qui se faisaient une gloire de se refuser aux verités les plus évidentes; il falloit donc qu' alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane », commettono un grave errore storico, chè due secoli circa separano i sofisti da Euclide.

(3) Euclide non insegna però per ogni proposizione tutte quelle che ad essa sono per tal modo collegate: v. cfr. lo squarcio del *Commento* di Proclo citato al n. 4.

Digitized by Google

alle quali seguono dieci proposizioni — che l' Allman (1) ammette per note agli Egiziani — di grande importanza come quelle che servono di base a quello speciale algoritmo (oggi denominato *algebra geometrica*) (2) mediante cui i Greci riuscirono a risolvere senza il calcolo letterale quei problemi che si traducono oggi in equazioni di 1° e 2° grado, ma battendo una via che ha il suo perfetto riscontro nei nostri procedimenti algebrici. Se si conviene di indicare con a, b, ... delle rette, con ab il rettangolo avente per lati le due rette a e b e con a^2 il quadrato di lato a, le proposizioni succitate si possono enunciare simbolicamente come segue:

$$m(a+b+c+\dots)=ma+mb+mc+\dots;\ (a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2;$$

$$(a+b)a=a^2+ab;\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab;\ ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

$$(2a+b)b+a^2=(a+b)^2;\ (a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2;$$

$$4(a+b)a+b^2=\{(a+b)+a\}^2;\ a^2+b^2=2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right\};$$

$$(2a+b)^2+b^2=2\{a^2+(a+b)^2\}.$$

A suo tempo (L. V) vedremo come di esse Teone Smirneo abbia fatto uso frequente nelle sue ricerche aritmetiche, ma intanto rileviamo che il geometra del Museo le applica nelle quattro ultime proposizioni del II libro degli *Elementi*, dalle quali s' impara un primo modo per dividere una retta in media ed estrema ragione (3) (14ª), o per trovare la media proporzionale fra due rette date (11ª), o per esprimere il quadrato del lato

---

(1) *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin 1889) p. 37.

(2) Cfr. il n. 1 dell' *Appendice* al presente libro.

(3) Questo modo di divisione non è però designato con un nome speciale che nel VI Libro.

Digitized by Google

di un triangolo qualunque in funzione degli altri due lati (12ª e 13ª) (1).

12. Nel III libro Euclide imprende lo studio dell' unica linea che ebbe accesso negli *Elementi:* la circonferenza. La materia di esso devesi probabilmente ai geometri del V Sec. a. C. i quali, sforzandosi di determinare l' area del circolo, sopperirono alla mancanza di cognizioni su una figura a cui nella Scuola di Pitagora erasi prestata poca attenzione (v. L. I, n. 52). Esso si apre con una serie di definizioni concernenti il circolo, le sue parti e le linee ad esso attinenti, definizioni di cui alcune non sono esenti da mende che ora segnaleremo. Anzitutto la proposizione " due circoli aventi i diametri od i raggi eguali sono eguali „ non merita il nome di definizione risultando essa dall' assioma 7.° del I libro " due cose coincidenti sono eguali „; la sua presenza potrebbe però considerarsi come una conferma dell' ipotesi (v. n. 9) che quest' ultimo assioma sia stato aggiunto dopo di Euclide. In secondo luogo le definizioni (4ª e 5ª) di *corde egualmente* o *diseguamente distanti dal centro*, potevano venire soppresse introducendo la fondamentale nozione di distanza di un punto da una retta che manca negli *Elementi*. In terzo luogo il definire per simili i segmenti che contengono angoli eguali è lecito soltanto dopo avere dimostrata l' eguaglianza di tutti gli angoli inscritti in un medesimo segmento circolare.

Il III libro insegna le proprietà delle corde di un circolo (2ª-4ª, 14ª-15ª, 28ª-29ª), le relazioni di posizione fra due cerchii (5ª-6ª, 10ª-13ª), il modo di confrontare le lunghezze delle congiungenti un punto con i varii punti della periferia di un cerchio posto con quel punto in un piano (7ª-9ª) e a risolvere in conseguenza dei problemi di massimo e minimo; alle tan-

---

(1) A partire dal II Libro i manoscritti recano per certe proposizioni delle doppie dimostrazioni di origine incerta, (cfr. Heiberg, nei *Prolegomena* della sua ed. di Euclide, p. LXXIX del T. V), le quali sono registrate nelle migliori edizioni degli *Elementi*. Le proposizioni del II Libro che sono in tale condizione recano i numeri 4, 7, 8 e 9.

Digitized by Google

genti si riferiscono le prop. 16ª, 18ª e 19ª di cui la prima ha dato origine, nel periodo di preparazione al calcolo infinitesimale, a discussioni interminabili sull'*angulus contingencie* (1); degli angoli col vertice nel centro o sulla periferia o formati da una tangente ed una corda si occupano le prop. 20ª-21ª, 26ª-27ª e 31ª-32ª, di segmenti circolari le 23ª-24ª, mentre dalla 22ª si apprende la proprietà caratteristica del quadrangolo inscritto in un cerchio. Termina il III libro un gruppo di tre teoremi che formano oggi la base della *teoria della potenza di un punto rispetto ad un cerchio;* Euclide li dimostra applicando le proposizioni di algebra geometrica esposti nel libro precedente ed altre prop. del III libro: da ciò si potrebbe essere indotti a pensare che Euclide abbia riunite in questo tutte le proposizioni necessarie per giungere alla suddetta terna di teoremi; noi però preferiamo ritenere che ivi Euclide abbia esposte tutte le proprietà del circolo che sono indipendenti dalla teoria delle proporzioni (2).

Nel III libro Euclide si serve non di rado, come nel I, del metodo apodittico quando (prop. 2ª-4ª, 5ª-6ª, 10ª-13ª, 16ª-22ª) si tratti di verificare delle proposizioni negative o di assodare col ragionamento dei teoremi di verità intuitiva; nè egli mancò di insegnare a trovare il centro di un dato cerchio (1ª), a tracciare la tangente in un punto di un dato cerchio (17ª), a determinare il cerchio di cui fa parte un dato segmento (25ª), a bisecare un arco (30ª) e a costruire un segmento circolare soddisfacente a date condizioni (33ª-34ª).

13. I medesimi metodi adoperati del III libro servono ad Euclide nel successivo a risolvere dei problemi relativi all'inscrizione (sottinteso *in un cerchio*) e alla circoscrizione (sottinteso *ad un cerchio*) di poligoni. Da tutto il contesto emerge

---

(1) Cantor, *Vorlesungen* T. II passim. G. Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* (Mantova, 1894) p. 20-28.

(2) Sono munite di doppia dimostrazione le prop. 10ª, 11ª e 31ª.

Digitized by Google

che Euclide sapeva esistere per ogni poligono regolare un cerchio inscritto ed uno circoscritto, ma egli non dimostra in generale nè una cosa nè l'altra; similmente, il cor. alla prop. 15ª mostra come a lui non fosse sfuggito che le tangenti ne' vertici di un poligono regolare inscritto formano un altro poligono regolare, ma neanche questa proposizione viene da lui dimostrata in generale. Prescindendo dai problemi 1° e 10°, che sono veri lemmi, i problemi trattati nel IV libro concernono l'inscrizione e la circoscrizione di un triangolo avente dati angoli (prop. 2ª, 3ª) — in particolare di un triangolo equilatero (4ª-5ª) — di un quadrato (6ª-9ª), di un pentagono, di un esagono o di un pentedecagono (1) (11ª-16ª) regolari. Dei molteplici corollari che si potrebbero trarre dalle costruzioni esposte da Euclide — costruzioni che probabilmente non erano tutte ignote ai Pitagorici che si occuparono di poligoni e di poliedri regolari (2) — gli *Elementi* contengono due soli: uno che insegna che il centro del cerchio circoscritto a un triangolo è esterno, appartenente al perimetro od interno secondochè il triangolo è ottusangolo, rettangolo o acutangolo, l'altro donde si apprende essere il lato dell'esagono regolare inscritto eguale al raggio (cfr. L. I, Appendice I, 2). Giova quì notare anche che, secondo un antico scolio (3), in questo libro, che sarebbe invenzione dei Pitagorici, si dimostra che la periferia del circolo è maggiore del triplo del diametro e che il cerchio non è i tre quarti del triangolo (regolare) ad esso circoscritto (4).

14. Esaurita così tutta la parte della geometria elementare che è indipendente dal concetto di misura, nel V libro degli *Elementi* Euclide getta le basi di una teoria delle proporziona-

---

(1) In base all'identità

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}.$$

(2) L. I, n. 22-24.

(3) *Euclidis Opera omnia*, Vol. V, p. 272; n, 2.

(4) Chi lo credeva?

Digitized by Google

lità *per grandezze qualunque* (1); quanta circospezione fosse necessaria nell'esporre tale teoria con pieno rigore e completa generalità, sì da potersi applicare anche a grandezze irrazionali, non fa mestieri dimostrare; quanto felicemente abbia vinte le difficoltà relative Eudosso da Cnido, al quale come sappiamo (L. I. n. 71) (2) si deve la primitiva redazione del V. libro degli *Elementi*, si desume osservando che, malgrado le critiche acute e reiterate a cui venne sottoposto (3), è tuttora ritenuto come guida eccellente per un insegnamento elementare, e che, malgrado gl' innumerevoli sedicenti miglioramenti che furono ad esso proposti (4), la generalità dei dotti fa eco alle parole di Simson: " nihil extare in toto elementorum operae proportionali doctrina subtilius inventum, solidius stabilitum, accuratius pertractatum „.

Come è facile immaginare, il libro V si apre con una serie di definizioni degli enti da studiare. Oltre a quelle di grandezza *parte* (*μέρος*) o *multipla* (*πολλαπλάσιον*) *di un' altra*, troviamo la definizione di *ragione* (*λόγος*) fra due grandezze della stessa specie (5) e poi quella di grandezze aventi fra loro una ragione (6). E poichè il concetto di ragione è da Euclide esposto in

---

(1) Cfr. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Miltelalter* (Leipzig, 1874) p. 389-98. Ofterdinger, *Ueber den Zusammenhang der Euclidischen Lehre von den geometrischen Verhältnissen mit den Anfängen de Exhaustions — Methode* (Ulm, 1889). Peano, *Les propositions du cinquième Livre d' Euclide reduites en formules* (Mathésis, T. X). Zeuthen, *Forelaesning* citate.

(2) Cfr. anche *Euclidis Opera omnia* Vol. V, p. 280-2, scolio n. 1.

(3) V. ad es. Barrow, *Lectiones Mathematicae XXIII in quibus principia matheseos generalia exponuntur*, 1653 (*The Mathematical Works of Isaac Barrow, edited by the Trinity College by* W. Whewell, Cambridge 1860, p. 15-23).

(4) I più rinomati, se non i più radicali, sono quelli esposti nel *Quinto libro degli Elementi di Euclide ovvero Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo da Vincenzo Viviani* (Firenze, 1674).

(5) Tolta forse a Democrito (v. L. I, n. 35) ed aspramente criticata dal Ramus che la giudicò « insignificantem et satis ineptam » (*Scholarum mathematicarum* Basil. 1569); Camerer (nella sua edizione di Euclide, Berlino 1825) e Hankel (op. cit. p. 359) la considerano per interpolata.

(6) Questa ha per effetto di restringere a grandezze omogenee il confronto necessario per determinare una ragione.

Digitized by Google

modo tanto nebuloso che non potrebbe condurre ad alcun risultato esatto, così Euclide si affretta a renderne possibile l'applicazione alla matematica col definire (def. 5ª) l'eguaglianza di due ragioni (1). L'eguaglianza di due ragioni guida alle nozioni di grandezze *proporzionali* (*ἀνάλογα*) e di *proporzione* (*ἀναλογία*); ora è notevole che questa non viene definita, solo si osserva (def. 8ª) che essa non può aver luogo fra meno di tre grandezze. Definite poi le ragioni *duplicata* (*διπλάσιος*) e *triplicata* (*τριπλάσιος*) *rispetto a una data* e le grandezze *corrispondenti* (*ὁμόλογα*) si considerano le ragioni *permutata* (*ἐναλλὰξ*) ed *inversa* (*ἀνάπαλιν*) di una data e quindi le operazioni di *composizione* (*σύνθεσις*), *sottrazione* (*διαίρεσις*) e *conversione* (*ἀναστροφὴ*); e la serie delle definizioni si chiude con quelle di *eguaglianza in ragione ordinata* (*δι' ἴσου λόγος*) *o perturbata* (*τεταραγμένη ἀναλογία*) cui dà luogo la considerazione di parecchi rapporti.

Tutte vengono applicate nel corso del V libro a far conoscere le proprietà più essenziali delle ragioni (2), le modificazioni che è lecito far subire ai termini di una ragione senza alterarla, le ulteriori conclusioni che si possono trarre dall'eguaglianza di due ragioni quando siano già note delle relazioni fra alcune delle grandezze considerate, i procedimenti per dedurre una proporzione da altre, le più salienti proprietà delle grandezze proporzionali, e simili (3). Per dimostrare queste proposizioni Euclide rappresenta le grandezze considerate col mezzo di segmenti rettilinei, ma le sue argomentazioni sono tanto generali che possono applicarsi a qualsivoglia classe di

---

(1) Indicando con $r(a, b)$ la ragione di a a b, Euclide dice essere

$$r(a, b) = r(c, d)$$

se, qualunque siano i numeri M e N, da $Ma \gtreqless Nb$ segue in corrispondenza $Mc \gtreqless Nd$.

(2) Notiamo ad esempio che Euclide (od Eudosso) avvertì la necessità di dimostrare come dalla definizione di eguaglianza di due ragioni risultasse essere eguali due ragioni eguali ad una terza.

(3) La prop. 19ª ha due dimostrazioni.

Digitized by Google

grandezze geometriche (1), quali sarebbero i rettangoli di data altezza, gli angoli di dato vertice o gli archi di una data circonferenza (2).

15. Le teorie esposte nel libro V ricevono subito un' importantissima applicazione nel successivo, destinato a far conoscere i rudimenti di una teoria che, benchè costituita in gran parte di verità che si saranno intuite non appena si ebbe il concetto di forma d' un oggetto indipendente della sua grandezza e che quindi saranno state note ai primi geometri greci, Talete e Pitagora (3), tuttavia per venire solidamente stabilita ebbe bisogno del genio di Eudosso da Cnido: intendiamo parlare della teoria della similitudine di figure piane. Com' è naturale, il libro VI comincia con una definizione di *figure simili*: definizione che lascia molto a desiderare perchè non tutte le condizioni ivi enumerate per la similitudine di due figure sono fra loro indipendenti (4); segue ad essa la definizione della divisione in media col estrema ragione (5), e finalmente una di *altezza di una figura* nella quale è dimenticata la terza delle regole di Pascal perchè ivi è usata la nozione di *base di una figura* non peranco esposta prima (6).

Le proposizioni estreme (1ª e 33ª) del libro in discorso hanno fra loro una certa analogia, facendo conoscere l' una la proporzionalità alle basi di triangoli o parallelogrammi della stessa altezza, l'altra la proporzionalità degli angoli al centro agli archi intercetti. Fondamentale è la 2ª, a torto attribuita spesso a Talete,

---

(1) « In libro quinto », osserva infatti il Gregory, « quantitates literis designatae non magis debent esse lineae, quam aliae quaevis magnitudines ».

(2) Di tale circostanza ha tratto profitto assai opportunamente il Prof. E. Bertini nell' opuscolo: *Euclide, libro quinto* (Torino e Roma, 1880).

(3) Cfr. L. I, n. 9 e 21.

(4) Legendre, *Eléments de géométrie*, note I (XV Ed., Paris 1862, p. 275-6).

(5) Come questa divisione si può eseguire, è già insegnato una prima volta nel II libro.

(6) Alcuni codici contengono una quinta definizione, ma essa sembra un' aggiunta posteriore: cfr. le ed. di Simson e di Heiberg, nonchè Hankel, l. c. p. 399.

Digitized by Google

ed importantissima è la generalizzazione del teorema di Pitagora contenuta nella prop. 31ª di cui abbiamo già fatto cenno nel n. 10. Le condizioni di somiglianza di due triangoli si apprendono dalle prop. 4ª-7ª e 32ª, le relazioni fra parallelogrammi equivalenti ed equiangoli dalle 14ª e 15ª, mentre le 16ª-17ª e 22ª insegnano delle relazioni geometriche fra quattro rette proporzionali e le 19ª-21ª le decomponibilità di due poligoni simili in un ugual numero di triangoli simili e l'essere simili due poligoni simili ad un terzo; finalmente (per tacer d'altro) le 24ª-26ª possono designarsi per un complemento al teorema del gnomone (*Elementi,* Lib. I, 43), e la 27ª come risolutrice di un problema di massimo, di quello cioè in cui si cerca il massimo dei parallelogrammi isoperimetri ed equiangoli (1).

Delle proprietà delle figure simili dimostrate nel VI libro, Euclide fa nello stesso applicazione ad alcuni problemi, come sarebbero la divisione di una retta in parti aventi dati rapporti (9ª-10ª), la ricerca (11ª, 12ª, 13ª) della terza, quarta o media (cfr. *Elem.* II, 11) proporzionale, la costruzione su una data retta di una figura simile ad una data (15ª) e la divisione (30ª) di una retta in media ed estrema ragione (cfr. *Elem.* II, 14). Ancora più importanti sono la questioni (derivanti tutte dalla scuola di Pitagora) 25ª, 28ª e 29ª (2), di cui la prima insegna a " costruire una figura simile ad una seconda ed equivalente ad una terza „ mentre le due altre sono i *problemi di applicazione di aree* sotto la loro forma più generale; esse hanno per iscopo di " applicare ad una retta data un parallelogramma equivalente ad una data figura rettilinea e deficiente o eccedente di un

(1) Riguardo alle forme del VI libro, si può notare che ivi Euclide ritenne lecito di riunire in un solo enunciato una proposizione e la sua inversa, cosa che aveva evitato dianzi.

(2) Cfr. Flauti, *Gli Elementi di Euclide*, XI ed. (Napoli, 1827) p. 512-26; Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* (Leipzig, 1878) p. 928-30; Favaro, *Notizie storico-critiche sulla teoria delle equazioni* (Mem. della R. Acc. di Modena, Vol. XVIII, 1878, p. 132-3).

Digitized by Google

parallelogramma simile ad un parallelogramma dato „; data dunque una retta $AB = a$ si tratta di trovare un punto X di essa o del suo prolungamento tal che condotti tre segmenti equipollenti AA', BB', XX' risulti il parallelogramma $AXX'A'$ di data area e il parallelogramma $BXX'B'$ simile ad uno dato. Se quindi di quest' ultimo si indica con λ il rapporto dei lati BB' e BX e con φ l'angolo $B'BX$, mentre con S s'indica la superficie data, i problemi citati si traducono nell'equazione di secondo grado

$$\lambda x (a \pm x) \operatorname{sen} \varphi - S = o:$$

si vede dunque che essi porgono la soluzione geometrica delle equazioni quadratiche generali (1).

16. I tre libri seguenti trattano l' aritmetica razionale, ossia gli elementi dell' aritmetica superiore, della chimica dei numeri (per usare la bellissima espressione di Kummer). Le proposizioni dimostrate da Euclide non furon certo trovate tutte da lui, anzi è probabilissimo che la loro scoperta si debba fare risalire a Pitagora od ai suoi discepoli: ma il seguire lo sviluppo successivo dell'aritmetica dei Greci da Pitagora a Euclide è un impresa che non si può oggi tentare con probabilità di riuscita; ci è forza pertanto restringerci a riassumere brevemente il contenuto dei tre libri citati (2) dopo avere ricordato che i metodi di dimostrazione si fondano sulla stessa rappresentazione dei numeri mediante segmenti della quale il geometra Alessandrino seppe già profittare nel libro II.

---

(1) Cfr. L. I, n. 24 ove sono esposte le soluzioni analoghe delle equazioni di 2° grado in cui il quadrato dell' incognita ha per coefficiente l' unità.

Le proposizioni 20ª, 27ª, 30ª, 31ª, 33ª sono dimostrate in due modi.

(2) Cfr. sullo stesso argomento: E. S. Unger, *Kurzer Abriss der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant* (Erfurt, 1843) p. 7-9; Hankel, op. cit. p. 392 e seg.; I. H. T. Müller. *Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker* (Wiesbaden, 1860); F. Müller, *Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie* (Berlin, 1887); P. (eano) *Sommario dei libri VII, VIII e IX di Euclide* (Rivista di Matematica, T. I, p. 10-12).

Digitized by Google

Per *numero* (*ἀριθμὸς*) Euclide intende una collezione di *unità* (*μονὰς*), onde per lui un numero è un intero positivo; dati quindi due numeri qualunque, o uno è un multiplo dell'altro o il loro rapporto è una frazione; se, in particolare, si confronta un numero qualunque, col numero 2, si arriva alle nozioni di numero *pari* (*ἄρτιος*), numero *dispari* (*περισσὸς*), ecc. Fra i numeri dispari sono notevoli quelli che non hanno divisori, sono i numeri *primi* (*πρῶτος*) detti anche *lineari;* tutti gli altri si dicono composti (*σύνθετος*). Confrontando poi fra loro due numeri qualisivogliano si arriva al concetto di numeri *primi relativi.* La moltiplicazione di due numeri (operazione di cui Euclide dimostra la proprietà commutativa nella prop. 16ª del libro VII) genera i numeri *piani* (*ἐπίπεδος*) ed in particolare i *quadrati* (*τετράγωνος*), i numeri *solidi* (*στερεός*) ed in particolare i *cubi* (*κύβος*); il confronto di due numeri piani o solidi mena all'idea di numeri *simili* (*ὅμοιοι*) (1) e quello di un numero con la somma dei suoi divisori a quella di numero *perfetto* (*τέλειος*) (2).

Tutte queste definizioni e le altre con cui si apre il VII libro sono necessarie e sufficienti allo svolgimento delle due teorie a cui questo si può ritenere consacrato: teoria della divisibilità (compresa quella del massimo comun divisore e del minimo multiplo) e teoria delle proporzioni. Riguardo alla prima ci limitiamo a osservare come, tanto le proposizioni esposte da Euclide, quanto la sostanza de' suoi ragionamenti, passarono senza modificazione nei trattati moderni e ricevettero in parte delle notevoli estensioni (3). Riguardo alla se-

---

(1) Le proprietà dei numeri quadrati, cubi, piani, solidi, ecc. appartengono a quella disciplina che Zeuthen chiama (*Forelaesning* p. 35-8) *aritmetica geometrica.*

(2) È perfetto un numero che sia eguale alla somma de' suoi divisori escluso sè stesso.

(3) Cito ad esempio la ricerca del massimo comune divisore, che fu estesa al caso di due quantità qualunque da Euclide stesso (*Elementi.* libro X, prop. 3ª-4ª) e al caso di due funzioni algebriche razionali intere dai matematici moderni.

Digitized by Google

conda rileviamo che essa comprende proposizioni sui numeri le quali sono incluse in altre dimostrate nel V libro per grandezze qualisivogliano; per ispiegare questa ripetizione si è invocata la ripugnanza di Euclide all'arrecare delle mutazioni nelle opere altrui (v. n. 4, chiusa), la quale si sarebbe manifestata a proposito dei libri VII-IX dovuti per la massima parte ai Pitagorici (1); si è invocata da altri la tendenza di Euclide ad evitare l'uso di principii generali, la quale lo avrebbe sconsigliato dal dedurre dal V libro molte proposizioni dei tre successivi colla semplice osservazione — di cui fa cenno Aristotele (2) — che " un numero è una particolare grandezza „; comunque si spieghi il fatto indicato, non si può per fermo asserire che ad Euclide sia sfuggito l'intimo legame esistente fra il V libro degli *Elementi* e quello che lo segue (3).

17. Chi percorre l'VIII libro degli *Elementi* non penerà a riconoscere che egli naviga in un mare comunicante per molteplici stretti con quello in cui trovavasi veleggiando nel VII. Esso infatti contiene una buona collezione di teoremi sulle serie di numeri proporzionali (o, per dirla alla moderna, sulle progressioni geometriche), teoremi che sono scomparsi nelle moderne trattazioni di tale argomento; per chiarirne l'indole citiamo i seguenti:

Se quanti si vogliano numeri sono successivamente proporzionali ed i loro estremi sono fra loro primi, essi sono i minimi aventi fra loro la stessa ragione; e se il primo non misura il secondo, nessuno di essi misurerà il consecutivo (prop. 1ª, 7ª). Se fra due numeri cade un certo numero N di numeri successivamente proporzionali, altrettanti ne cadranno fra due numeri aventi la medesima ragione (prop. 8ª). Nelle stesse ipotesi e se di più i due numeri considerati sono fra loro primi, fra l'unità e ciascuno di essi cadranno pure N numeri successivamente proporzionali (prop. 9ª); e se viceversa fra 1 e a, e 1 e b cadono N numeri successivamente proporzionali, altrettanti ne cadranno fra a e b (prop. 10ª).

---

(1) Hankel, op. cit. p. 390.

(2) *Anal. post.* I.

(3) Osserviamo che della prop. 31ª di questo libro si conoscono due dimostrazioni.

Digitized by Google

Che fra due numeri piani o solidi simili (in particolare fra due quadrati o due cubi) esistano una o due medie proporzionali risulta dalle proposizioni 11ª-12ª e 18ª-19ª ove viene determinato il rapporto di due numeri simili piani o solidi (in particolare di due quadrati o due cubi); invece la condizione di similitudine di due numeri piani o solidi si impara nelle prop. 2ª-21ª e quella per l' esistenza di una comune misura fra due quadrati o due cubi nelle prop. 14ª-17ª. Altre proprietà analoghe, importanti soltanto per chi voglia fare dell' aritmetica razionale, troverà il lettore nell' opera originale.

18. Il libro IX, ultimo dei libri aritmetici, è un naturale proseguimento dei due precedenti. Troviamo ivi stabilite le condizioni affinchè il prodotto di due numeri sia un quadrato (prop. 1ª, 2ª, 3ª, 6ª) o quello di tre un cubo (4ª, 5ª), poi delle nuove proprietà delle serie di numeri proporzionali, e finalmente il modo di comportarsi rispetto a 2 del numero che si ottiene combinando per addizione, sottrazione, moltiplicazione o bisezione dei numeri di data parità (21ª-34ª). (1). Ma incontriamo poi anche tre proposizioni di eccezionale importanza su cui val la pena di fermarsi. La prima (prop. 20ª) asserisce essere illimitata la serie dei numeri primi; essa viene dimostrata con un ragionamento tuttora in uso ed estremamente notevole (2) come quello che, non solo guida facilmente alla conclusione voluta, ma ancor insegna un modo semplice per ottenere successivamente infiniti numeri primi. La seconda (prop. 35ª) dà la somma dei termini di una progressione geometrica, avendo per propria tesi l' eguaglianza.

$$\frac{ar - a}{a} = \frac{ar^n - a}{a + ar \ldots + ar^{n-1}}$$

La terza (prop. 36ª) finalmente insegna la costruzione dei nu-

---

(1) Notisi la doppia dimostrazione della prop. 22ª.

(2) Come il lettore sa, questo ragionamento consiste nel dimostrare che, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri primi consecutivi, il prodotto $a_1 a_2 \ldots a_n + 1$ è un nuovo numero primo.

Digitized by Google

meri perfetti, perchè asserisce che, se per un certo valore di n il numero $2^n - 1$ è primo, il prodotto $N = (2^n - 1)\, 2^{n-1}$ sarà perfetto (1). Facendo n successivamente eguale a 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31 e 61 si ottengono in tal modo i 9 numeri perfetti conosciuti (2); se altri analoghi ne esistano dipende dalla questione, non ancora risolta, dell' esistenza di numeri primi della forma $2^n - 1$ ove $n > 61$ (3); ma intanto importa notare che la regola di Euclide porge tutti i numeri perfetti che sono o il prodotto di due numeri primi (l' unico è 6), o il prodotto delle potenze di due primi, o più generalmente il prodotto di un numero primo per un numero composto ma primo con quello (4); se esistono altri numeri perfetti (necessariamente non primi), in particolare dei numeri perfetti dispari, è una questione (5) che malgrado gli sforzi anche recentemente ripetuti da analisti egregi (6), attende tuttora la propria soluzione.

---

(1) È facile verificarlo osservando che, escluso N, i divisori di questo numero sono:

$$(2^n - 1),\ (2^n - 1)\, 2, \ldots,\ (2^n - 1)\, 2^{n-2},\ 2^{n-1},\ 2^{n-2}, \ldots,\ 2,\ 1$$

la cui somma è

$$(2^n - 1)\,(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) + (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) =$$

$$= (2^n - 1)(2^n - 1) + (2^n - 1) = (2^n - 1)\, 2^{n-1}$$

cioè appunto N.

(2) L' ultimo venne scoperto non a guari da P. Seelhoff (*Die neunte vollkommene Zahl*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXI, 1886, p. 174-178) e verificato poi dal Lucas (*Sur le neuvième nombre parfait*, Mathésis, VII, 45-6).

(3) Tale questione sarebbe risolta se fosse dimostrato il seguente *teorema empirico* del Catalan: Se $2^n - 1$ è un numero primo p, saranno numeri primi anche $p' = 2^p - 1$, $p'' = 2^{p'} - 1$ ecc. (*Mélanges mathématiques*: Mem. de la Soc. de Liège, 2e Série, T. XII, p. 376).

(4) Cfr. Seelhoff l. c.

(5) Lebesgue e Wantzel nel T. III (1844) delle *Nouvelles Annales*.

(6) Veggansi parecchie note del Sylvester nel T. CVI (1888) dei *Comptes rendus* e le successive note di Catalan (*Mélanges mathématiques*, Mémoires de la Société de Liège, 2e série, T. XV, 1888 p. 205-7), di C. Servais (*Mathésis*, VII, 228-230 e VIII p. 92-93 e 135), di E. Cesàro (*Mathésis*, VII, p. 245-6) e E. Lucas (*Mathésis*, X, p. 74-76).

Digitized by Google

19 Non pochi problemi di geometria elementare e l' inversione di una fra le prime operazioni aritmetiche (cioè l' elevamento a quadrato) rivelano l' esistenza di quantità che sono per loro natura essenzialmente differenti dagli ordinarii numeri interi e frazionali: sono gl' irrazionali (*quadratici,* cioè) radici di equazioni quadratiche. E siccome in molti facili modi si può persuadersi che all' infuori degli irrazionali quadratici esistono altre quantità di natura affine, così s' impone lo studio generale delle quantità irrazionali. Per compiere tale ricerca si presentano due strade. O partire da una definizione che abbracci tutte le possibili quantità irrazionali e dedurne le proprietà; è il sistema oggidì in uso come quello che per generalità e rigore nulla lascia a desiderare e che presenta, come unico inconveniente, di fare perdere di vista le proprietà speciali di ogni singola classe di irrazionali (1). Oppure si possono applicare le note operazioni aritmetiche (sino all' estrazione di radice inclusivamente) ai numeri interi e frazionarii, poi ai numeri così risultanti e così via; è il sistema che scelsero gli antichi come quello più conforme alle loro abitudini intellettuali e che d' altronde corrisponde al procedere dal semplice al composto. L' unico documento autentico (2) degli studii fatti dai Greci su tale argomento è il X libro degli *Elementi di Euclide* (3), il libro più

---

(1) Per esempio: se dallo sviluppo in frazione continua è facile dedurre quando un irrazionale sia quadratico, manca un criterio simile per gl' irrazionali cubici: cfr. Bachmann, *Vorlesungen über die Natur des Irrationalzahlen* (Leipzig, 1892).

(2) Cfr. più innanzi, n. 67.

(3) Cfr. Stevin, *Traité des incommensurables grandeurs en laquelle est sommairement declaré le contenu du Dixiesme Livre d' Euclide* (Ouvres mathématiques, Leyde 1634, p. 219 e seg.); Cossali *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra.* T. II (Parma 1799) p. 242 e seg.; Nesselmann Op. cit. 165-184; Chasles, *Comptes rendus* T. 37, (Paris 1853), p. 555-562; Tannery, *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (Mém. de Bordeaux, 2e Serie, T. IV) p. 401-4; Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge 1884, p. 78-86); P(cano), *Sommario del libro X d' Euclide* (Rivista di Matematica, T. II 1892) p. 7-11; Christensen, *Ueber Gleichungen vierten Grades in X Buch der Elemente des Euklids* (Zeit. f. Math. u. Phys., T. 34, 1889, Hist.-lit Abth. p. 201-217).

Digitized by Google

lungo e difficile (1), uno de' più ammirabili se si tien conto della sottigliezza delle argomentazioni (2) e del numero delle gravi difficoltà vinte, ma il meno letto perchè i risultati principali di esso si possono oggi ottenere con poche righe di algebra e d' altronde sono estremamente particolari (3). Ivi infatti (come sarà dimostrato da ciò che segue) Euclide si occupa delle quantità irrazionali che risultano risolvendo delle equazioni biquadratiche (4); che a tale studio egli sia stato spinto dal desiderio di gettare qualche luce intorno alla natura del rapporto della circonferenza al diametro, è ipotesi (5) che invano si tenterebbe di suffragare con qualche argomento intrinseco o storico; più probabile è invece secondo noi che il movente a tali ricerche sia stato nello studio di problemi risolubili mediante la riga ed il compasso (6), in particolare nelle indagini sui poliedri regolari; infatti se si vuol determinare il rapporto del lato di uno di questi al raggio della sfera circoscritta s' incontrano appunto le irrazionalità di cui ora — seguendo l' antico geometra, ma utilizzando il linguaggio algebrico — esporremo le proprietà più salienti.

Si supponga data un' unità lineare U arbitraria ma fissa; allora un'altra lunghezza qualunque L può essere commensurabile (7) od incommensurabile con l' unità; nel primo caso è della forma αU ove α è un numero intero o frazionario, e si dice *commensurabile in lunghezza* con U; nel secondo caso può accadere che L^2 sia

(1) Che riuscisse difficile anche agli antichi risulta dalle molte dilucidazioni che si leggono nei manoscritti: cfr. il III Vol. dell' ed. di Heiberg.

(2) Si vegga l'eloquente difesa tessuta da Keplero contro Ramus nel Proemio al I libro dell'*Harmonices mundi* (*Kepleri Opera*, ed. Frisch, T. V, p. 80-84).

(3) « La difficulté du dixiesme Livre d' Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusque à l' appeler, la croix des mathèmaticiens, matiére trop dure à digérer, et en la quelle n' aperçoivent ancune utilité ». Stevin, *Le premier Livre d' Arithmétique*, def. XXXI.

(4) Equazioni di 4° grado riducibili al 2°.

(5) Emessa dal De Morgan; cfr. Gow l. c. p. 85.

(6) Cfr. le prop. 2ª e 3ª del IV libro della *Collezione matematica* (Pappo ed. Hultsch, p. 178-180).

(7) Commensurabili = σύμμετρα.

Digitized by Google

commensurabile con U^2 e può accadere l'opposto, nella prima ipotesi L si dirà *commensurabile a potenza* (1) con U e sarà della forma $\sqrt{a}\,U$, a essendo ancora un numero intero o frazionario. Come *razionali* (ῥεταὶ) si considerano le lunghezze commensurabili con U in lunghezza o a potenza (2); come *irrazionali* le altre. Queste nozioni con cui si apre il X libro degli *Elementi* inducono subito a domandare: esistono effettivamente lunghezze delle specie considerate? Tutto il libro, e in particolare la prop. 10ª (3), possono servire come risposta affermativa a tale questione; tuttavia sarebbe desiderabile avere un modo di calmare sin dal principio le apprensioni di coloro che avessero dei dubbii intorno all'esistenza di lunghezze incommensurabili presentandone un esempio semplice; per offrire tale esempio Euclide aveva a propria disposizione un risultato classico nello studio del rapporto fra il lato e la diagonale di un quadrato: ed infatti lo si trova nel libro in discorso, dimostrato anzi nel modo che — se si presta fede ad Aristotele (cfr. L. I, n. 81) — veniva usato nella scuola di Crotone; esso però si trova in fine del libro X, in un punto cioè ove non ha ragione di esistere, onde dal più reputato fra i recenti editori di Euclide venne escluso dal testo autentico: nulla vieta però di ammettere che ci troviamo di fronte, non ad un'interpolazione, ma ad uno spostamento; nè è escluso che Euclide, avvertita tardi l'opportunità di quell'esempio, lo abbia registrato in fine, riserbandosi di assegnargli la più opportuna sede nel rivedere definitivamente il testo.

La prima proposizione del Libro in questione afferma che " date due grandezze diseguali, se si toglie dalla maggiore più

---

(1) Commensurabili a potenza = δυνάμει σύμμετρα.

(2) L'opportunità di fondere in un'unica categoria di grandezze le lunghezze commensurabili in lunghezza e a potenza emerge da tutto il libro X degli *Elementi*, senza ricorrere per spiegarne l'origine a una congettura, indubbiamente ingegnosa, ma artificiosissima, suggerita da Chasles (*Comptes rendus*, T. 36, p. 556-7).

(3) Con la quale si determinano due lunghezze incommensurabili una in lunghezza l'altra a potenza con una data.

Digitized by Google

della sua metà, dal resto più della sua metà e così via si finirà per ottenere una grandezza minore della più piccola fra le grandezze date „; Euclide la deduce molto semplicemente dal celebre assioma che dice: date due grandezze omogenee, esiste sempre un multiplo della minore superiore alla maggiore. Segue da quella proposizione un procedimento (prop. 2ª) per riconoscere se due lunghezze date siano o non commensurabili (1). I metodi insegnati da Euclide nei libri aritmetici per trovare la massima comune misura di due o tre numeri (razionali) vengono poi estesi (prop. 3ª e 4ª) alle ricerche analoghe per due grandezze commensurabili: la ragione di questa generalizzabilità si trova nelle proposizioni successive (5ª-9ª) (2) dalle quali si apprende che due grandezze sono commensurabili o incommensurabili secondochè stanno o non come un numero ad un numero e sono poi commensurabili a potenza soltanto quando i loro quadrati stanno come due numeri. Analoghe a queste sono le proposizioni che vengono poi e dalle quali si apprende: " se in una proporzione i due antecedenti sono commensurabili lo saranno anche i conseguenti (prop. 11ª); se a e b sono entrambi commensurabili con c lo saranno anche fra loro (prop. 12ª), ma se lo è uno solo essi saranno fra loro incommensurabili (prop. 13ª); se nella proporzione $a : b :: c : d$ è $a^2 - b^2$ un quadrato, lo sarà anche $c^2 - d^2$ (prop. 14ª); la somma o la differenza di due grandezze commensurabili è commensurabile con entrambe (prop. 15ª), ma se a e b sono incommensurabili $a - b$ lo sarà con ambedue (prop. 16ª) „.

Si vede dunque che con le proposizioni citate Euclide volle esporre alcune generalità sulle quantità irrazionali qualunque. Di

---

(1) Risulta da tale procedimento che le definizioni di quantità commensurabili ed incommensurabili sono *logiche* ma non *algebriche* (secondo la distinzione fatta da Kronecker), perchè non esiste un numero finito di operazioni razionali, mediante le quali si possa riconoscere se due date grandezze siano fra loro commensurabili o meno. Cfr. Molk, *Acta mathematica*. T. VI, p. 8.

(2) Esse, come sappiamo (L. I, n. 64), furono scoperte da Teeteto.

Digitized by Google

esse egli fa tosto un'applicazione studiando (prop. 17ª-18ª) le condizioni di razionalità delle radici dell'equazione $x(a-x)=\frac{b^2}{4}$, e trova che tale condizione è l'essere a^2-b^2 un quadrato. Egli prepara poi l'introduzione di nuove quantità irrazionali dimostrando essere razionale il prodotto (prop. 19ª) o il quoziente (prop. 20ª) di due quantità razionali e fra loro commensurabili in lunghezza. All'opposto il rettangolo di due rette commensurabili soltanto a potenza è irrazionale; il lato del quadrato equivalente ad esso è del pari irrazionale e dicesi *media* (μέση), mentre quel rettangolo si dice *mediale* (prop. 21ª). Le irrazionalità così ottenute sono pertanto radici di equazioni di 4° grado binomie, epperò possono esprimersi algebricamente mediante una delle formole seguenti:

$$\sqrt[4]{lm}\ ,\ l\sqrt[4]{m}\ ,\ \sqrt[4]{m}\ ;$$

allo studio di esse è consacrata la seconda parte del Libro X. Dalla quale si apprende anzitutto (prop. 22ª) che " se si trasforma un rettangolo mediale in altro equivalente avente un lato razionale, l'altro suo lato non sarà razionale „ e che " non è razionale un numero commensurabile con una media „ (23ª). Come due lunghezze qualunque, così due medie possono essere fra loro commensurabili in lunghezza o a potenza, nella prima condizione sarebbero $l_1\sqrt[4]{m}$ e $l_2\sqrt[4]{m}$, nella seconda $\sqrt{l_1}\ \sqrt[4]{m}$ e $\sqrt{l_2}\ \sqrt[4]{m}$; nel primo caso il loro rettangolo è mediale (24ª), ma nel secondo può anche essere razionale (25ª); la differenza di due medie invece non è mai razionale (26ª). — Nelle prop. seguenti Euclide insegna a costruire delle coppie di medie o di rette aventi fra loro determinate relazioni; sono problemi importanti meno in sè che perchè conducono alla creazione di nuove quantità irrazionali. Nelle due prime delle prop. citate le medie devono essere commensurabili soltanto a potenza e comprendere un rettangolo razionale (27ª) o mediale (28ª), si ottengono in corrispondenza le due coppie seguenti:

Digitized by Google

$$(\mathrm{I}) \quad \sqrt[4]{lm}\,,\ \sqrt{l\sqrt{\frac{l}{m}}}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \sqrt[4]{lm}\,,\ \sqrt{k\sqrt{\frac{l}{m}}}$$

Determinate poi (29ª e 30ª) due rette commensurabili soltanto a potenza e di cui la differenza dei quadrati sia commensurabile colla maggiore in lunghezza o soltanto a potenza rispetto alla prima (1), Euclide si volge alle due questioni seguenti (che in realtà ne riassumono quattro): " Trovare due medie commensurabili soltanto a potenza comprendenti un rettangolo razionale (31ª) o mediale (32ª) e di cui la differenza dei quadrati sia commensurabile alla prima in lunghezza o soltanto a potenza „. Le soluzioni che egli trova sono espresse in linguaggio algebrico, dalle formole:

$$\text{Prop. } 31^{\text{a}}\begin{cases}\sqrt[4]{l}\,\sqrt[4]{l-k^2}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{l}}\sqrt[4]{(l-k^2)^3}\\ \sqrt[4]{l}\,\sqrt[4]{l-k}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{l}}\sqrt[4]{(l-k)^3}\end{cases};\quad \text{Prop. } 32^{\text{a}}\begin{cases}\sqrt[4]{lm}\,,\ \sqrt[4]{\dfrac{m}{l}}\sqrt{l-k^2}\\ \sqrt[4]{lm}\,,\ \sqrt[4]{\dfrac{m}{l}}\sqrt{l-k}\end{cases}$$

Nei tre problemi venienti si tratta di determinare due rette incommensurabili a potenza sapendo che la somma dei loro quadrati sia razionale ed il loro rettangolo mediale (33ª), o che sia mediale quella e razionale questo (34ª), o finalmente l'una e l'altro mediali e fra loro incommensurabili (35ª). I risultati a cui si arriva sono compendiati nelle espressioni che seguono:

$$(\mathrm{III})\sqrt{\frac{l\pm\sqrt{kl}}{2}}\,,\ (\mathrm{IV})\sqrt{\frac{\sqrt{l-k}\,(\sqrt{l}\pm\sqrt{k})}{2}}\,,\ (\mathrm{V})\sqrt{\frac{\sqrt{m}\,(\sqrt{l}\pm\sqrt{k})}{2}}\,.$$

---

(1) Come soluzioni generali si possono assumere risp.:

$$\sqrt{l}\,,\ \sqrt{l-k^2}$$
$$\sqrt{l}\,,\ \sqrt{l-k}\,.$$

Digitized by Google

Combinando per addizione o sottrazione gli irrazionali ottenuti si giunge a nuovi irrazionali che vengono designati con nomi speciali, vale a dire la somma (prop. 36ª) e la differenza (prop. 73ª) di due quantità incommensurabili in lunghezza sono quantità irrazionali che si chiamano (nella nomenclatura degli antichi algebristi italiani) risp. *binomii* e *recisi;* e con tali nomi si designano anche gli irrazionali analoghi ottenuti dalle quantità (I) (prop. 37ª e 74ª), (II) (prop. 38ª e 75ª), (III) (prop. 39ª e 76ª) (IV) (prop. 40ª e 77ª) e (V) (prop. 41ª e 78ª). Tutti questi nuovi enti aritmetici sono radici di equazioni biquadratiche; le loro espressioni algebriche assieme ai loro nomi in greco (1), alle lettere con cui per brevità le indicheremo in seguito e alle equazioni biquadratiche cui soddisfano, sono raccolte nel quadro seguente:

A. $x = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ [2] { ἐκ δύο ὀνομάτων / ἀποτομή } $x^4 - 2(m+n)x^2 + (m-n)^2 = o$

B. $x = \sqrt[4]{lm} \pm \sqrt[4]{\frac{l^3}{m}}$ { ἐκ δύο μέσων πρώτη / μέσης ἀποτομὴ πρώτη } $mx^4 - 2(l+m)\sqrt{lm}\,x^2 + l(l-m)^2 = o$

C. $x = \sqrt[4]{lm} \pm \sqrt[4]{\frac{k^2 l}{m}}$ { ἐκ δύο μέσων δευτέρα / μέσης ἀποτομὴ δευτέρα } $mx^4 - 2(k+m)\sqrt{lm}\,x^2 + l(k-m)^2 = o$

D. $x = \sqrt{\frac{l + \sqrt{kl}}{2}} + \sqrt{\frac{l - \sqrt{kl}}{2}}$ { μείζων / ἐλάσσων } $x^4 - 2lx^2 + kl = o$

E. $x = \sqrt{\frac{\sqrt{l} - k(\sqrt{l} + \sqrt{k})}{2}} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{l} - k(\sqrt{l} - \sqrt{k})}{2}}$ { ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη / ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα } $x^4 - 2\sqrt{l(l-k)}\,x^2 + (l-k)k = o$

F. $x = \sqrt{\frac{\sqrt{m}(\sqrt{l} + \sqrt{k})}{2}} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{m}(\sqrt{l} - \sqrt{k})}{2}}$ { δύο μέσα δυναμένη / ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα } $x^4 - 2\sqrt{lm}\,x^2 + km = o.$

---

(1) La lunghezza di questi nomi corrisponde al costume dei greci di adottare delle perifrasi piuttosto che introdurre dei nuovi vocaboli.

(2) Una almeno delle quantità non è un quadrato; se si prende il segno —, deve supporsi $m > n$.

Digitized by Google

Ognuna di queste linee irrazionali è rappresentabile in un solo modo nella forma indicata (prop. 42ª-47ª e 79ª-84ª). Arrestiamoci specialmente sulla prima: essa ha la forma $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ ove $m > n$ ed uno almeno dei numeri m, n non è un quadrato; si presenta quindi naturale la distinzione dei tre casi: m quadrato, n quadrato, nè m nè n quadrato; ciascuno si suddivide in tre secondochè $\sqrt{m-n}$ è commensurabile in lunghezza o soltanto a potenza con $\sqrt{m}$. Si arriva così a sei coppie di irrazionali:

$$a \pm \sqrt{a^2 - d^2}\,,\ \frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \pm a\,,\ \sqrt{a} \pm \sqrt{a - k^2 a};$$

$$a \pm \sqrt{a^2 - d}\,,\ \sqrt{a^2 + d} \pm a\,,\ \sqrt{a} \pm \sqrt{a - d};$$

prendendo il segno + si hanno *sei specie di binomii,* linee che Euclide insegna a fabbricare nelle prop. 48ª-53ª, prendendo il segno — *altrettante specie di recisi,* di cui pure Euclide insegna la costruzione nelle prop. 85ª-90ª. Fra le proprietà di questi irrazionali meritano un posto eminente quelle espresse dalle proposizioni 54ª-59ª e 91ª-96ª: esse dicono che estraendo la radice quadrata da uno de' sei binomii o de' sei recisi si ottengono irrazionali di specie già conosciute, anzi esse porgono altrettanti casi particolari dell' identità

$$\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{m} - \sqrt{m-n}}{2}};$$

applicandola infatti ai casi più sopra enumerati si trovano le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \pm a} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}} \pm \sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}}\right)$$

Digitized by Google

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - k^2 a}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}(1+k)}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a}(1-k)}{2}}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - d}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{d}}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a^2 + d} \pm a} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + d} + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + d} - \sqrt{d}}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - d}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{d}}{2}},$$

donde emerge che la radice quadrata di un binomio o di un reciso di 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, 6.ª specie è ordinatamente un irrazionale della forma *A, B, C, D, E, F*. Le prop. 60ª-65ª e 37ª-102ª si possono considerare per le inverse di quelle ora citate.

Tutti gli irrazionali definiti godono anche la proprietà che una quantità commensurabile ad uno di essi è un irrazionale analogo (prop. 66ª-70ª e 103ª-107ª). Che combinando per addizione e sottrazione uno spazio razionale e uno mediale o due spazii mediali si possano ottenere tutte le 12 quantità irrazionali *A*...., *F*, si apprende dalle prop. 71ª-72ª e 108ª-110 (1); e finalmente dalla 111ª che un binomio è di natura differente da un reciso.

Le ultime quattro proposizioni del Libro X vengono sospettate di essere false dall' editore a cui noi ci atteniamo: senza entrare in una discussione delle ragioni filologiche che condussero l' Heiberg a questo risultato, ci limitiamo ad osservare che noi non conosciamo alcun argomento intrinseco per negare ad Euclide la conoscenza delle proposizioni anzidette, delle quali le tre prime nel linguaggio nostro si esprimono col mezzo delle identità

$$\frac{c^2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c^2}{a - b}(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}),$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot m(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = m(a - b),$$

(1) Le quali pertanto porgono un mezzo semplice per costruire le quantità irrazionali anzidette.

Digitized by Google

mentre l' ultima dice che, oltre a quelle considerate, esistono infinite altre categorie di irrazionali deducibili con estrazioni di radici da quelle già definite.

Tale è per sommi capi il contenuto del X Libro degli *Elementi di Euclide* (1). Aggiungiamo che, come si rileva dalle citazioni fatte nel precedente riassunto, le proposizioni ivi contenute si possono in gran parte distribuire a coppie; l'ipotesi e la tesi di ciascuna di queste proposizioni nascono dall'ipotesi e dalla tesi dell'altra — per esprimerci modernamente — mutando il segno di un radicale, sicchè il libro in questione si potrebbe assai opportunamente stampare in due colonne ponendo di fronte due proposizioni analoghe; orbene, quantunque Euclide non rilevi in generale questa dipendenza, pure nessuno che abbia letto gli *Elementi* può negargliene la conoscenza.

20. Se il fin quì detto è forse sufficiente a porgere un'idea delle ricerche su gli irrazionali esposte da Euclide, non basterà certamente per formarsi un concetto dell' importanza storica che esso possiede, la quale deriva da ciò che col suo mezzo si è in grado di intuire come i Greci poterono istituire e compiere delle ricerche che a noi moderni sembrano di pertinenza dell' algebra, di misurare pertanto la potenza di quell' algoritmo le cui prime linee sono tracciate nel II Libro degli *Elementi,* di seguirlo anzi nei suoi più minuti particolari. Favorisce questo studio la forma, meno regolare, compassata e perfetta, che farebbe credere di essere in presenza di una prima redazione: infatti i numerosi lemmi di algebra geometrica elementare (2), intercalati qua e là (mentre

---

(1) Varianti alle dimostrazioni delle prop. 1ª, 6ª, 9ª, 115ª si leggono nell'ed. di Heiberg.

(2) Fra essi possiedono una speciale importanza quelli (interposti fra le prop. 28ª e 29ª) che insegnano a costruire due numeri i cui quadrati diano per somma un numero quadrato o non; il metodo di costruzione riposa sull' identità

$$\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2 = \left(b^2 - \frac{c^2}{2}\right)^2 + b^2c^2.$$

Digitized by Google

sarebbe stato più estetico aggiungerli ai teoremi del II Libro dei quali sono in gran parte semplici corollarii) fanno vedere come essi facessero il medesimo ufficio di certe identità algebriche che ogni abile analista invoca per rendere il suo procedere più spedito e sicuro; essi fanno quindi percepire nel modo più palese quanto profonde siano le somiglianze fra i metodi degli antichi e l' algebra in cui si limiti il campo delle operazioni lecite a le quattro prime operazioni e l' estrazione di radice; noi pensiamo pertanto che il X Libro degli *Elementi* sia fra i più importanti documenti autentici che dovrebbe sfruttare chi volesse accingersi al difficile compito di ricostruire ne' suoi più minuti particolari gli antichi procedimenti d' indagine delle verità matematiche.

La presenza di lemmi di algebra geometrica non è l'unica caratteristica di forma posseduta dal Libro in discorso, perchè altri lemmi di esso contengono delle osservazioncelle atte a cementarne le varie parti (1); si aggiunga poi che ivi Euclide non ha riunite al principio tutte le definizioni, ma per converso le ha esposte nei punti più opportuni; ciò potrebbe porgere una conferma all' ipotesi che il sistema opposto sia opera di posteriori rimaneggiatori (cfr. n. 9), oppure far credere che Euclide vi si sia attenuto nei libri precedenti unicamente per seguire l' esempio dei predecessori, ma lo abbia abbandonato nel momento in cui più schiettamente metteva in mostra le proprie idee.

Quest' ultimo argomento poggia sull' opinione generale che il Libro che stiamo esaminando sia quello in cui Euclide mise più del proprio; sappiamo tuttavia (L. I, n. 64) che nel redigerlo egli utilizzò le opere di Teeteto; in quanta misura lo abbia fatto si apprende dallo schizzo storico che prelude ad un commento del Libro in esame, del quale il Woepcke scoperse, circa

---

(1) Probabilmente le osservazioni analoghe per gli altri libri furono lasciate, come più ovvie, da Euclide al lettore intelligente o al provetto istitutore.

Digitized by Google

quarant'anni fa, una traduzione in Arabo (1) e vennero in seguito trovati dei brani nell' originale (2); ivi (3) si leggono alcune notizie che ci sembrano abbastanza importanti per servir di coronamento a quanto precede.

Lo scopo del X Libro del trattato di Euclide *Su gli elementi* è l' esame delle quantità commensurabili ed incommensurabili, razionali ed irrazionali. Questa teoria nacque nella Scuola di Pitagora e venne considerevolmente svolta da Teeteto Ateniese il quale mostrò in questa parte delle matematiche ed in altre una sagacia che gli valse una meritata ammirazione. Egli era inoltre uno degli uomini più felicemente dotati, come Platone attesta nell' opera che intitolò dal suo nome. Le distinzioni precise delle quantità suddette e la dimostrazione rigorosa delle proposizioni appartenenti a questa teoria, io credo siano state stabilite per la maggior parte da questo matematico; più tardi il grande Apollonio, il cui genio arrivò al massimo grado di altezza nelle matematiche, aggiunse delle teorie ammirabili dopo molti sforzi e non poco lavoro. Giacchè Teeteto aveva distinto le potenze commensurabili in lunghezza dalle incommensurabili e aveva classificate le specie conosciutissime delle linee irrazionali corrispondentemente alle diverse proporzioni, assegnando la media alla proporzione geometrica, il binomio all' aritmetica ed il reciso all' armonica, come narra Eudemo Peripatetico. Quanto ad Euclide, egli si propose di dare delle regole generali intorno alla commensurabilità ed all' incommensurabilità e le dimostrò in generale; egli precisò le definizioni e la classificazione delle quantità razionali ed irrazionali, e fece conoscere un gran numero di classi di quantità irrazionali, e finalmente diede un' idea di tutta la loro estensione. Da ultimo Apollonio distinse le specie degli irrazionali *ordinati* e scoperse la dottrina degli irrazionali detti *non ordinati* (ἄλογοι ἄταχτοι) dei quali egli costruì un numero grandissimo con procedimenti esatti (4).

---

(1) F. Woepcke, *Essai d' une restitution des travaux perdus d' Apollonius sur les quantités irrationnelles* (Mém. des Savants étrangers, T. XIV, Paris, 1856, p. 658-720). Il manoscritto che lo contiene porta la data: Marzo-Aprile 969.

(2) Heiberg, *Studien* citate, p. 170-171. L' autore di questo commento non è determinato in modo definitivo; mentre il Woepcke tenderebbe ad identificarlo con l' astrologo Vezio Valente rammemorato dal Fabricius (*Bibl. graeca*, ed. Harless, Hamburg 1795, T. IV, p. 144), l' Heiberg (l. c. p. 169) preferisce ritenere sia Pappo d' Alessandria.

(3) Cfr. anche *Euclidis Opera omnia*. Vol. V, scolio n. 1, p. 414-417.

(4) Notizie più particolareggiate potrebbersi dedurre da un altro passo, tuttora inedito, del detto commento; nel passo cioè (indicato col n. 6 dal Woepcke a pag. 715 della memoria citata) ove è fatto un « esame comparato della teoria di Teeteto e di quella di Euclide »; anche per questo motivo è pertanto desiderabile una versione completa del commento scoperto da Woepcke.

Digitized by Google

21. Con gli ultimi tre libri degli *Elementi* si ritorna in un campo più schiettamente geometrico, essendo essi dedicati allo studio dei rudimenti della geometria dello spazio (1).

Il libro XI si apre con una serie di definizioni concernenti le scambievoli posizioni di rette e piani e i più semplici solidi da studiarsi, riguardo alle quali si può notare: I. le definizioni di rette e piani perpendicolari esigono per essere legittime dei teoremi esposti solo più avanti, II. la sfera viene considerata come un solido di rivoluzione senza che si rilevi che qualunque diametro può fungere da asse, III. per cilindro e cono si considerano solidi finiti generati dalla rivoluzione di un parallelogramma o di un triangolo rettangoli. Queste definizioni non sono seguite da alcun postulato, mentre ciò sarebbe stato necessario, giacchè le operazioni concesse da Euclide abilitano ad eseguire qualunque operazione nel piano, ma non tutte quelle dello spazio (2). Mende non lievi si trovano pertanto nell'esordio del Libro in questione; non meno gravi si trovano nel seguito (3), ove con poco ordine è esposta una collezione incompleta e variopinta di teoremi sulla posizione rispettiva di un piano ed una retta (prop. 1ª-3ª), su piani e rette perpendicolari (4ª-10ª, 13ª-16ª, 18ª-19ª) — i quali dovevano essere noti fino dai tempi

---

(1) Un antico scoliasta (*Euclidis Opera omnia*, Vol. V, p. 592, scolio 1) avverte che in origine geometria e stereometria formavano due scienze distinte che certi geometri, da lui indicati come « i moderni », riunirono in una sola.

(2) A questa mancanza, segnalata da G. Hauck nella memoria *Ueber die constructiven Postulate der Raumgeometrie in ihren Beziehungen zu den Methoden der darstellenden Geometrie* (Katalog der mathematischen und mathematisch-physikalischen Modelle, Apparate und Instrumenten. München 1892, p. 40-53), si può por riparo col sostituire ai postulati Euclidei i seguenti: Sia lecito congiungere nello spazio due punti con una retta; prolungare una retta; trasportare un segmento rettilineo; descrivere un circolo di centro, raggio e piano determinato; di ogni punto dello spazio si possa trovare la projezione su un piano dato e determinare la distanza da questo.

(3) Deriva ciò dal fatto che i Greci tardarono molto (v. L. I, n. 56) a studiare la geometria dello spazio?

Digitized by Google

di Archita (L. I, n. 52) — su i parallelepipedi [24ª-25ª (1), 28ª-36ª, 38ª (2)], gli angoli triedri (20ª e 22ª) e gli angoli solidi in generale: si aggiunga la proprietà di un fascio di piani paralleli di determinare su due rette qualunque punteggiate simili (17ª) e quella di una proporzione di non alterarsi quando se ne elevino a cubo i termini (37ª), nè si dimentichino i problemi (11ª-12ª, 23ª, 27ª-28ª) che si riferiscono alle figure anzidette. Tutte queste proposizioni sembrano riunite, non già nell' intento di porgere una base solida e completa per lo studio delle proprietà plastiche dello spazio, ma col fine unico di adunare gli elementi necessarii per compiere le ricerche consegnate nei due seguenti; perciò nel Libro XI risiede a parer nostro il più solido argomento a favore della tesi che gli *Elementi* avessero per iscopo, come dice Proclo (nel brano riferito nel n. 4) e ripete Keplero (3), la costruzione dei poliedri regolari (4). Arrogi che la forma meno perfetta di questo libro in confronto dei precedenti sembra favorevole alle congettura del De Morgan (5), secondo cui gli *Elementi* sarebbero un' opera senile che Euclide non potè assoggettare ad una revisione finale.

22. Il XII Libro ha, a differenza del precedente, un fine esplicitamente determinato, di gettare cioè le basi della stereo-

---

(1) Delle prop. 22ª e 23ª l'Heiberg riferisce due dimostrazioni.

(2) Notisi che quest' ultima è enunciata pel solo cubo mentre varrebbe per un parallelepipedo qualunque.

(3) « Euclidei operis ultimum finem, ad quem referrentur omnes omnino propositiones omnium librorum (exceptis quae ad numerum perfectum ducunt) esse quinque corpora regularia ». *Harmonices Mundi*, Praef. (*Kepleri Opera* ed. Frisch, Francfurti et Erlangae 1864, p. 82).

(4) Quest' asserzione venne combattuta osservando che un trattato elementare è fine a sè stesso (cfr. Cantor, *Vorlesungen* I, p. 235); ma tale argomento non ci sembra decisivo, perchè nessuno assicura che Euclide, vissuto in prossimità del periodo più splendido della filosofia greca, abbia saputo completamente emanciparsi dall' influenza delle dottrine platoniche; è già molto se egli riuscì a segnare il distacco della matematica dalla filosofia.

(5) Cfr. W. W. Rouse Ball, *A short Account on the History of Mathematics* (London, 1888) p. 52.

Digitized by Google

metria in senso stretto (1). Ora siccome nella misura dei volumi il tetraedro rappresenta una parte analoga a quella che nelle misure delle aree piane rappresenta il triangolo, così Euclide deve anzitutto determinare il volume di una piramide a base triangolare o a base qualunque, cioè stabilire il *primo dei teoremi di Eudosso* (L. I, n. 71-2); gli è quello che egli ottiene nella prop. 7ª e nel relativo corollario servendosi delle precedenti proposizioni 3ª-6ª. Così egli può istituire il confronto fra due piramidi (8ª-9ª) e, applicando il teor. 1 del Libro X, dedurre il rapporto fra un cono e un cilindro della stessa base e della stessa altezza, vale a dire giungere al *secondo dei teoremi di Eudosso* (prop. 10ª); ottenuto tale rapporto egli è in grado di confrontare (prop. 11ª-15ª) coni fra loro e coni con cilindri. Al paragone di due sfere (dovuto pure forse al geometra di Cnido) serve il teor. ultimo del libro, teorema che asserisce essere il rapporto di due sfere eguale a quello dei cubi dei loro diametri: era riserbata ad Archimede (v. n. 38) la scoperta del rapporto fra un cilindro o un cono ed una sfera.

Prima di lasciare il Libro XII degli *Elementi* importa fare osservazioni. La prima è che le prop. 1ª, 2ª e 16ª di esso appartengono alla planimetria; se le incontriamo quì è che la determinazione del rapporto di due poligoni simili o di due circoli (2) ha stretta analogia con le ricerche testè riassunte; lo stesso può ripetersi dei problemi 16 e 17: la loro presenza sembra quindi mostrare come Euclide non escludesse la possibilità di riunire

---

(1) Si noti però che in Euclide non si trova mai una vera misura; di ogni superficie e di ogni volume egli si limita a determinare il rapporto con un'altra superficie od un'altro volume conosciuti.

(2) La determinazione del rapporto delle aree di due circoli è il primo esempio offerto da Euclide del metodo di esaustione. Notisi ancora, con O. Stolz (*Math. Annalen*, T. XV, p. 269), che, siccome per Euclide hanno rapporto soltanto due grandezze tali che vi sia un multiplo dell'una maggiore dell'altra (Libro V, def. 3), così, prima di parlare del rapporto fra due circoli, sarebbe stato necessario dimostrare l'esistenza di un multiplo del circolo minore che fosse più grande del circolo maggiore.

Digitized by Google

la geometria piana con la solida, almeno nei casi in cui dal riavvicinamento delle proprietà analoghe nel piano e nello spazio si riuscisse a spargere più luce su le une e le altre. — La seconda osservazione è che il libro ora esaminato offre i primi esempii di applicazione di quel procedimento (che vedremo usato magistralmente da Archimede) con cui gli antichi senza invocare delle considerazioni infinitesimali riuscirono a risolvere tante importanti questioni che i moderni considerano come di pertinenza dei nuovi calcoli. Nell' intento di porgere fin d' ora al lettore un' idea di questo procedimento — le cui origini, come sappiamo (L. I, n. 72), risalgono ad Ippocrate ed Eudosso, — riporteremo quì, riassumendone le dimostrazioni, due dei teoremi del Libro anzidetto.

Prop. 2ª. *Due circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri.*
Siano C_1 e C_2 i circoli, D_1 e D_2 i loro diametri. Dico che

$$C_1 : C_2 = D_1^2 : D_2^2.$$

Infatti se ciò non accade esisterà uno spazio $C \gtrless C_2$ tale che

$$D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C.$$

Supponiamo anzitutto sia $C < C_2$. Si potrà inscrivere in C_2 un poligono regolare I_2 di 2^n lati tale che risulti $C_2 - I_2 < C_2 - C$; sarà allora $I_2 > C$. Se in C_1 inscriviamo un poligono I_1 pure regolare e di 2^n lati si avrà $D_1^2 : D_2^2 = I_1 : I_2$. Ma $D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C$ dunque $C_1 : C = I_1 : I_2$ epperò $C_1 : I_1 = C : I_2$. Ora $C_1 > I_1$, dunque $C > I_2$ il che è in contraddizione colla relazione $C < I_2$ dedotta dall' ipotesi $C < C_2$. Dunque non può essere $C < C_2$.

Sia invece, se è possibile, $C > C_2$. Osserviamo che dalla $D_1^2 : D_2^2 = C_1 : C$ risulta viceversa $D_2^2 : D_1^2 = C : C_1$; ed essendo $C > C_2$ esisterà uno spazio $C' < C_1$ tale che $C : C_2 = C_2 : C'$. Sarà allora $D_2^2 : D_1^2 = C_2 : C'$ il che è assurdo per quanto precede. Dunque non può essere neppure $C > C_2$. Ne segue $C = C_2$ epperò $C_1 : C_2 = D_1^2 : D_2^2$. c. d. d.

Prop. 18ª. *Due sfere stanno fra loro come i cubi dei loro diametri.*
Siano S_1 e S_2 le sfere, D_1 e D_2 i loro diametri. Dico che

$$S_1 : S_2 = D_1^3 : D_2^3.$$

Infatti se ciò non accade esisterà una sfera $S \gtrless S_2$ tale che

Digitized by Google

$$D_1^3 : D_2^3 = S_1 : S.$$

Supponiamo anzitutto sia $S < S_2$ e imaginiamo che queste due sfere abbiano il medesimo centro. Si potrà allora inscrivere nella maggiore una figura (generata dalla rotazione di un poligono parilatero attorno alla congiungente due vertici opposti) I_2 la cui superficie non tocchi S. In S_1 s' inscriva una figura I_1 simile a I_2. Sarà $I_1 : I_2 = D_1^3 : D_2^3$; ma è anche $S_1 : S = D_1^3 : D_2^3$ dunque $S_1 : S = I_1 : I_2$ ossia $S_1 : I_1 = S : I_2$. Ora $S_1 > I_1$ dunque anche $S > I_2$ il che è assurdo perchè la figura I_2 contiene la sfera S. È dunque assurda la supposizione $S < S_2$. E similmente dimostrerebbesi che se S' è una sfera minore di S_1 non può essere $S_2 : S' = D_2^3 : D_1^3$.

Sia invece, se è possibile, $S > S_2$. Essendo $S_1 : S = D_1^3 : D_2^3$ sarà pure $S : S_1 = D_2^3 : D_1^3$; ed essendo $S > S_2$ esisterà una sfera S' minore di S_1 tale che $S : S_1 = S : S'$. Verrà allora $S_2 : S' = D_2^3 : D_1^3$, il che è impossibile, come si è osservato più sopra. Dunque non può essere neppure $S > S_2$. Ne segue $S = S_2$ epperò $S_1 : S_2 = D_1^3 : D_2^3$. c. d. d.

Su questo uniforme andamento di dimostrazione ritorneremo con maggiore agio dopo averne studiate le memorabili applicazioni che ne fece Archimede. Quì però vogliamo osservare come le questioni nelle cui soluzioni esso viene invocato sono quelle che implicano in qualche modo l' idea d' infinito; ora di questo importante concetto noi vedemmo fatto uso, poco felicemente, nell' epoca anteriore a quella che attualmente ci occupa, mentre durante il periodo aureo della geometria greca lo troviamo scrupolosamente bandito. Sembra quindi che i matematici precedenti Eudosso, dopo avere invano tentato di porlo a base di argomentazioni rigorose, finirono col cercare e scoprire un artificio logico conducente ai medesimi risultati ma dal quale quel concetto era bandito. In qual modo e per opera di chi sia accaduto il passaggio dall' uno stadio all' altro, è un problema storico del più alto interesse, ma la cui soluzione non può fondarsi su alcun documento a noi noto; quel passaggio però è per fermo una delle prove più convincenti dello spirito eminentemente scientifico da cui il popolo greco fu animato sin dai tempi più remoti.

23. Delle cinque proposizioni con cui si apre il Libro XIII trattammo diffusamente nel libro precedente (n. 70); esse sono

Digitized by Google

ivi esposte perchè la *sectio aurea* a cui si riferiscono ha una parte importantissima nello studio delle proprietà metriche dei poliedri regolari, studio che è il fine precipuo del detto libro (1). Ad esse tengono dietro un teorema che dice essere irrazionali *recisi* le due parti di una retta divisa in media ed estrema ragione, e poi delle proposizioni metriche analoghe (7ª-12ª) fra cui ci basti notare quella (11ª) da cui si apprende la natura dell'irrazionalità del lato del pentagono regolare inscritto. Le cinque proposizioni 13ª-17ª insegnano a inscrivere in una sfera i cinque poliedri convessi regolari; dalle costruzioni indicate si deducono i rapporti dei lati di questi poliedri al raggio della sfera circoscritti, il che abilita (prop. 18ª) (2) a confrontare fra loro i lati stessi. Il risultato di questo paragone è assai notevole, eppure è poco conosciuto perchè il XIII Libro si suole escludere dalle edizioni scolastiche degli *Elementi;* per tale ragione e perchè le investigazioni in discorso vennero svolte ulteriormente e completate in lavori di cui fra breve dovremo occuparci, crediamo necessario indicare rapidamente un modo per ottenere facilmente le espressioni dei lati $(l_4, l_6, l_8, l_{12}, l_{20})$ dei poliedri regolari in funzione del diametro D della sfera ad essi circoscritta.

Tetraedro. Sia $PQRS$ il tetraedro dato; si conduca il diametro PP' della sfera circoscritta, il quale incontri in H il piano QRS: condotte QH e QP', sarà $PQ = l_4$ (lato del tetraedro), $PP' = D$ e per conseguenza

$$QP' = \sqrt{D^2 - l_4^2} \ , \ QH = \frac{l_4\sqrt{D^2 - l_4^2}}{D};$$

(1) In uno scolio (Euclide ed. Heiberg, T. V, p. 654) è detto che l'ottaedro e l'icosaedro furono scoperti da Teeteto mentre gli altri tre si debbono alla scuola di Pitagora; ammessa per vera questa notizia, rimarrebbe determinata con maggior precisione la parte che ebbe Teeteto (v. L. I, n. 64) nella composizione dell'ultimo libro degli *Elementi.*

(2) Di questa proposizione nell'edizione dell'Heiberg sono registrare due dimostrazioni.

Digitized by Google

e siccome l_4 non è che il lato del triangolo regolare inscritto nel cerchio di raggio QH così avremo

$$l_4 = QH \cdot \sqrt{3} = \frac{l_4 \sqrt{D^2 - l_4^2}}{D} \sqrt{3}$$

e quindi

$$[1] \qquad l_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, D .$$

Cubo. La semidiagonale del cubo essendo il raggio della sfera circoscritta si ha subito

$$[2] \qquad l_6 = \frac{D}{\sqrt{3}} .$$

Ottaedro. Gli spigoli del tetraedro uscenti da un vertice hanno per estremi i vertici di un quadrato a cui è circoscritto un circolo massimo della sfera di diametro D, onde

$$[3] \qquad l_8 = \frac{D}{\sqrt{2}} .$$

Icosaedro. Consideriamo un vertice A dell' icosaedro ed i cinque spigoli $AA_1, .., AA_5$ uscenti da esso. I loro estremi sono i vertici di un pentagono regolare avente i lati eguali a quelli dell' icosaedro; conduciamo il diametro AA' della sfera e determiniamone l'intersezione H col piano di quel pentagono. Condotte le rette A_1H e A_1A', otterremo un triangolo rettangolo avente per altezza il raggio r del cerchio circoscritto a quel pentagono; si avrà quindi (ragionando come nel caso del tetraedro)

$$r = \frac{l_{20} \sqrt{D^2 - l_{20}^2}}{D} .$$

E siccome l_{20} è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio di raggio r così

Digitized by Google

$$l_{20} = 2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}.$$ (1)

Eliminando r e sostituendo a *sen* $\frac{\pi}{5}$ il suo valore si ottiene un' equazione da cui si trae

$$[4] \qquad l_{20} = D\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

o anche

$$[4'] \qquad l_{20} = D\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} - \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{20}}$$

Inoltre

$$r = \frac{D}{\sqrt{5}}.$$

Dodecaedro. Similmente, detto B un vertice di un dodecaedro e BB_1, BB_2, BB_3 i tre spigoli uscenti da esso, B_1, B_2 e B_3 saranno vertici di un triangolo equilatero avente i lati eguali alla diagonali δ di un pentagono regolare di lato l_{12} (lato del dodecaedro), onde

$$\delta = 2 l_{12} \cos \frac{\pi}{5}.$$

D' altronde δ è anche lato di un triangolo equilatero $B_1 B_2 B_3$ inscritto in un cerchio il cui raggio r è dato (come nei casi del tetraedro e dell' icosaedro) dell' equazione

$$r = \frac{l_{12}\sqrt{D^2 - l_{12}^2}}{D},$$

onde

$$\delta = r\sqrt{3}.$$

---

(1) È facilissimo evitare l' uso delle funzioni circolari, ma noi ce ne serviamo per brevità tanto qui quanto nel calcolo relativo al dodecaedro.

Digitized by Google

Eliminando δ e r fra le tre equazioni scritte se ne trova una quarta fra D e l_{12} dalla quale si desume

$$[5] \qquad l_{12} = D\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{12}}$$

o anche

$$[5'] \qquad l_{12} = D\left\{\sqrt{\frac{5}{24}}-\sqrt{\frac{1}{24}}\right\}.$$

Le espressioni [1]... [5] dei lati dei cinque poliedri regolari contengono tutte le proprietà rilevate da Euclide nella penultima proposizione degli *Elementi*. L' ultima asserisce che si è così esaurito lo studio dei poliedri regolari (sottinteso *convessi*), non essendovene altri all' infuori dei cinque anzidetti.

24. Qual grado di originalità posseggano gli *Elementi* emerge da quanto dicemmo nelle pagine precedenti e nel Libro I della presente storia; ad Euclide non appartengono i primi due libri nè il IV, che dovevano esser noti nel loro insieme ai Pitagorici; non il III, che con ogni probabilità è opera dei geometri del V Secolo a. C., nè il V che sappiamo essere frutto delle ricerche di Eudosso; nel VI forse egli contribuì a rendere rigorose le dimostrazioni di verità intuitive e nei tre seguenti a sistematizzare delle verità aritmetiche note ai seguaci di Pitagora (1); nel comporre il X sfruttò i lavori di Teeteto e nei tre ultimi (2) trovò i materiali già preparati da Archita e dai geometri suoi contemporanei, da Teeteto, da Aristeo e da coloro che proseguirono le ricerche sui poliedri regolari intraprese da Pitagora e Platone. La geometria non uscì dunque dal capo di Euclide, come Minerva da quello di Giove (3), onde a ragione Tartaglia scrisse:

---

(1) Cfr. *Euclidis Opera omnia*, T. V, p. 365, scolio n. 8.

(2) Cfr. lo scolio n. 1 che si trova a pag. 654 del V Vol. dell'edizione di Euclide fatta dall'Heiberg.

(3) Questo erroneo apprezzamento informa un curioso dialogo fra Pappo ed Euclide immaginato da W. R. Hamilton e pubblicato da R. P. Graves nell' Appendice al Vol. I (1882) della *Life of Sir William Rowan Hamilton*.

Digitized by Google

" che l' altezza delle cose di che ha trattato Euclide non sono quelle che vi abbiano dato sì gran nome perchè la maggior parte di quelle erano note a cadaun Philosopho, perchè molti altri anciani havevano di tal materie abbondantemente trattato avanti di Euclide, ma solamente per haverle così con tanto mirabil ordine raccolte, assettate et ordinate „ (1).

Nè a Euclide spetta il merito di avere per primo avuto l' idea di riunire in un corpo di dottrina i risultati delle ricerche anteriori perchè sappiamo che egli fu preceduto da Ippocrate, Leone e Teudio; epperò gli *Elementi,* lungi dal presentare l' aspetto di un picco isolato in una vasta pianura, appaiono siccome uno dei costituenti una catena di montagne. E, a parer nostro, non è lecito nemmeno asserire che Euclide ne rappresenti la cima più elevata, perchè la sua posizione ufficiale avrà contribuito per fermo assai efficacemente a che il suo manuale venisse considerato, prima dai suoi immediati discepoli e poi dagli ammiratori del Museo di Alessandria, siccome la Bibbia dei geometri, che esso quindi facesse trascurare, dimenticare e perdere le antiche opere rivali. Tuttavia non v' ha dubbio che a ragione gli *Elementi* furono assunti come prototipo dei trattati sintetici, cioè di quelle esposizioni scientifiche in cui l' autore procede costantemente dal noto all' ignoto, dal particolare al generale, sfruttando ad ogni passo le nozioni già acquisite per stabilirne altre da utilizzare più tardi.

La questione di originalità si ripresenta quando dalla sostanza si passa a considerare la forma degli *Elementi.* La rigida uniformità dello stile euclideo è nota a tutti: per ogni teorema dopo l' enunciato (*protasi*) vengono subito indicate le condizioni supposte fra i dati quando sia necessario limitarne l' arbitrarietà; segue la ripetizione dell' enunciato sulla figura (*ectesi*) e poi la *costruzione,* cioè l' enumerazione di tutte le linee che fa mestieri tracciare per dimostrare il teorema proposto, a cui tien dietro la

(1) *Opere* (Venezia 1606) p. 273.

Digitized by Google

dimostrazione: questa si chiude con la protasi o l'ectesi invertita e le sacramentali parole *come dovevasi dimostrare* (1). Tale chiusa uniforme, che venne abbandonata subito dopo Euclide, ha forse le sue scaturigini nei ritornelli in uso nelle poesie didascaliche (2), e serviva ad Euclide a caratterizzare la natura della proposizione trattata, perchè sembra che le intestazioni di *problema* e *teorema* siano dovute a posteriori commentatori (3). — Ora questa regolarità, così fedelmente osservata, sembra contrastare col genio del popolo greco, geloso conservatore di ogni forma di libertà; onde è naturale cercarne le origini sotto altro cielo: e poichè nel *Manuale del calcolatore* egiziano (cfr. App. I al L. I) la soluzione di ogni problema comincia con le medesime parole, così si è supposto che la forma euclidea sia lo stadio più perfetto di uno stile geometrico nato in Egitto e perfezionatosi successivamente per opera dei varii geometri greci (4). È questa un'ipotesi che ha molta verosimiglianza, benchè non si possa sostenerla con un alcun dato di fatto (5). Coll'indicazione di tale congettura chiudiamo il nostro studio su gli *Elementi di Euclide*, chiedendo venia al lettore per esserci tanto diffusi su quest'opera; e speriamo che egli ci scuserà considerando che siccome da essa trae la letteratura matematica greca, così fa d'uopo conoscerla a fondo per invocarla quale punto di riferimento in qualunque investigazione sulla storia della geometria; d'altronde, qual'altra produzione matematica può vantare un'influenza più ampia, costante, benefica?

---

(1) Un analogo andamento costante hanno i problemi.

(2) P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893) p. 24.

(3) Proclo-Taylor, T. II, p. 24.

(4) Cantor *Vorlesungen* I, p. 237; Heiberg *Studien* citate p. 35.

(5) A coloro che pensano essere la rigorosa forma euclidea opera di Euclide, si può replicare con Hankel (op. cit. pag. 385) che la logica scientifica quale si trova insegnata da Aristotele non si saprebbe concepire ove già prima la matematica non avesse offerto l'esempio di una scienza rigorosamente dimostrativa.

Digitized by Google

25. Quantunque dalla maggioranza Euclide sia conosciuto esclusivamente come autore degli *Elementi,* pure questi rappresentano la più importante e voluminosa, ma non l' unica delle sue opere da noi possedute: havvene un' altra di cui è possibile formarsi un concetto esatto e su cui è lecito formulare un giudizio benchè non si presenti a noi sotto forma identica a quella che ebbe in origine (1); è quella intitolata *Dati* (2).

Euclide dicendo che una cosa è *data* intende che è *determinata* (non necessariamente in modo unico) virtualmente dalle condizioni che egli assegna, e distingue tre modi in cui ciò può accadere: la cosa cioè può essere *data di specie* (p. es. un poligono simile a un poligono dato) (3), o *data di posizione* (p. es. il punto comune a due linee concorrenti conosciute), o *data di grandezza* (p. es. un circolo di dato raggio). Col nome di *dati* egli designa poi delle proposizioni in cui una o più delle cose di cui si parla non hanno nell' enunciato la determinazione di posizione e grandezza che ad esse deriva in fatto dalle ipotesi e che si troverebbe nell' enunciato di un teorema ordinario (completo); la tesi da dimostrare consiste appunto nell' affermazione che la determinazione anzidetta è conseguenza necessaria delle ipotesi (4). Molti teoremi di geometria si possono facilmente trasformare in *Dati:* così dai teoremi 35 e 36 del Libro I degli *Elementi* — teoremi che formano la base della

---

(1) Ciò emerge esaminando la *Collezione* di Pappo; i punti di disaccordo fra il testo ed il commento sono da noi additati in alcune delle note seguenti.

(2) *Euclidis Data. Claudius Hardy graece nunc primum edidit, latine vertit, scholiisque illustravit.* (Lutetiae Parisiorum, 1625). — Peyrard, *Les oeuvres d'Euclide*, T. III (Paris 1818), — Buchbinder *Euclids Porismen und Data* (Naumburg, 1866) p. 29-43. — Altre edizioni sono registrate nella precitata *Bibliografia euclidea* del Riccardi.

(3) Forse per un *lapsus calami* nella prop. 39ª egli dice *dato di specie* un triangolo di lati dati.

(4) I moderni, che rifuggono dal distinguere le proposizioni in molte categorie, hanno bandito dai trattati la considerazione dei dati; ciò che ora diremo mostra però che la scomparsa del nome non è in questo caso sinonimo della scomparsa della cosa.

Digitized by Google

teoria della potenza di un punto rispetto ad un circolo — si ottengono le prop. 91ª e 92ª dei *Dati,* le quali affermano che, " dato in un piano una circonferenza ed un suo punto, è dato in conseguenza il rettangolo dei segmenti compresi fra il punto dato e le intersezioni di quella circonferenza con una retta arbitraria passante per questo punto; „ similmente molte proposizioni di geometria descrittiva si possono opportunamente trasformare in altrettanti dati (1). Viceversa non ogni *dato* si può trasformare in un *teorema completo:* ad es. il teorema " dato un polinomio qualunque $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, è dato (determinato) in conseguenza un valore di x che lo annulla „ è un *dato* il quale si potrebbe mutare in un teorema ordinario soltanto se si conoscesse l'espressione esplicita di x in funzione dei coefficienti $a_o, a_1, \ldots, a_n$.

Pappo (2) e Marino di Neapoli (v. L. IV) (3) pongono il trattato di Euclide fra quelli destinati a spianare la strada a coloro che intendono addestrarsi nell'arte di risolvere i problemi di geometria; quale ne fosse la materia è dichiarato in breve dal primo dei citati commentatori con le parole seguenti (4):

Il primo libro, che è quello dei *Dati*, contiene in tutto novanta teoremi (5). Dei quali i primi ventitrè trattano tutti di grandezze, mentre il 24.° si riferisce alle linee proporzionali senza posizione assegnata. Ne seguono quattordici sulle rette date di posizione. I dieci seguenti parlano di triangoli dati di specie ma non di posizione; i sette successivi di certi spazii rettilinei dati di specie ma non di posizione; e i sei seguenti di parallelogrammi e di applicazioni di spazii dati di specie. Dei cinque (6) che s'incontrano in seguito, il primo tratta di linee e gli altri del rapporto fra l'area di un triangolo ed il prodotto di due lati. I sette (7) che vengono poi, fino al 73.° (8), si riferiscono a due

---

(1) V. Flauti, *Geometria di sito sul piano e nello spazio* (II ed., Napoli 1821).

(2) Nella prefazione al VII Libro della *Collezione matematica.*

(3) In un commento allo scritto di Euclide che l'Hardy ha inserito nell'ed. precitata.

(4) Pappo ed. Hultsch, p. 638-40.

(5) O novantacinque, se si presta fede alle edizioni dianzi citate.

(6) O sei c. s.

(7) O gli undici c. s.

(8) O 78°.

Digitized by Google

parallelogrammi, e mostrano che questi parallelogrammi, in forza delle ipotesi fatte su i loro angoli, hanno rapporti dati; alcuni hanno tesi simili a quelle già dimostrate per triangoli. Delle figure considerate nei sei (1) successivi sino al 79°, (2) due sono triangoli e quattro sono linee proporzionali; nei tre (3) seguenti si parla poi di coppie di rette comprendenti un dato spazio e finalmente gli ultimi otto sino al 90° (4) riflettono un circolo dato tanto di grandezza quanto di posizione.

Dalle osservazioni di cui corredammo questo brano emerge che il testo dei *Dati,* quale risulta dai manoscritti sfruttati nelle edizioni sopra dette, non coincide perfettamente con quello che aveva sott' occhio Pappo; però le divergenze riflettono piuttosto la forma che la sostanza (5); anzi si può ritenere che esse derivino esclusivamente dal modo in cui le verità esposte venivano distribuite in proposizioni, perchè probabilmente le 64ª e 65ª ne formavano in origine una sola e le 71ª e 72ª erano ritenute per corollarii della 70ª, come le 75ª e 76ª della 74ª.

A meglio chiarire la natura e l' importanza delle proposizioni esposte da Euclide, trascriviamo le seguenti:

45-46. Se di un triangolo si conosce un angolo ed il rapporto al terzo lato alla somma dei lati che comprendono questo, oppure un altro angolo, il triangolo è dato di specie. 66. Se di un triangolo si conosce un angolo, sarà dato il rapporto dell' area del rettangolo compreso dai lati di quest' angolo all' area del triangolo. 80. Se di un triangolo si conosce un angolo ed il rapporto del rettangolo dei lati che lo comprendono al quadrato del terzo lato, il triangolo è dato di specie. 94. Se in un circolo dato di grandezza si conduce una retta che limiti un segmento capace di un angolo dato e si biseca l' angolo in questo inscritto, la somma dei lati di quest' angolo avrà un rapporto dato con la bisettrice di esso e sarà anche dato il rettangolo della detta somma e della porzione di bisettrice esterna al segmento (6).

---

(1) Cinque.

(2) O 83°.

(3) Quattro.

(4) O 95°.

(5) Cfr. anche Heiberg citate *Studien* p. 221-7. L' opera di tardi rimaneggiatori è visibile anche nelle molteplici dimostrazioni di cui sono munite le prop. 19ª, 24ª, 27ª, 33ª, 34ª, 45ª, 46ª, 54ª, 55ª, 67ª, 68ª, 80ª, 92ª e 94ª.

(6) Per verificare ad es., l' esattezza di quest' ultima proposizione si chiami $BC = a$ la retta data, A il vertice dell' angolo considerato; si ponga $AB = c$ e $AC = b$ e

Digitized by Google

Accenniamo da ultimo alle prop. 58ª-59ª ove l'algebra geometrica viene applicata a dimostrare la risolvibilità dei due sistemi di equazioni

$$\frac{x}{y} = \lambda, \; (a \pm x)\, y = k^2 ,$$

ed alle 84ª-87ª, ove viene similmente dimostrata l'esistenza di due quantità x, y formanti un dato prodotto e soddisfacenti una seconda equazione avente una delle forme seguenti:

$$x \pm y = a \, , \; x^2 - y^2 = l^2 \, , \; x^2 - c^2 = \mu y^2 \; (1).$$

Le precedenti notizie che Pappo diede (e Marino ripetè) intorno all'origine ed all'utilità dei dati, benchè capaci di agevolare l'uso del trattato euclideo, sono evidentemente assai monche; non è difficile però sopperire alla loro deficienza. Si os-

---

si indichi con d la bisettrice AD dell'angolo A e con d' la porzione esterna. Si trova facilmente:

$$d = \frac{2bc \cos \frac{1}{2} A}{b + c}$$

$$BD = \frac{ac}{b + c} \quad , \quad CD = \frac{ab}{b + c}$$

$$d' = \frac{BD \,.\, CD}{d} = \frac{a^2}{2(b + c) \cos \frac{1}{2} A}$$

$$d + d' = \frac{b + c}{2 \cos \frac{1}{2} A}$$

Se ne deduce

$$\frac{b + c}{d + d'} = 2 \cos \frac{1}{2} A \; , \; (b + c)\, d' = \frac{a^2}{2 \cos \frac{1}{2} A} ,$$

i cui secondi membri sono dati, come appunto asserisce Euclide.

(1) Cfr. Cossali op. cit. p. 88-91, 269-272; Chasles *Aperçu historique* (2.ª ed. 1875) p. 11; P. Tannery, *De la solution géométrique* etc. p. 400-40. Si osservi a questo proposito come il primo libro dell'opera *De numeris datis* di Giordano Nemorario, matematico del secolo XIII, si possa intendere come una continuazione od un commento del lavoro di Euclide; infatti le proposizioni ivi trattate sono tutte casi speciali della seguente: *se sono date due equazioni di 2° grado con due incongnite, saranno date anche le incognite.*

Digitized by Google

servi infatti (1) che, volendo applicare il metodo analitico alla costruzione di una figura soggetta a certe condizioni, si cerca di sostituire queste con altre equivalenti che permettano di ottenere separatamente le varie parti della figura ignota; a tale scopo s' immagina trovata una figura che soddisfi a tutte le date condizioni e su di essa si ragiona sinteticamente — applicando dei teoremi ed eseguendo delle costruzioni — finchè si arrivi ad una relazione fra i dati e le incognite, che abiliti a costruire una parte della figura che per comodità si è tracciata ma che realmente è ignota: da questo istante quella parte della figura si può porre nella categoria delle cose date; proseguendo in tale via si giungerà a conoscere tutte le varie parti della figura cercata. Ma, per ottenere che la soluzione raggiunga la semplicità e l'eleganza massime, fa duopo eliminare da questo procedimento tutto che non ne sia ingrediente indispensabile: come tale non è certamente da considerarsi ogni costruzione che insegna il modo di trovare certe parti della figura quand' è sufficiente sapere che questo modo esiste. Orbene, ogni proposizione che accerti dell'esistenza di tali parti è un *dato;* una raccolta di dati è quindi di grande ajuto per chiunque voglia risolvere problemi di geometria: Euclide l' ha somministrata (per primo forse) col trattato di cui ci stiamo occupando, il quale è pertanto un vero supplemento agli *Elementi,* e, secondo Newton, porge mezzi bastanti per dimostrare tutte le proposizioni di geometria senza calcolo, cioè nel modo che quel grande geometra considerava siccome l'unico che un matematico dovesse adoperare in pubblico (2).

---

(1) V. Hankel l. c. p. 141-2.

(2) Per maggiori particolari intorno all' ufficio dei *Dati* si ricorra a L. F. Ofterdinger, *Beiträge zur Geschichte des griechischen Mathematik* (Ulm, 1860) p. 13.

Osserviamo ancora che fra i geometri occidentali che seguirono la strada che Euclide aperse coi *Dati* si può citare Giordano Nemorario e fra gli arabi Hassan-ben-Haithem, morto al Cairo nel 430 d. C., che imitò il geometra greco con un importante lavoro *Sulle cose conosciute,* contenente dei teoremi eleganti che vennero tradotti in francese da A. M. Sedillot e pubblicati nel T. I (Paris, 1845, p. 378-400) dei *Matériaux pour servir à l' histoire des sciences mathém. chez les Grecs et les Orientaux.*

Digitized by Google

26. Come ci apprendono i passi riferiti nei n.i 4 e 5 del presente libro, oltre agli *Elementi* ed i *Dati;* fa parte della collezione dei lavori geometrici euclidei un'opera che tratta *della divisione delle figure* (*περὶ διαιρέσεων βιβλίον*) (1); in essa, se si presta fede a Proclo (2), Euclide insegnò a dividere il circolo e delle figure rettilinee in parti alcune simili a delle figure date e altre dissimili. Intorno a quest'opera non si avevano altre notizie che quelle somministrate dal citato commentatore (3), quando, intorno il 1563, il dotto inglese Giovanni Dee (1527-1605) tradusse dall'arabo un breve trattato di un tal Maometto di Bagdad (matematico del X secolo) nel quale egli credette ravvisare lo scritto di Euclide; egli pubblicò la sua versione coll'ajuto di F. Commandino (4), e questa con qualche riserva, venne più tardi accolta dal Gregory nella sua famosa edizione (1703) di Euclide.

Tali riserve, nonchè il sospetto di Savile (5) che la traduzione non riproducesse integralmente lo scritto di Euclide, sono avvalorate, sia dalla presenza di inesattezze delle quali l'autore degli *Elementi* era per fermo incapace, sia dal fatto che, mentre nell'opera del geometra greco era considerato anche il cerchio (v. sopra), il geometra orientale si limitava a figure rettilinee.

---

(1) Per la bibliografia dell'argomento rimandiamo alle *Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree* pubblicate dal Prof. Favaro nel T. XXII, (1882) p. 129-154 delle *Memorie del R. Istituto Veneto.*

(2) Si noti anche essere opinione del Cantor (*Vorlesungen*, T. II, p. 34 e 69) che a qualche rimaneggiamento arabo dello scritto euclideo attingessero Leonardo Pisano nello scrivere quella parte della *Pratica geometriae* che si riferisce alla divisione delle figure (v. *Scritti inediti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da B. Boncompagni*, T. II, 1862, p. 110-148) e Giordano Nemorario nel redigere il secondo libro dell'opera *De triangulis* (nel 1887 pubblicata da M. Curtze nel VI Heft delle *Mittheilungen des Coppernicusvereins f. Wiss. und Künste zu Thorn*).

(3) Proclo-Taylor I, p. 157.

(4) *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino adscriptus, nunc primum Joannis Dee Londinensis et Federici Commandini Urbinatis in lucem editus* (Pisauri 1570).

(5) *Praelectiones tredecim in principium Elementorum Euclidis* (Oxon. 1621), p. 17-18.

Digitized by Google

Perciò è da ritenersi per un caso singolarmente avventuroso che F. Woepcke (1826-1864) verso la metà del nostro secolo scoprisse nella Biblioteca nazionale di Parigi un altro manoscritto arabo contenente gli enunciati di una serie di teoremi sullo stesso argomento; di esso nel 1851 egli pubblicò una traduzione francese emettendo l'ipotesi che esso riproducesse la sostanza del trattato euclideo (1), e questo avviso, fondato su ragioni intrinseche, rivelate dal confronto del testo con le informazioni di Proclo, è oggidì generalmente adottato (2). Chi lo accetta deve dunque ritenere che questa terza opera di Euclide, a somiglianza della seconda, servisse di complemento alla prima, avendo essa per iscopo di risolvere in casi particolari il problema (suggerito forse dai bisogni della pratica) di " dividere una figura racchiusa da linee rette o circolari, mediante una o più rette, in parti aventi delle relazioni prestabilite fra loro o con altre figure date „.

Le figure considerate sono il triangolo (prop. 1^a, 2^a, 3^a, 19^a, 20^a, 26^a, 27^a, 30^a, 31^a), il parallelogrammo (6^a, 7^a, 10^a, 11^a), il trapezio (4^a, 5^a, 8^a, 9^a, 12^a, 13^a, 32^a, 33^a), un quadrilatero piano rettilineo qualunque (14^a-17^a, 34^a-36^a), un triangolo di cui un lato è un arco circolare (28^a) e un cerchio (29^a). Le rette da condursi devono essere o parallele ad un lato (1^a, 2^a, 4^a, 30^a-33^a), o passare per un punto dato del perimetro (3^a, 6^a-9^a, 16^a, 17^a, 28^a, 36^a), in particolare per un vertice (14^a, 15^a, 34^a, 35^a), o passare per un punto dato fuori del perimetro (10^a-13^a, 19^a, 20^a, 26^a, 27^a) o essere semplicemente fra loro parallele (prop. 29^a). Le proposizioni 18^a e 21^a-25^a fungono da lemmi e sono soltanto enunciate; soltanto enunciate sono pure le costruzioni, eccezion

(1) Woepcke, *Notices sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide* (*Journal Asiatique*, 4.ª Serie, T. XVIII, 1851, p. 217-47).

(2) Cantor *Vorlesungen* I, p. 247, Heiberg citate *Studien* p. 12-16 e 36-38 (ivi, p. 15, si legge: « die von Woepcke herausgegebene Abhandlung ist die Schrift Euklids περί διαιρέσεων und zwar vollständig »), Steinschneider, *Euklid bei den Arabern* (Zeit. f. Math. u. Phys., XXXI Thl., 1886, Hist.-lit.-Abth., p. 102).

Digitized by Google

fatta per quelle contenute nelle prop. 19ª, 20ª, 28ª e 29ª che sono giustificate col mezzo di ragionamenti rigorosi, eleganti e fondati su verità insegnate negli *Elementi* (1).

27. Gli *Elementi,* i *Dati* ed il lavoro che tratta *Della divisione delle figure* sono gli unici scritti di Euclide appartenenti alla matematica pura che ci furono conservati almeno sotto una forma che permetta di pronunciare un giudizio sul loro contenuto ed il loro valore: ma essi non sono i soli nè i più importanti che egli abbia composti; fra i lavori di cui antichi scrittori ci conservarono memoria quello di cui più si lamenta la perdita è il trattato in tre libri sui *Porismi* (Πορίσματα), pel quale gli antichi professavano tale e tanta stima che Montucla credette di poter asserire che esso " était le plus profond de tous les ouvrages d'Euclide et celui qui lui ferait le plus honneur s'il nous était parvenu (2) „.

Prima d'accingerci a radunare le notizie che ad esso si riferiscono rileveremo come il vocabolo *porisma* avesse assai spesso nella letteratura matematica dei Greci il significato di *corollario:* ma esso ne aveva un altro più recondito nel quale appunto venne adoperato da Euclide nell'opera di cui stiamo per occuparci (3). Per determinare questo secondo significato l'unico

---

(1) Riguardo alle divinazioni dell'opera discorsa, si vegga il n. 2 dell'Appendice al presente Libro.

(2) *Histoire des mathématiques*, 2e éd., T. I, p. 215.

(3) « *Porismi* si chiamano certi problemi analoghi ai *porismi* di Euclide. Ma si dice in particolare quando dalle cose che furono dimostrate scaturisce qualche teorema che non si aveva in vista e che perciò si chiama *porisma*, come una specie di guadagno che si unisce a quello che ci si era proposti di dimostrare ». « Porisma è un vocabolo di geometria; ma ha due significati. Infatti si chiamano *porismi* i teoremi che scaturiscono dalla dimostrazione di altri teoremi come un guadagno inaspettato del quale profitta il geometra; e si chiamano anche *porismi* delle proposizioni che non hanno per oggetto nè una semplice costruzione, nè una semplice dimostrazione, ma in cui bisogna ottenere qualche cosa. Se si dimostra l'eguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele, si giungerà a conoscere ciò che è. Se si divide un angolo in due parti eguali, o si costruisce un triangolo, o si aggiunge o toglie una linea, tutto ciò esige una costruzione. Ma se si tratta di

Digitized by Google

scrittore del quale si può invocare l'ajuto è Pappo. Ma sgraziatamente le parole del commentatore alessandrino sono ben lungi dall'essere un modello di chiarezza; a dimostrarlo basti citare il fatto che Ed. Halley, che fu uno dei più profondi conoscitori della geometria greca, candidamente confessò di non afferrarne il senso (1). Ciò forse poteva ritenersi dovuto al non essere la traduzione della *Collezione* dal Commandino fatta e pubblicata (Pisa 1588 e Bologna 1660) così fedele da permettere si giungesse ad un'interpretazione del testo accettabile da tutti: donde il movente dei numerosi tentativi che vennero fatti in passato da egregi ellenisti geometri per dichiarare completamente il significato delle parole di Pappo e dei lunghi dibattiti che essi provocarono (2); tuttavia neppure l'edizione completa del testo greco di cui l'Hultsch ar-

---

trovare il centro di un dato cerchio, o la massima comune misura di due grandezze date, queste questioni e tutte le analoghe stanno in certo modo fra i teoremi ed i problemi; giacchè non si tratta della costruzione, nè della considerazione esclusivamente teorica delle cose cercate, ma bensì di ottenerle, perchè bisogna presentarle alla vista, porle sotto gli occhi. Tali sono i porismi composti da Euclide e che egli ha riuniti nei libri intitolati *Porismi*. Ma noi non diremo niente dei porismi di tal fatta. Quanto ai porismi esistenti negli *Elementi* di Euclide, essi si incontrano come conseguenza delle dimostrazioni di altri teoremi, benchè non siano stati il tema delle dimostrazioni stesse ». Proclo-Taylor, II, p. 98-99.

(1) *Apollonii Pergaei De Sectione rationis* ecc. (Oxonii, 1706) p. XXXVII.

(2) Si veggano gli articoli seguenti: P. Breton (de Champ) *Recherches nouvelles sur les porismes d' Euclide* (*Journal de Mathématiques*, I Série, T. XX, 1855, p. 209-305; cfr. *Comptes rendus* 29 Octobre 1849 e 6 Juin 1853); Ch. Housel *Les porismes d' Euclide* (*Journ. de Math.*, II Série, T. I, 1856, p. 193-209), a cui rispose il Breton (Ib. id. T. II, p. 185-205); Vincent, *Notice sur les porismes* (in *La Science*, 1er Fevrier 1857); essendo questa stata confutata dal Breton (ib. 2, 5 et 9 Avril), il Vincent la fece seguire da una *Seconde Notice sur les porismes* (ib. 17 et 21 Mai), che provocò il *Deuxième supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d' Euclide* dallo stesso Breton (*Journ. de Math.* II Série, T. III, 1858, p. 89-142); da ultimo, alle *Considérations sur les porismes en général et sur ceux d' Euclide en particulier* (*Journ. de Math.* II Sèrie, T. IV, p. 9-46) del Vincent, rispose il Breton (*Journ. de Math.* II Série T. IV, p. 153-4; *La Science*, n.° 27-29). — Cfr. anche F. Buchbinder *Euclids Porismen und Data* (Einladungs-Programm d. k. Landes-Schule Pforta, Naumburg, 1866).

Digitized by Google

ricchì la letteratura geometrica ha posto fine a tutte le discussioni (1); sicchè noi, nel presentare ora una versione italiana del passo della *Collezione* che concerne i *Porismi di Euclide* (versione fatta con l'intendimento che sia uno specchio fedele delle opinioni oggidì più diffuse) non ci lusinghiamo che anche in tutti i particolari essa possa ottenere l'approvazione generale:

Dopo i *Contatti* s'incontrano i *Porismi* di Euclide in tre libri, collezione ingegnosa di una quantità di cose utili per risolvere i problemi più difficili, dei quali porismi la natura presenta un numero illimitato di specie (2). [Nulla fu aggiunto a quello che Euclide scrisse in origine, se si eccettuano alcuni matematici senza gusto del tempo anteriore al nostro che aggiunsero ad alcuni di essi una nuova redazione secondaria. Benchè ciascuno di essi sia suscettibile di una certa quantità di dimostrazioni, come noi facciamo vedere, pure Euclide ne dà per ciascuno una sola, che è sempre la più chiara. I *Porismi* racchiudono una materia sottile, ma naturale e necessaria e sopratutto generale e di uno studio estremamente gradevole a quelli che hanno la facoltà di percepire e di ragionare]. I diversi generi di porismi non sono teoremi nè problemi, ma rappresentano in un certo senso una forma intermedia [di modo che si possono enunciare tanto come teoremi quanto come problemi]; ne risultò che fra i molti geometri alcuni li considerano per teoremi ed altri per problemi, gli uni e gli altri badando soltanto alla forma degli enunciati. Ma le definizioni date dagli antichi dimostrano che essi hanno capite meglio le differenze che intercedono fra questi tre generi di proposizioni. Infatti essi dicevano che il teorema è una proposizione in cui si domanda di dimostrare ciò che è enunciato, il problema una proposizione in cui si domanda di costruire ciò che è indicato, ed il porisma una proposizione in cui si domanda di procurarsi ciò che è proposto. [Questa definizione di porisma fu cambiata dai geometri moderni, i quali non poterono trovare tutto e conservarono soltanto i principii di questa dottrina limitandosi a dimostrare che quello che è cercato è possibile senza procurarselo effettivamente. E questi geometri, benchè fossero condannati tanto dalla definizione quanto dal contesto, basandosi sopra una circostanza secondaria diedero questa definizione: « quello che costituisce il porisma è ciò che manca all'ipotesi di un teorema locale » (3). I luoghi geometrici costituiscono una classe di porismi: essi abbondano nei libri sul metodo analitico. Ma questa classe

---

(1) Cfr. Heiberg *Studien über Euklid* p. 64 e seg.

(2) Le parentesi quadre designano i passi che l'Hultsch giudica interpolati.

(3) Secondo Chasles il senso di questa frase estremamente concisa sarebbe che il porisma è inferiore al teorema locale per quanto concerne l'ipotesi; in altre parole, quando un teorema locale non ha in certe parti dell'enunciato tutta la determinatezza che gli competerebbe, quella proposizione perde la qualità di teorema per acquistar quella di porisma.

Digitized by Google

viene riunita, denominata e trattata a parte essendo più variata delle altre, perchè dei luoghi alcuni sono piani, altri solidi, altri lineari ed altri ancora si riferiscono alle medie proporzionali]. Accade poi ancora riguardo ai porismi che i loro enunciati vengano presentati in modo assai compendioso, sottintendendovi molte cose; ne derivò che molti geometri considerandoli soltanto sotto una parte dei loro aspetti non intesero la parte più essenziale del loro contenuto. [È pressochè impossibile riunire in un enunciato unico parecchi di questi porismi, non avendone Euclide dati molti di ciascun genere, ma soltanto uno o qualcuno a mo' d'esempio. Tuttavia egli in principio del primo libro ha recato alcune proposizioni fra loro analoghe; sono dieci di numero ed appartengono al genere più abbondante di tutti, cioè ai luoghi]. Noi però avvertimmo che esse si potevano riassumere in un enunciato unico e scrivemmo: « Se si considerano quattro rette secantisi a due a due, e si suppone che tre dei punti d'intersezione situati sopra una di esse [o due soltanto se due delle rette date sono parallele] siano dati, mentre tutti gli altri, uno eccettuato, percorrono delle rette date di posizione, anche quest'uno descriverà una retta data di posizione (1) ». Si tratta quì di quattro rette soltanto, tre qualunque delle quali non passino per lo stesso punto; ma generalmente si ignora essere la proposizione vera per un numero qualunque di rette; si enuncia così: « Se quantesivogliano rette s'incontrano due a due, ma tre qualunque di esse non passano pel medesimo punto, se inoltre tutti i punti d'intersezione situati su una di esse sono dati e ciascuno di quelli appartenenti ad un altra si trovi sopra una retta data di posizione »; o più generalmente così: « Se quantesivogliano rette s'incontrano a due a due, ma tre qualunque di esse non passano pel medesimo punto, se inoltre sono dati tutti i punti d'intersezione situati su una di queste rette e se finalmente fra i punti d'intersezione delle altre formanti un numero triangolare, ve ne sia un numero espresso dal lato di questo numero triangolare di soggetti a rimanere ciascuno su una retta data di posizione, purchè tre qualunque di questi non formino un triangolo (2), anche ciascuno degli altri punti descriverà una retta data di posizione » (3).

---

(1) In altri termini: se si deforma un triangolo per modo che i suoi lati ruotino attorno a tre punti in linea retta e che due sue vertici percorrano due rette date di posizione, anche il terzo vertice percorrerà una retta.

(2) Avente per lati tre delle rette date.

(3) In altre parole: « se si deforma un n — latero completo per modo che i suoi lati ruotino attorno ad n punti in linea retta e che $n-1$ dei suoi $\frac{n(n-1)}{2}$ vertici percorrano ciascuno una retta, gli altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ suoi vertici percorreranno altrettante rette; bisogna però che con quegli $n-1$ vertici non si possa formare alcun triangolo avente per lati i lati del poligono ». Avvertiamo che il significato preciso di questa proposizione fu scoperto dal Simson e fatto conoscere nel lavoro che citeremo fra breve.

Digitized by Google

È inverosimile che l'autore degli *Elementi* abbia ignorata questa generalizzazione, ma egli avrà voluto porne soltanto i fondamenti, perchè sembra che in tutti i suoi porismi egli abbia inteso soltanto di spargere quasi i principii ed i germi [di molte e importanti cose]. I varii generi di porismi si differenziano fra loro, non tanto per le diversità delle ipotesi, quanto piuttosto per le accidentalità e le differenze delle cose cercate. [Infatti le ipotesi sono tutte fra loro differenti essendo specialissime; ma uno stesso risultato, una stessa delle cose cercate, può derivarsi da molte ipotesi differenti].

Nel I Libro dei *Porismi* si deve adunque procurarsi delle cose appartenenti ai generi seguenti. In principio del libro si trova la seguente proposizione: *se da due punti dati si conducano due rette a segarsi sopra una retta data di posizione, una delle quali tagli su una retta data di posizione un segmento a partire da un punto dato, anche l'altra taglierà su un'altra retta data di posizione un segmento avente col primo un rapporto dato* (1). In seguito poi: I. Questo punto sta sopra una retta data di posizione (2). II. Il rapporto di queste due rette è dato. III. Il rapporto di questa retta ad un certo segmento è dato. IV. Questa retta è data di posizione. V. Questa retta prolungata passa per un punto dato. VI. Il rapporto di questa retta ad una retta compresa fra questo punto ed un punto dato è dato. VII. Il rapporto di questa retta ad una retta abbassata da questo punto è dato. VIII. Il rapporto di questo rettangolo al rettangolo formato da questa e da una retta data è dato. IX. Di questo rettangolo è data una parte, mentre un'altra parte ha un dato rapporto con un dato spazio (3). X. Nello stesso tempo è dato questo spazio ovvero questo assieme ad un altro e quello ha ad un segmento un dato rapporto. XI. La retta, con la quale congiunta questa retta ha con essa un dato rapporto, è in un dato rapporto con la retta congiungente questo punto con un altro punto dato. XII. Il rettangolo di questa retta e di una retta data è eguale al rettangolo di una retta data e della congiungente di questo punto con un punto dato. XIII. Il rapporto della somma di queste rette alla congiungente di questo punto con un punto dato è dato. XIV. Questa retta seca da due rette date di posizione due segmenti formanti un dato rettangolo.

---

(1) La prima delle rette date di cui qui si parla è data ad arbitrio: l'altra, come pure l'origine del relativo segmento, è determinata in conseguenza. Notiamo che lo Chasles, l'Hultsch ed altri indicano questa proposizione col n.° 1 ritenendola per rappresentante del *primo genere* di porismi; il sistema opposto, da noi seguito è quello dell'Heiberg.

(2) Per intendere il significato di questa e delle frasi ellittiche congeneri, fa d'uopo tener presente che Pappo enuncia soltanto le *tesi* dei porismi; quando egli parla di *queste* rette, *questi* punti, ecc. intende di indicare le rette, i punti, ecc. dei quali si parla nelle *ipotesi* (taciute) dei relativi porismi.

(3) Il significato di questa frase è uno dei più controversi.

Digitized by Google

Nel II Libro le ipotesi sono differenti, ma le cose cercate sono per la maggior parte le medesime; s'incontrano inoltre le seguenti:

XV. Questo spazio o questo assieme ad uno dato ha con un dato spazio un rapporto assegnato. XVI. Il rettangolo formato da queste rette ha un dato rapporto con un dato spazio. XVII. Il rettangolo della somma di queste due rette e dalla somma di queste due altre rette ha un dato rapporto con un dato spazio. XVIII. Il rettangolo formato da questa retta e dalla somma di essa e di quella che ha con essa un dato rapporto, assieme al rettangolo di questa e di quella avente con essa un dato rapporto, ha con un certo spazio un dato rapporto. XIX. La somma di queste rette ha un dato rapporto alla congiungente questo punto con un punto dato. XX. Queste rette formano un dato rapporto.

Nel III Libro la maggior parte delle ipotesi si riferiscono al semicerchio, poche altre ai circoli ed ai segmenti circolari, invece le cose cercate sono per lo più identiche alle precedenti. Vi sono inoltre le seguenti:

XXI. Il rettangolo di queste due rette ha un dnto rapporto col rettangolo di queste altre due rette. XXII. Il rapporto del quadrato di questa retta ad un dato quadrato è dato. XXIII. Il rettangolo di queste rette è eguale al rettangolo di una retta data e della congiungente di questo punto con un punto dato. XXIV. Il quadrato di questa retta è eguale al rettangolo formato da una retta data e da quella determinata da una perpendicolare a partire da un dato punto. XXV. Questa retta assieme a quella che ha ad essa un dato rapporto ha un dato rapporto con un segmento dato. XXVI. Vi è un punto tale che le rette condotte da esso a questo cerchio formano un triangolo dato di specie. XXVII. Vi è un punto tale che le rette condotte da esso a questo cerchio tagliano archi eguali. XXVIII. Questa retta è parallela ad una data di posizione o forma un dato angolo con una retta che prolungata passa per un dato punto.

Nei tre libri dei *Porismi* si trovano 38 lemmi e 171 teoremi (1).

28. Due sono le questioni fondamentali che riflettono la dottrina dei porismi e che le parole di Pappo non risolvono immediatamente; cioè: I. scoprire il significato del vocabolo *porisma;* II. determinare completamente e con precisione il contenuto dell'opera di Euclide e possibilmente ricostruirla. La loro importanza per la conoscenza della geometria greca è tale che, dal momento in cui si risvegliò il gusto per le investigazioni matematiche, molti egregi geometri si accinsero a risol-

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 648-660.

Digitized by Google

verle, e dei frutti che essi raccolsero è nostro dovere fare quì un cenno, restringendoci però a quegli scienziati che ottennero dei risultati di valore indiscutibile (1).

Prescinderemo da Alberto Girard (1590-1634) perchè egli, dopo avere studiato così a fondo la questione da potere asserire di essere in possesso di una completa divinazione dell'opera di Euclide (2), non mise mai a parte il pubblico matematico di quanto egli aveva compiuto. Segue ad esso in ordine cronologico Fermat (1601-1665) (3), il quale verso il 1655 (4) definì il porisma con delle parole che ci sembra opportuno di riferire testualmente: " Quum locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec locum ipsum

---

(1) Gli altri a noi noti sono: Anderson, *Animadversiones in Franciscum Vietam* (Parigi, 1617); Ismaelis Bullialdi, *Exercitationes geometricae tres* (id., 1657); Francisci Schooten, *Exercitationum mathematicarum* etc. (Lugd. Bat., 1657; ivi, p. 484, è usata la parola *porisma* senza dichiararne il significato); Renaldini, *De resolutione et compositione mathematica* (Padova, 1668); Lawson, *Treatise concerning Porisms* (1777), Wallace, *Some Geometrical Porisms* etc. (Trans. of the Edin. Society, T. IV, 1798), Lord Brougham, *General Theorems, chiefly Porisms, in the higher Geometry* (Phil. Transactions, 1798), Lhuillier, *Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique* (1809), Eisemann, *Pappi Alexandrini Collec. math. Libri V pars altera* (Parigi 1824; prefazione), Carnot, *Géométrie de position* (Paris, 1802, p. 484), Nesselmann. *Die Algebra des Griechen* (Berlin, 1842, p. 439), Heath, *Diophantos of Alexandria* (Cambridge, 1885, p. 32); nonchè alcuni che avremo occasione di citare fra breve e nell'Appendice.

(2) « Le tout, quand il n'y a que deux lignes qui passent par un poinct, comme jadis estoyent les Porismes d'Euclide, qui sont perdus, lequels j'espère de mettre bien tost en lumiere les ayant restituez il y a quelques années en ça ». *Tables de sinus, tangentes et secantes etc. par Albert Girard samielois* (La Haye 1626). « Mais il est à estimer qu'il (Euclide) eu plus escrit en ses trois livres de Porismes qui sont perdus, lesquels, Dieu aidant, j'espère de mettre en lumière, les ayant inventez de nouveau ». *Oeuvres mathématiques de Simon Stevin etc. Le tout reveu, corrigé et augmenté par Albert Girard*, Leyde, 1634.

(3) *Porismatum Euclideorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus geometris exhibita* in *Oeuvres de Fermat*, ed. P. Tannery et Ch. Henry, T. I., Paris 1891, p. 76-84.

(4) Questa data si desume dall'essere state le ricerche di Fermat comunicate a Bulliaud due anni prima della redazione delle *Exercitationes* succitate.

Digitized by Google

inveniendae lineae designaverimus; sed quum ex supposito loco dato et cognito alium locum venamur, novus iste locus porisma vocatur ab Euclide: qua ratione locos ipsos porismatum unam speciem et esse et vocari verissime Pappus subjunxit (1) „; e per chiarire meglio il suo pensiero, che da queste parole non emerge con tutta la limpidezza desiderabile, egli enunciò cinque proposizioni che egli opinava potessero considerarsi come facenti parte dell'opera perduta (2), promettendone poi una divinazione completa ove le persone competenti avessero accordato a tale saggio la loro approvazione. Ma, sia che questo giudizio favorevole non venisse pronunciato, sia che egli stesso avvertisse di non meritarlo, sia per altre ragioni, Fermat non tradusse in atto il suo disegno e lasciò a Roberto Simson (1687-1768) la gloria di muovere il passo veramente decisivo verso la soluzione del famoso enigma dei *Porismi*. Infatti questo egregio geometra riuscì da prima a dichiarare il senso di alcune fra le proposizioni riferite da Pappo (3); ed in seguito (4) fissò il senso della parola porisma mediante le frasi seguenti: " Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectio-

---

(1) Il Breton (p. 253 della prima fra le memorie citate) commenta queste parole come segue: « Concevons que l'on ait formé une première équation d'un lieu géométrique. Cette équation pourra être transformée d'une infinité de manières, en rapportant le point du lieu, soit à des droites fixes, soit à des points fixes etc. Ce sont les nouvelles équations ou propositions ainsi obtenues que Fermat appelle des Porismes ».

(2) Vedine gli enunciati nell'Appendice (n. 3).

(3) *Pappi Alexandrini Propositiones duae generales, quibus plura ex Euclidis Porismatibus complexus est.* (Philos. Transactions 1723).

(4) *De Porismatibus tractatus; quo doctrinam porismatum satis explicatam, et in posterum ab oblivione tutam fore sperat auctor* in *Roberti Simson Opera quaedam reliqua* (Glasguae 1776), p. 315-594.

Digitized by Google

nem quandam communem Propositione descriptam (1). Porisma etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea quae data demostranda sunt, invenienda proponitur „. Risoluta in tal modo la prima delle questioni fondamentali che enunciammo in principio di questo numero, Simson si è volto alla seconda, dimostrando alcune delle proposizioni che leggonsi nella *Collezione* e suggerendone altre che a suo avviso dovevano far parte dell'opera perduta (2).

Il lavoro di Simson ebbe in Inghilterra parecchi continuatori e la definizione di porisma da lui suggerita fu adottata generalmente anche nel continente (3); anzi questa definizione venne scelta da Chasles (1796-1880) come punto di partenza delle memorabili sue indagini intorno al problema storico che ora ci occupa (4). Egli infatti ha, in ultima analisi, svolte e completamente spiegate le idee del matematico inglese enumerando tutte

---

(1) Questa definizione fu espressa in francese come segue da Chasles: « Le porisme est une proposition dans laquelle on demande de démontrer qu'une chose ou plusieurs choses sont données, qui, ainsi que l'une quelconque d'une infinité d'autre choses non données, mais dont chacune est avec les choses données dans une même relation, ont une certaine proprieté commune, décrite dans la proposition ».

Per esempio la seguente proposizione è un porisma: Data una retta di posizione ed una circonferenza di grandezza e posizione, esiste un punto tale che ogni retta condotta per esso tagli la retta e la circonferenza in due punti le cui distanze dal punto in questione formino un rettangolo dato. Le cose che si devono dimostrare date sono il punto fisso ed il rettangolo costante, mentre le infinite cose non date sono le coppie di punti.

(2) Il lettore le troverà riferite nel n. 4 dell'Appendice al presente Libro.

(3) Fanno eccezione: Playfair (*On the origin and investigation of Porismes* nelle *Trans. of the R. Society of Edimburgh*, T. III, 1794), Leslie (*Geometrical Analysis*, Edimburg, 1809 e 1821), H. Wronski (*Introduction à la philosophie des mathématiques et technie de l'algoritmie*, Paris, 1811, p. 127 e Breton de Champ, mem. cit.).

(4) V. *Aperçu historique* note III, e più completamente l'opera *Les trois livres des Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après le notices et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions* (Paris, 1860).

Digitized by Google

le ragioni che inducono a pensare che questi abbia divinato i pensieri degli antichi geometri. A tale scopo ha fatto vedere come la definizione di Simson possa venire surrogata dalla seguente, per certi riguardi (1) preferibile all'altra: " I porismi sono dei teoremi incompleti che esprimono certe relazioni esistenti fra enti variabili secondo una legge comune; relazioni indicate nell'enunciato del porisma, ma che bisogna completare determinando la grandezza o la posizione di certe cose che sono le conseguenze dell'ipotesi e che sarebbero determinate nell'enunciato d'un teorema propriamente detto o teorema completo „. Inoltre ha con insuperabile chiarezza giustificata l'asserzione di Pappo che i luoghi sono porismi di specie particolare, e si è industriato a cercare una spiegazione del fatto che porisma e corollario venivano dai Greci indicati con lo stesso nome e la trovò nell'essere un porisma una conseguenza di un problema o di un teorema (2). L'utilità dei porismi si avverte nella ricerca dei luoghi quando si tratti di trasformare l'enunciato di un problema locale in altro equivalente ma da cui emerga con maggior agevolezza la natura ignota del luogo: al dire di Chasles l'opera di Euclide sarebbe stata appunto una collezione di proposizioni le quali nell'antica geometria surrogavano quelle trasformazioni algebriche mediante le quali noi passiamo dall'equazione di un luogo riferito ad un sistema di coordinate alla sua equazione rispetto a un altro. — Ammesso ciò, non è necessario uscire dal campo della matematica propriamente detta per rintracciare il movente alla concezione del porisma e alla costruzione del relativo trattato. Tuttavia è stato acutamente osservato (3) essere possibile di collegare la dot-

(1) Se non altro perchè fa vedere chiaramente la stretta parentela esistente fra la nozione di *porisma* e quello di *dato*.

(2) Questa spiegazione e l'analoga del Breton furono ritenute per non soddisfacenti dall'Heiberg (v. citate *Studien*, p. 58).

(3) Heiberg, op. cit., p. 62-63. Le idee di questo erudito furono in gran parte accolte ed ulteriormente sviluppate dal Tannery: v. *Bulletin des Sc. math. et astr.*, II Série, T. VI, 1882, I Partie, p. 150-152; cfr. anche p. 140.

Digitized by Google

trina che stiamo studiando ad alcune discussioni di filosofia matematica di cui si è discorso nel Libro precedente (n. 75). È noto in fatto che gl'immediati discepoli di Platone si occuparono, forse per consiglio del maestro, delle somiglianze e delle differenze fra problema e teorema; Proclo ha serbato notizia di queste indagini (1), e dalle sue parole si apprende come Speusippo ed un certo Amfinomo asserissero esservi in realtà soltanto dei teoremi, perchè nelle cose eterne che sono l'oggetto della matematica non vi è alcuna γένεσις come esige ogni problema. Menecmo all' opposto, come sappiamo (L. I, n. 75), concepiva tutto come problema, pur convenendo esservi due classi di problemi, in una delle quali si deve costruire qualche cosa e nell'altra mettere in chiaro qualche proprietà. Quì i porismi non fanno ancora il loro ingresso; ma è probabile che essi siano stati poi fabbricati quali armi di difesa contro Speusippo, nell' intento di porre in disparte quei problemi in cui non c'è una vera *genesi,* ma in cui si deve dimostrare mediante una certa operazione l'esistenza di qualche cosa, ai quali quindi è applicabile l' osservazione di Speusippo dal momento che essi sono indiscutibilmente di natura teorematica. Ammesso ciò i porismi sarebbero stati creati poco prima di Euclide, il quale dopo averne inseriti alcuni negli *Elementi,* (III, 25; VI, 11-13; VII, 35-36; VIII, 4; X, 10; XIII, 18) — senza però designarli con un appellativo speciale — più tardi ne avrebbe fatta una raccolta a sussidio di ricerche più elevate.

Di una terza congettura, non meno ingegnosa delle precedenti per spiegare l' origine del concetto e del nome di porisma (2), è bene far quì cenno. L' autore di essa ha notato come un accurato esame della restituzione tentata da Chasles dimostri che questi assai spesso pensava a teoremi generali sulle coniche, ma (per attenersi alle notizie di Pappo) si limitò

---

(1) Proclo-Taylor I, p. 105.

(2) Essa fu emessa dallo Zeuthen nel cfr. Cap. VIII. della sua Op. cit.,

Digitized by Google

ad enunciarli per coniche particolari o in modo tale che non vi comparissero se non rette e circonferenze; orbene, accettando per vera l'ipotesi citata, le stesse idee avrebbero guidato il sommo alessandrino, i suoi *Porismi* sarebbero in parte prodotti secondarii della fabbricazione della teoria delle coniche ed in parte mezzi ausiliarii per lo studio di queste, ed Euclide col chiamare le proposizioni da lui esposte con lo stesso nome col quale indicava i corollarii avrebbe voluto far noto che esse erano corollarii rispetto alla teoria delle sezioni coniche.

Rileveremo ancora che Chasles opina, conformemente ad un'idea di Poncelet (1), essere i porismi di Euclide proposizioni appartenenti all'odierna teoria delle trasversali (ad es. fra essi avrebbe trovato posto il ben noto teorema di Menelao) anzi più generalmente quelle a cui conduce la teoria della projettività (2); onde essi, ben lungi dall'essere scomparse dalla scienza, formerebbero il midollo del gran corpo della geometria moderna (3). Ci sia concesso da ultimo ricordare quì che è nel corso delle sue indagini sulla dottrina dei porismi che Chasles fu condotto al concetto di rapporto anarmonico, a quel concetto cioè che gli servì più tardi di base per tutte le sue ricerche geometriche; onde, anche se qualche critico arcigno dovesse giudi-

---

(1) *Traité des propriétés projectives des figures* (T. I. II éd., Paris 1865, p. XXV).

(2) Si vegga a pag. 68-71 dell'opera *Les porismes d'Euclide* la traduzione in linguaggio moderno dei generi enumerati da Pappo.

(3) È poi da notarsi che molti teoremi della geometria moderna possono enunciarsi sotto forma porismatica. Taccio di quelle due proposizioni che Chasles fece conoscere nelle sue prime pubblicazioni concernenti i porismi (*Ap. hist.* II ed. p. 279) e che il Cremona pose più tardi (1862) a fondamento della sua *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (v. n. 36-37) chiamandoli appunto Porismi di Chasles. Ma anche l'esistenza del pentaedro di una superficie cubica si può affermare mediante un porisma dicendo: Data una qualunque superficie di terzo ordine, esistono cinque piani e cinque numeri tali che i cubi delle distanze di un punto qualunque della superficie, moltiplicati ordinatamente per quei numeri, dànno una somma nulla. Di altre proposizioni porismatiche esistenti nelle opere di Archimede e di Diofanto verrà detto altrove.

Digitized by Google

care quelle indagini dotate di scarsa originalità perchè non aggiunsero alcun concetto importante e veramente originale alle idee schizzate da Simson e non fecero che porne in luce tutta la portata, tuttavia esse conserverebbero sempre un posto non ispregevole nella storia della moderna geometria; tanto più che esse ebbero per ultimo risultato una completa ricostruzione dello scritto perduto (1), la quale, anche se non può da tutti riguardarsi per un surrogato di questo, è senza dubbio un lavoro scientifico degno di colui al quale fu attribuito l'onorevole epiteto di Archimede del nostro secolo.

29. Oltre ai *Porismi* un'altra opera di Euclide scomparve dalla letteratura matematica lasciando vestigie debolissime e incerte. È quella che s'intitolava *Luoghi superficiali* (*Τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν*); si divideva in due libri (2) e, secondo lo Zeuthen (3), sarebbe stata una di quelle che abilitarono Archimede a usare (come vedremo a suo tempo) con tanta disinvoltura dei procedimenti che equivalgono alla nostra geometria analitica a tre coordinate. Per facilitarne l'intelligenza, Pappo nel VII Libro della sua *Collezione* fece conoscere quattro lemmi (4), tre dei quali, riferendosi a proprietà delle coniche considerate come luoghi dei punti di un piano soddisfacenti a certe condizioni metriche, possono prestare un sussidio molto scarso alla divinazione dell'opera perduta, mentre il senso da attribuirsi al quarto è così ambiguo che gli ellenisti non si sono ancora messi d'accordo nel determinarlo (5). Per iscoprire il tema di questa quarta opera di Euclide fa mestieri

---

(1) Per maggiori particolari intorno a questa ricostruzione, si ricorra al n. 5 dell'Appendice al presente Libro.

(2) Pappo ed Hultsch, p. 636.

(3) Op. cit., p. 423.

(4) Ib., p. 1004-1014.

(5) La più recente interpretazione è dovuta a P. Tannery: v. *Bulletin des Sciences math.* 2.e Série, T. VI, 1882, I Partie, p. 149-50; cfr. Zeuthen, op. cit., p. 423-30.

Digitized by Google

adunque industriarsi a congegnare delle ipotesi ispirandosi allo studio di lavori antichi superstiti. Il primo (1) che vi si provò fu Chasles (2), il quale formulò l'ipotesi che Euclide avesse ivi studiate le quàdriche rotonde e le loro sezioni piane; a sostegno di questa ipotesi egli fece notare che nella chiusa della prop. 11ª del celebre libro *Su i conoidi e gli sferoidi* Archimede enunciò delle proprietà di queste superficie soggiungendo *τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες* (3), e questa frase egli interpretò come significante *la dimostrazione di ciò è nota,* cioè come un richiamo ad un'opera anteriore sullo stesso soggetto e che sarebbe stata appunto quella di Euclide. Ma fu obbiettato (4) che quella frase, significando invece *la dimostrazione di ciò è evidente,* non induce in alcun modo a contestare ad Archimede i suoi diritti di priorità nello studio delle superficie di secondo grado rotonde. E, ricordando le ampie cognizioni stereometriche che si avevano prima di Euclide — delle quali fa splendida testimonianza la soluzione suggerita da Archita (L. I, n.ⁱ 51-52) per il problema di Delo —, si preferì ritenere che lo studio delle superficie considerate come luoghi di punti fosse il principale argomento dell'opera di Euclide (5), nella quale però avrebbero trovato posto anche il cono, il cilindro, la sfera e forse, secondo noi, il toro di Archita e le quàdriche come luoghi che nascono estendendo allo spazio i tre lemmi di Pappo dianzi

---

(1) Mi esprimo così perchè le opinioni del Montucla su questo argomento erano così vacillanti che, mentre a pag. 172 della sua *Histoire* citata disse che per luoghi superficiali Euclide intendeva delle superficie, a pag. 215 asserì invece che con quel nome Euclide intendeva designare delle linee a doppia curvatura. Il Reimer (nelle note alla sua versione tedesca dell'*Essai sur l'hist. gén. des math.* del Bossut; Vol. I, Hamburg 1804, p. 130) esprime l'opinione che i detti luoghi fossero curve tracciate su una superficie.

(2) Nella II Nota all'*Aperçu historique.*

(3) *Archimedis Opera omnia* ed. Heiberg, Vol. I (Lipsiae, 1880) p. 342.

(4) Heiberg, citate *Studien,* p. 79 e seg.

(5) Cfr. V. Flauti, *Soluzioni geometriche di alcuni principali problemi sulla piramide triangolare* (Atti della R. Acc. di Napoli, T. I, 1819, p. 22), e *Geometria di sito sul piano e nello spazio* (II ed. Napoli, 1821), Cap. XIV.

Digitized by Google

citati. Ma tutte queste sono mere congetture a cui non si può accordare un posto stabile nei fasti della scienza, il quale si deve riserbare alla desiderata restituzione dello scritto di Euclide, a cui si arriverà più probabilmente con lo studio di ulteriori documenti che coll'ajuto esclusivo delle parole di Pappo.

In condizioni non molto migliori ci troviamo di fronte ad un'altra opera di Euclide che, come la precedente, era scomparsa fino dal secolo (VI dell'E. v.) nel quale visse Eutocio e che è dubbio esistesse ancora al tempo di Pappo (1): è quella che in quattro libri trattava delle *Sezioni coniche* (*κωνικά*), e, stando a quanto dice il commentatore ora citato (2), era un rimaneggiamento di quella di Aristeo (L. I, n. 79) e servì di base al trattato di Apollonio che esamineremo fra non molto (n. 55-63); si può dunque designarla come l'anello di congiunzione fra l'una e l'altra, epperò è soltanto storico l'interesse che presenterebbe il conoscerla. Per formarsi un concetto approssimativo del suo contenuto non v'ha miglior sistema che esaminare accuratamente le opere di Archimede e segnalare le proprietà delle sezioni coniche ivi presupposte o attinte da scrittori più antichi, chè tali proprietà di regola dovevano essere contenute nel lavoro euclideo (3). Da tale studio si trae il convincimento che Euclide assumesse per proprietà fondamentale delle curve da lui studiate quella espressa dalla nota equazione $y^2 = 2px + qx^2$, conoscesse alcune proprietà degli asintoti ed avesse istituite delle ricerche intorno alla similitudine delle coniche o dei loro segmenti; ma le tre curve erano da lui per fermo considerate a parte ed è improbabile che egli ne dimostrasse il legame con gli antichi problemi delle applicazioni di aree (4).

---

(1) Heiberg, citate *Studien*, p. 89. È anche (cfr. ivi, p. 8) incerto se i tre lavori di Euclide di cui parliamo nel presente numero sian stati conosciuti dagli arabi.

(2) Pappo ed Hultsch, p. 672. Le notizie ivi contenute sono d'altronde confermate dalla prefazione generale alle *Coniche* di Apollonio (v. più innanzi n. 55).

(3) Heiberg, *Zeit. f. Math. u. Phys.*, T. XXV, *Hist.-lit. Abth.*, p. 241 e seg.; e citate *Studien*, p. 86 e seg.

(4) Cfr. Cantor *Vorlesungen*, T. I, p. 251.

Digitized by Google

Tali sono le opere di matematica pura che indubbiamente appartengono ad Euclide; lo scritto Ψευδάρια (*Sofismi*) che abbiam visto (n. 4) descritto da Proclo si connette ad essi essendo un lavoro didattico utile per addestrarsi a distinguere i ragionamenti esatti dai paralogismi, ma non si è sottratto all'ingiuria del tempo (1). Altre sue scritture superstiti appartengono alle applicazioni delle matematiche alle scienze naturali, onde verranno studiate da noi nel Libro veniente; esse però non sono capaci di modificare il giudizio che sin d'ora si può pronunciare su Euclide: egli aveva una mente eminentemente organizzatrice, intenta più ad assodare che ad ampliare l'edificio geometrico, sollecita piuttosto nel preparare dei futuri cultori della geometria che nel contribuire direttamente all'avanzamento di questa scienza.

II.

I pretesi continuatori degli *Elementi di Euclide*.

30. Ai tredici libri dianzi discorsi degli *Elementi di Euclide* la generalità degli editori ne aggiunse due altri aventi per tema lo studio dei poliedri regolari; che dessi non siano opera d'Euclide emerge dal fatto che nessun manoscritto degno di fede li attribuisce senza riserve al grande maestro d'Alessandria (2) ed è confermato dalla dichiarazione di Marino da Neapoli il quale dice che gli *Elementi* si componevano di tredici libri soltanto (3). Essi vennero spesso attribuiti ad Ipsicle d'Ales-

---

(1) È pertanto da ritenersi come un prodotto della fantasia del De Morgan (cfr. Gow, l. c., p. 85) l'opinione che nei Ψευδάρια fossero studiate certe classi di quantità irrazionali.

(2) Cfr. le intitolazioni di mss. riportati da G. Kluge in principio della sua dissertazione *De Euclidis Elementorum Libris qui feruntur XIV et XV* (Lipsiae, 1891).

(3) *Euclidis Data*, ed. Hardy (Parigi, 1625) p. 14.

Digitized by Google

sandria (1) e considerati per un proseguimento dell'ultimo libro del celebre trattato euclideo: ma già da tempo si è avvertito che in realtà fra questo e quei due libri non esiste altro intrinseco legame all'infuori dell'analogia di argomento e che anche tali due libri devono considerarsi separatamente (2) se si segue la tradizione dei manoscritti della quale la generalità degli antichi editori non tenne il debito conto.

Che il cosidetto *XIV Libro degli Elementi di Euclide* sia, come affermano i codici più degni di fede, opera di quell'Ipsicle il quale, prima di Ipparco, scrisse un'opera astronomica (*'Αναφορικός*) di cui ci occuperemo nel libro seguente; il quale, per attestazione di Diofanto, si occupò di numeri poligonali (v. L. V); il quale, se si presta fede ad Achille Tazio (150 circa dell'E. v.), scrisse sull'armonia delle sfere: non vi è ragione di contestarlo. Infatti ciò farebbe vivere l'autore di quel libro intorno al 150 a. C., il che si accorda col fatto che il libro stesso sarebbe stato scritto in Alessandria poco dopo la morte di Apollonio Pergeo, e questo risulta e dalla prefazione, che ora riferiremo, con cui esso si apre e dallo stesso stile geometrico adoperato il quale si attaglia allo stato della scienza nel II secolo a. C. (3).

---

(1) Di questo scienziato trattano Suter-Fihrist (p. 18) ed altri scritti citati dal Kluge l. c., p. 1, nota.

(2) Ciò fu osservato per la prima volta dal Peyrard (v. *Oeuvres d'Euclide*, T. III, Préf. p. II) e poi da G. Friedlein (*De Hypsicle mathematico* in *Bull. di Bibl.* ecc., T. VI, 1873, p. 493-529).

(3) Questa opinione intorno all'epoca in cui fiorì Ipsicle è quella generalmente adottata; ciò emerge dalle dichiarazioni di Chasles (*Ap. hist.*, 2e éd., p. 10), di Bretschneider (*Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, 1870, p. 182), di Friedlein (mem. cit., p. 496), di T. H. Martin (*Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV Livre des Èléments d'Euclide* in *Bull. di Bibl.*, ecc., T. VII, 1874) e di M. Cantor (*Vorlesungen* I, 309). Ci dispensiamo dal discutere le opinioni discordanti di scrittori più antichi, quali Montucla (che fa Ipsicle contemporaneo di Claudio Tolomeo; *Histoire des Math.*, T. I, p. 315) e Nesselmann (che lo pone nel II Sec. dell'E. v.; *Die Algebra des Gricchen*, p. 246-7), perchè crediamo che queste idee non trovino oggi alcun sostenitore.

Digitized by Google

Mio caro Protarco, quando Basilide da Tiro venne in Alessandria fu raccomandato a mio padre, perchè sì l'uno che l'altro erano versati nelle scienze matematiche, ed ebbe con lui molte conversazioni per tutto il tempo del suo soggiorno fra noi. Avendo discorso una volta insieme del libro di Apollonio concernente il confronto fra il dodecaedro e l'icosaedro inscritti nella stessa sfera ed il loro rapporto, essi si trovarono d'accordo nel ritenere che trattando tale questione Apollonio fosse caduto in errore e, come seppi da mio padre, lo corressero. Più tardi però mi venne fra mano un altro libro pubblicato da Apollonio medesimo, nel quale si trovava una soluzione esatta della questione anzidetta, e lo studio di esso mi procurò grande piacere. Ora tutti possono esaminare l'opera di Apollonio la quale passa per lavoro accurato. Ma quanto vi aggiunsi io credo doverlo dedicare a te, a cagione della tua perfetta conoscenza di tutte le scienze e specialmente della geometria, come a giudice esperto di quanto scrissi: nella fiducia che tu, vuoi a cagione dell'amicizia per mio padre, vuoi a cagione dell'affetto per me, accoglierai benevolmente questa mia dissertazione. Ma è ormai tempo che io chiuda questo proemio ed entri in materia (1).

Ed in realtà Ipsicle determina subito gli apotemi del pentagono regolare e del triangolo equilatero inscritti in un cerchio, dimostrando che il primo è la semisomma del raggio e del lato del decagono regolare inscritto, mentre il secondo non è che la metà del raggio; dimostra poi che la somma dei quadrati dal lato e della diagonale del pentagono regolare inscritto in un cerchio eguaglia il quintuplo del quadrato del raggio e ne deduce che lo stesso circolo è circoscritto alle facce del dodecaedro e dall'icosaedro regolari inscritti nella medesima sfera (2); con due differenti ragionamenti fa poi vedere che il lato del cubo inscritto in una sfera sta al lato dell'icosaedro come la superficie o il volume del dodecaedro sta alla superficie o al volume dell'icosaedro. Tutto ciò Ipsicle dimostra in modo rigoroso ed elegante, ed in una forma non certo meno pregevole dell'euclidea, ma che è meno compassata e più snella per l'assenza di intitolazioni ad ogni proposizione e la presenza di osservazioni per cementare le varie verità. Dei teoremi ivi dimostrati (se si pre-

---

(1) *Euclidis Opera omnia* ed. Heiberg, T. V (Lipsiae 1888, p. 2-4).

(2) Questo teorema apparterebbe ad Aristeo secondo l'Allman (*Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889, p. 198 e seg.).

Digitized by Google

scinde da quelli che, appartenendo alla planimetria, fungono da lemmi e d'altronde sono i più ovvii) è facile persuadersi ricordando le espressioni (in funzione del diametro D della sfera circoscritta) dei lati dei poliedri regolari da noi esposte nel n. 21; infatti, dicendo in genere V_k il volume e S_k la superficie del poliedro regolare di k faccie ed R_k il raggio del cerchio circoscritto ad una sua faccia, si trova:

$$V_4 = \frac{D^3}{9\sqrt{3}}, \; V_6 = \frac{D^3}{3\sqrt{3}}, \; V_8 = \frac{D^3}{3}, \; V_{12} = \frac{D^3}{6}\sqrt{\frac{5(3+\sqrt{5})}{6}}, \; V_{20} = \frac{D^3}{12}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

$$S_4 = \frac{2D^2}{\sqrt{3}}, \; S_6 = 2D^2, \; S_8 = \sqrt{3}\,D^2, \; S_{12} = \frac{D^2}{2}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}, \; S_{20} = \sqrt{3}\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\,D^2$$

$$R_4 = \frac{D\sqrt{2}}{3}, \; R_6 = \frac{D}{\sqrt{6}}, \; R_8 = \frac{D}{\sqrt{6}}, \; R_{12} = \frac{D}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \; R_{20} = \frac{D}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Emerge da queste espressioni essere $R_{12} = R_{20}$, come trovò Ipsicle, e $R_6 = R_8$; poi

$$\frac{l_6}{l_{20}} = \frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{V_{12}}{V_{20}},$$

come trovò Ipsicle, ed inoltre

$$\frac{V_6}{V_8} = \frac{S_4}{S_6}, \; \frac{S_6}{S_8} = \frac{l_4}{l_8};$$

finalmente, dette x, y le due parti di una retta di lunghezza 1 divisa in media ed estrema ragione, si vede che, come pure dimostrò Ipsicle:

$$\frac{l_6}{l_{20}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}.$$

31. Il cosidetto *XV Libro degli Elementi* consta di tre parti, in ciascuna delle quali sono trattate questioni fra loro affini concernenti la teoria dei poliedri regolari.

La *prima parte* tratta dell'inscrizione di tali poliedri in altri; ma quì la parola *inscrizione* è usata in un senso più ristretto dell'ordinario, che varia da proposizione a proposizione e si determina soltanto percorrendo la soluzione di ciascun problema.

Digitized by Google

Perciò si sarebbe tentati di congetturare che l'autore, esaminando la struttura dei cinque poliedri regolari, si sia persuaso della verità delle proposizioni seguenti: " In un cubo gli estremi di tre spigoli uscenti da uno stesso vertice ed il vertice opposto a questo sono vertici di un tetraedro regolare; i punti di mezzo degli spigoli di un ottaedro sono vertici di un cubo; mentre i centri delle facce di un cubo, di un ottaedro regolare o di un icosaedro regolare sono vertici rispettivamente di un ottaedro regolare, di un cubo o di un dodecaedro regolare „; che egli, considerando come pertanto in ogni caso da un poliedro regolare un altro ne derivasse in esso *contenuto*, siasi creduto in diritto di trasformare quelle proposizioni in altrettanti problemi su poliedri *inscritti*, in altri problemi le soluzioni dei quali erano implicitamente contenute nelle citate proposizioni e che si possono considerare come condensati nel seguente enunciato: " Inscrivere un tetraedro regolare, un cubo, un ottaedro regolare, un cubo e un dodecaedro regolare rispettivamente in un cubo, in un ottaedro regolare, in un cubo, in un ottaedro ed in un icosaedro „. Alle soluzioni esposte si giunge facendo tacitamente l'ipotesi che la parola inscrizione venga usata in ogni singolo caso in un senso speciale: epperò pare a noi che imperitamente l'autore abbia scelta la forma problematica per le proposizioni che aveva in vista, forma alla quale, non meno che alla imprecisione, anzi scorrettezza del dettato (1), si deve il giudizio poco favorevole che, come vedremo fra breve, molti pronunciarono sull'opera in esame.

Nella *seconda parte,* che è la più breve di tutte, vien risolto il problema: " determinare quanti spigoli e quante facce possieda ciascuno dei poliedri regolari „. La soluzione è esposta per l'icosaedro ed il dodecaedro, ma si avverte come similmente si farebbe per gli altri tre poliedri; ed infatti essa è affatto generale

(1) A conferma di ciò osserveremo che la parola πυραμίς è adoperata a significare tetraedro regolare.

Digitized by Google

perchè consiste nell'osservare che il numero cercato degli spigoli è il semiprodotto del numero delle facce del poliedro pel numero dei lati di ciascuna faccia, mentre il numero dei vertici è il quoziente della divisione pel numero delle faccie di ogni angolo solido del prodotto del numero delle facce del poliedro e del numero dei vertici di ogni faccia. Si conclude quindi che i poliedri regolari convessi di 4, 6, 8, 12, 20 facce hanno rispettivamente 6, 12, 12, 30, 30 spigoli e 4, 8, 6, 20, 12 vertici.

La *terza parte* è la più importante di tutte, ed ha per iscopo la " determinazione delle ampiezze degli angoli diedri dei cinque poliedri regolari „; ivi è in sostanza insegnato un procedimento semplice per segnare gli angoli rettilinei di questi diedri, dal quale è poi facile dedurre una linea trigonometrica di ciascuno. Per la soluzione lo scrittore si confessa debitore al proprio maestro Isidoro del quale — per dichiarazione sua — egli dimostra le costruzioni (1). E queste sono così semplici che meritano venir quì brevemente descritte (naturalmente prescinderemo dal cubo di cui tutti i diedri sono retti).

Tetraedro: Si segni il punto di mezzo d'uno spigolo e si congiunga con gli estremi dello spigolo opposto; l'angolo formato dalle due rette congiungenti è il rettilineo di uno dei diedri del tetraedro dato. *Ottaedro:* Si segni il punto di mezzo di uno spigolo e si congiunga ai due vertici dell'ottaedro che non sono opposti nè all'uno nè all'altro degli estremi di quello spigolo; l'angolo che così nasce misura un diedro dell'ottaedro. *Icosaedro:* Sia A un vertice dell'icosaedro e $AA_1, \ldots, AA_5$ gli spigoli uscenti da esso; le congiungenti il punto medio M di uno di questi spigoli, per es. di AA_2, con i punti A_1 e A_3 determinano il rettilineo cercato. *Dodecaedro:* Si considerino due facce aventi un lato comune $ABC'D'E'$ e $ABC''D''E''$; le diagonali $C'E'$ e $C''E''$ sono parallele allo spigolo AB; congiun-

(1) ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. *Euclidis Opera omnia*, T. V, p. 50.

Digitized by Google

gendo il punto medio di questo ai punti medii di quelle diagonali si ottengono due rette il cui angolo misura il diedro cercato.

Da questo breve riassunto il lettore trarrà elementi sufficienti per giustificarci se noi non ci uniamo a coloro i quali trovano il Libro XV tanto inferiore al XIV che ritengono sarebbe recare oltraggio ad Ipsicle l'attribuirglielo (1); certamente la forma imperfetta e talvolta errata e i ragionamenti incompleti epperò non sempre conclusivi collocano il XV libro al disotto del precedente; tuttavia i problemi ivi trattati sono di quelli (specialmente per quanto concerne le ultime due parti) che devono necessariamente presentarsi ed imporsi a chiunque voglia erigere una completa teoria dei poliedri regolari, onde nulla vieta si ammetta che Ipsicle non abbia sdegnato di occuparsene. Ed è soltanto il paragone dello stile del XV Libro con quello del XIV che somministra argomenti d'inoppugnabile saldezza per negare ad Ipsicle stesso la proprietà di esso libro (2). Anzi un' analisi microscopica del testo di questo induce ad ammettere che le tre parti del Libro in discorso siano state scritte in epoche differenti, epperò sottopone la questione di determinarne gli autori, almeno per quanto concerne le parti estreme, chè la media per la sua brevità mal si addatta a tale studio. Ora, per quanto concerne la terza parte, il Peyrard la ritiene assai più recente del Libro XIV, il Friedlein la fa nascere nel secolo IV o nel V dell'E. v. e

---

(1) « Je ne veux pas dire que le premier livre (sur les corps reguliers) ne soit un monument précieux de la Géométrie ancienne. Quant au second, il en est tout autrement; les démonstrations de ce livre sont incomplètes, sans rigueur et sans élégance; ce qui me porte à croire que non seulement ces deux livres ne sont pas du même auteur, mais encore que l'un est beaucoup plus ancien que l'autre ». Peyrard, *Oeuvres d'Euclide*, T. III, préface, p. IV.

« Dagegen ist das XV Buch eine dürftige Zusammenstellung von ziemlich ungleichartigen Dingen, selbst nicht ohne positive Fehler ». Heiberg, *Studien* cit., pag. 155.

(2) Per quanto segue v. Kluge loc. cit. *passim*, memoria che ci piace segnalare siccome prova del valido ajuto che possono prestare i metodi filologici moderni alle indagini storiche sulle antiche età.

Digitized by Google

T. H. Martin l'attribuisce a Damascio di Damasco discepolo di quell'Isidoro d'Alessandria che fiorì verso il 510 dell'E. v. (1); ma siccome questo personaggio non è noto come matematico, così il Tannery (2) e l'Heiberg (3) preferirono ritenere che l'Isidoro nominato più sopra fosse Isidoro da Mileto che, oltre ad essere stato l'architetto della chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli, fu editore di un'opera di Archimede e commentatore di Erone. Ammesso ciò, la terza parte del XV Libro degli *Elementi* sarebbe dovuta ad un condiscepolo di Eutocio, onde apparterrebbe al VI secolo dell'E. v. Quanto poi alla prima parte, siccome in essa non vi è traccia di alcun nome, così per determinare l'epoca in cui venne scritta fa d'uopo ricorrere esclusivamente a considerazioni intrinseche basate sullo stile geometrico in cui è redatta; e queste inducono a ritenere che essa sia stata composta dopo il XIV Libro e prima della terza parte del XV: e precisamente — paragonandola con le opere di Euclide, Archimede, Erone, Claudio Tolomeo, Teone Smirneo, Pappo, Teone Alessandrino, Proclo ed Eutocio, le quali tutte appartengono al periodo così definito — si è indotti ad ammettere come probabile che l'autore cercato fosse contemporaneo e forse discepolo di Pappo.

Così adunque resta dimostrata leggendaria l'esistenza di geometri che vollero atteggiarsi a continuatori degli *Elementi di Euclide*. Esiste bensì una pregevole collezione di memorie che completano la teoria dei poliedri regolari di cui Euclide nell'ultimo libro degli *Elementi* tracciò le prime linee. Ma essa deve la vita in parte ad un lavoro di Apollonio Pergeo (v. più avanti n. 68), che certo non volle calcare le orme d'un collega a lui di tanto inferiore, in parte a geometri ignoti che non cessarono di coltivare un campo di ricerche che era all'ordine del

---

(1) Veggansi i lavori di Peyrard, Friedlein e Martin dianzi citati.

(2) V. l'articolo *À quelle époque vivait Diophante?* (Bull. des. Sc. math. ed astr., 2.e Série, T. III, 1879, I Partie, p. 263).

(3) *Revue critique d'histoire et de littérature*, 1881, p. 381; *Studien* citate, pag. 156.

Digitized by Google

giorno fin dai tempi di Pitagora (L. I, n. 23) e a cui le idee cosmologiche svolte da Platone (L. I, n. 61) conservarono per lungo tempo un carattere di attualità.

III.

Archimede.

32. Chi istituisce un esame comparativo dei modi in cui gli scienziati che ci tramandarono notizia delle loro opere contribuirono all'incremento del sapere, non tarderà a riconoscere che tali modi sono di due sorta: vi ha chi si propose di risolvere questioni isolate, che egli ritenne degne di studio, inventando metodi applicabili sia ad un problema particolare sia ad un'intera classe di questioni; altri invece, dopo avere esaminati e confrontati i risultamenti ottenuti trattando un determinato tema, si propose di distribuirli armonicamente, di colmare le lacune che presentavano, in conseguenza di comporne un tutto organico. Se a quest'ultima categoria di scienziati deve senza dubbio ascriversi Euclide, per converso alla prima appartiene senza contestazione il grande scienziato alle cui produzioni matematiche è consacrato il capitolo attuale; se le opere di quello hanno tutte, benchè forse in misura diversa, un fine didattico, quelle dell'altro sono indirizzate esclusivamente alle persone già provette nelle matematiche; in ciò forse è da ricercarsi la ragione per cui gli scritti di Euclide sono conosciuti, almeno in parte (specie in Italia), da tutte le persone anche di mediocre coltura matematica, mentre ben pochi, anche di coloro che fanno delle scienze esatte la loro principale occupazione, sopportarono le fatiche che aspettano colui che voglia oggi prendere diretta conoscenza delle speculazioni di Archimede (1).

---

(1) Che a ragione il Peyrard, nella prefazione alla traduzione francese delle opere di Archimede, affermasse « Archimède n'est difficile que pour ceux auquels les méthodes des Anciens ne sont pas familières; il est clair et facile à suivre pour

Digitized by Google

La cennata diversità nell'indirizzo scientifico di quei due sommi matematici deve forse la sua origine, non soltanto all'indole differente delle loro intelligenze, ma anche alle circostanze diversissime in cui trascorsero le loro vite: ed invero, mentre l'esistenza del geometra del Museo sembra essere stata preponderantemente occupata, se non del tutto assorbita, dall'insegnamento, quella di Archimede venne spesa totalmente in investigazioni tendenti a far progredire la scienza sia pura sia applicata.

Se prestiamo fede a Tzetze, Archimede sarebbe morto settantacinquenne durante l'assedio che Siracusa, sua patria, sostenne mentre ferveva la seconda guerra punica, onde il 212 a. C. ed il 287 sarebbero le date estreme della sua vita; ciò si accorda con la notizia data da Proclo (v. il brano riportato nel n. 4) che Archimede nacque verso la fine del regno del primo dei Tolomei, dal momento che questo terminò nel 287 a. C. Modificando la comune lezione di un passo dell'*Arenario* (1) si arrivò a concludere che il di lui padre fosse l'astro-

---

ceux qui les ont étudiées », risulta dal giudizio che sulle opere di Archimede pronunciò Plutarco, il quale nella *Vita di Marcello* scrisse: « Imperciocchè non possono trovarsi in geometria più difficili e più gravi quistioni scritte ed esposte con elementi più semplici e più chiari di quello ch'abbia fatto Archimede: il che riferiscono alcuni alla buon'indole dell'ingegno suo, e alcuni altri pensano che riferir debbesi all'eccessiva fatica ch'ei vi metteva per far che ogni cosa paresse fatta appunto senza fatica ed agevolmente. Conciossiachè talun forse in qualche proposizione, per quanto cercasse, trovar non potrebbe la dimostrazion da sè stesso; ma come veduta ed intesa l'abbia esposta da lui, si dà tosto a credere che anch'egli potuto avrebbe trovarla: per così piana strada e spedita conduce egli alle sue dimostrazioni » (*Le vite degli uomini illustri di Plutarco; versione italiana di Girolamo Pompei*, T. II, Milano, 1824, p. 461).

(1) È notevole assai che questa modificazione sia stata proposta indipendentemente l'uno dall'altro da C. Blass (nell'articolo *Der Vater des Archimedes* inserito nel vol. CIV, p. 255-56 delle *Astronomische Nachrichten*) e dall'Heiberg (*Philologische Studien zu griechischen Mathematikern*, IV, Leipzig, 1883; v. pure *Philologus*, T. 43, pag. 482); cfr. anche Förster *Pheidias, der Vater des Archimedes* (Jahrb. f. Philologie, CXXXIII Bd., 1886, p. 678 e seg.) L'ipotesi riferita è giudicata verosimile anche da Susemihl (op. cit. I, Bd., p. 723-4). Aggiungiamo a semplice titolo di curiosità che gli Arabi fecero Archimede figlio di Pitagora; v. Klamroth in *Zeit. d. deutschen morg. Gesellschaft*, XLII, Bd. 1888, p. 2.

Digitized by Google

nomo Feidia noto, fra l'altro, per avere tentato di determinare il rapporto di grandezza fra il sole e la luna; ad ogni modo è certo che Archimede era legato da vincoli di parentela a Jerone re di Siracusa e da vincoli di amicizia al suo successore Gelone. Da giovane egli fu in Egitto ad ascoltare le lezioni, non di Euclide che era già morto in quell'epoca, ma de' suoi successori: ivi strinse amicizia con Conone da Samo (1) ed Eratostene da Cirene, ivi ritornò forse in età più matura (2). È incerto se, dopo l'Egitto, egli abbia visitata la Spagna (3), ma è incontestato che, ritornato in patria, egli (malgrado l'ufficio di ingegnere di corte che gli venne probabilmente affidato) potè consacrarsi attivamente alle indagini scientifiche. Quando però, durante la seconda delle grandi lotte di Roma contro Cartagine, Marcello pose l'assedio a Siracusa, Archimede mise il suo genio meccanico al servizio della propria patria, e si rivelò così straordinariamente fecondo nell'inventare armi di offesa che offrì l'esempio, unico nella storia della guerra, d'un uomo combattente per tre lunghi anni contro un intero esercito; ed il duce romano per espugnare la patria d'Archimede dovette ricorrere ad uno stratagemma. Nel susseguente saccheggio, Archimede stesso trovò la morte (4), benchè Marcello avesse dato

---

(1) Che Archimede ricorda con lode e rimpianto nelle quattro lettere con cui inviò a un tal Dositeo i suoi libri *Su la sfera ed il cilindro*, *Su le spirali* e *Su la quadratura della parabola*. Secondo un'opinione del Gow (della quale sono ignoti i fondamenti) questo Conone sarebbe il primo e Dositeo il secondo dei successori di Euclide nel Museo: v. *A short History of Greek mathematics* (Cambridge, 1884), pag. 221. I meriti di Conone sono rammentati da Arato, Catullo e Virgilio in alcuni versi che il Dilling ha riferiti a pag. 47-50 della sua precitata dissertazione *De Graecis mathematicis* (Berolini, 1831).

(2) Lo fa credere il fatto che si opina aver egli in Egitto inventata la *vite* che porta il suo nome, e la notizia data da uno scrittore arabo (ricordato dall'Heiberg a p. 6 delle citate *Studien*) che egli vi abbia ordinato il catasto.

(3) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. I (Paris, 1838), pag. 37.

(4) Le circostanze in cui essa avvenne sono dai varii storici narrate in modi differenti sui quali è inutile arrestarci.

Digitized by Google

ordine formale di rispettarlo; il generale romano gli fece erigere una tomba (1), su cui venne scolpita una sfera inscritta in un cilindro per soddisfare al desiderio di Archimede che il suo sepolcro recasse la figura la quale illustra quella delle sue scoperte (v. n. 38) a cui egli attribuiva il più gran valore (2).

Tali le notizie sicure sulla vita di Archimede (3); nè è prezzo dell'opera di cercare faticosamente altri particolari intorno ad essa, chè in un'esistenza tutta consacrata alle investigazioni astratte della scienza, gli unici avvenimenti memorabili stanno nei risultati ottenuti; la vita di uno scienziato si compendia ne' suoi lavori, e appunto alla disamina delle opere superstiti del grande cittadino di Siracusa noi ora ci volgiamo (4).

33. Una ricerca che conviene far precedere a questa disamina è la determinazione dell'ordine in cui è più opportuno considerare

---

(1) Sembra quindi inverosimile che, come pretende uno storico arabo (citato dal Libri l. c., T. I, p. 39), i Romani distruggessero quattordici carichi di manoscritti archimedei. Cfr. anche Suter-Fihrist, p. 17.

(2) Questa tomba fu poi ritrovata non senza fatica da Cicerone quando (nel 75 a. C.) era questore in Sicilia.

(3) La biografia scritta da un certo Eraclide (forse colui che il Siracusano nomina nella prefazione al suo libro *Su le Spirali*) e ricordata da Eutocio tanto nella prefazione al commento alla *Misura del Circolo* di Archimede quanto in quella del commento alle *Coniche* di Apollonio, non è giunta sino a noi. Ma molte informazioni intorno al nostro scienziato si traggono dagli storici che parlarono delle guerre fra Roma e Cartagine (Plutarco, Tito Livio, Diodoro Siculo, Silio Italico, Valerio Massimo, ecc.). Esse vennero raccolte dal Mazzuchelli (*Notizie istoriche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni ed agli scritti di Archimede Siracusano;* Brescia, 1737) e più recentemente dall'Heiberg (*Quaestiones Archimedeae*, Hauniae, 1879, Cap. I).

(4) Le migliori edizioni delle opere complete di Archimede sono quella del Torelli (Oxford, 1752) e quella — di cui ci serviamo noi — dell'Heiberg (Lipsiae, 1880-1881); una buona traduzione tedesca fu fatta dal Nizze (Stralsund 1824) ed una letterale del pari pregevole dal Peyrard (2.ª ed. Paris, 1808). Altre edizioni e traduzioni più antiche registrarono il Mazzuchelli (l. c., p. 93-116) e l'Heiberg (*Quaest. Arch.*, p. 22-24).

Digitized by Google

gli scritti di Archimede tuttora esistenti (1). Ora i codici (2) più degni di fede che vennero finora studiati li presentano in questo ordine: *Della sfera e del cilindro* (in due libri); *Dei conoidi e degli sferoidi; Delle spirali; Dell'equilibrio dei piani e loro centri di gravità* (in due libri); *Arenario; Quadratura della parabola.* Quest'ordine sarebbe naturale di preferire e noi lo adotteremmo se non sapessimo che in alcuni dei lavori testè enumerati sono invocate delle proposizioni le quali trovano la loro giustificazione soltanto in lavori posteriori; i gravi inconvenienti così derivanti si eviterebbero in parte distribuendo le opere di cui si tratta in varii gruppi a norma degli argomenti trattati; ma si evitano tutti studiandole nell'ordine seguente a cui, appunto perciò, noi accordiamo la preferenza: *Equilibrio dei piani,* I; *Quadratura della parabola; Equilibrio dei piani,* II; *Sfera e cilindro,* I e II (3); *Spirali; Conoidi e sferoidi; Misura del cerchio.* E quanto all'*Arenario* ci riserbiamo a parlarne quando nel Libro V ci occuperemo dell'aritmetica dei Greci.

Oltre a questi lavori — che possediamo sotto una forma che può in complesso ritenersi non dissimile da quella in cui vennero redatti da Archimede (4) — altri ci pervennero tradotti

---

(1) Di tale ricerca si occuparono prima il Torelli (v. ed. cit.) poi l'Heiberg (*Quaest. Arch.*, p. 10-12).

(2) Per tutte le notizie relative ai mss. delle opere di Archimede rimandiamo il lettore ai *Prolegomena* al Vol. III dell'ed. di Heiberg; inoltre a due posteriori memorie dello stesso autore, in una delle quali (*Mindre Afhandlinger udg. af det philologiskhist. Samfund*, Kjöbenhavn, 1887, p. 1-8) vengono apportate delle correzioni al testo della pref. al I libro *Su la sfera ed il cilindro*, mentre nell'altr (*Abh. zur Gesch. der Mathematik*, V Heft., 1890, p. 1-84) sono studiate delle importanti versioni latine di alcune opere d'Archimede.

(3) Che questo libro segua anche in ordine cronologico la *Quadratura della parabola* risulta dalla relativa lettera-prefazione; la quale mostra anche che questa precede la *Misura del circolo.* Invece dalla pref. alle *Spirali* risulta che questo libro segue tanto quelli *Su la sfera ed il cilindro* quanto quelli *Su i conoidi e gli sferoidi.*

(4) Stando all'Heiberg (*Quaest. Arch.*, p. 69-77; e *Philologischen Studien zu griechischen Mathematikern*, II, Leipzig, 1880) farebbero eccezione i libri *Su le*

Digitized by Google

o riassunti: di essi, come di quelle scoperte di cui altri scrittori serbarono memoria, daremo qualche notizia nel momento che giudicheremo più opportuno.

34. Fedeli all'ordine di successione adottato per lo studio delle opere archimedee, esamineremo anzitutto i due libri *Sull'equilibrio dei piani* (*Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*) fra i quali è inserito quello *Sulla quadratura della parabola* (*Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*) (1). Questi tre libri formano un tutto che si può considerare come la base della trattazione geometrica della statica (2), sono un vero capitolo di geometria a quattro dimensioni in cui ogni punto è determinato dalle proprie coordinate e da un coefficiente che ne è il peso (3). Questo allargamento del campo d'indagine geometrica che Archimede ha per tal modo eseguito, esige l'aggiunzione di nuovi postulati a quelli adoperati da Euclide, ed infatti il Siracusano espone al principio del I dei libri in esame sette proposizioni pre-

---

spirali e *Su la sfera ed il cilindro*, i quali non si sarebbero sottratti a modificazioni dei posteri: cfr. l'ed. critica di cui ci serviamo. Le opere di Archimede, essendo scritte in dialetto dorico, sono interessanti anche pei cultori della filologia classica: come dimostra il Cap. V delle citate *Quaest. Arch.* nonchè le puntate IV e V delle *Phil. Studien* dell'Heiberg.

(1) Non è questo certamente il titolo datovi da Archimede giacchè nel testo la parabola viene costantemente indicata con la perifrasi *sezione del cono rettangolo*; il titolo era piuttosto (come dice Eutocio; *Arch. Op. omn.* III, 342) περὶ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς.

(2) Che Archimede sia stato il primo a istituire ricerche esatte sui fenomeni fisici è incerto, anzi poco probabile; in particolare le condizioni di equilibrio della leva dovrebbero farsi risalire almeno ad Euclide, ammesso che con ragione venga a questo attribuita un'operetta *Sulla leva* che il Woepcke ha fatto conoscere nella *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide* (*Journal Asiatique*, T. 18.° della IV Serie, 1851, p. 217 e seg.).

(3) A ragione dunque il Dühring osserva: « Ueberhaupt kann man von den erhaltenen Arbeiten des Archimedes sagen, dass ihr Hauptgegenstand die reine Mathematik sei, und dass die Combination der aufgefundenen geometrischen Sätze mit mechanischen Begriffen und Problemen häufig nur dazu dient, den geometrischen Neigungen einen Gegenstand zu verschaffen » (*Kritische Gesch. d. allg. Principien der Mechanik*, III Aufl. Berlin, 1887, p. 6).

Digitized by Google

liminari, a cui veramente egli non dà (come noi faremmo) il nome di *postulati,* ma la cui natura logica non può essere revocata in dubbio e venne riconosciuta anche dagli antichi (1). Le prime tre fra le citate proposizioni preliminari e alcuni teoremi che se ne deducono si riferiscono alle condizioni di equilibrio d'un'asta rigida AB girevole attorno ad un suo punto fisso (fulcro) C e ai cui estremi sono attaccati due pesi; se si chiamano a, b le distanze di A e B da C e α, β questi pesi, e se si conviene di scrivere $A(a, \alpha) \gtreqless B(b, \beta)$ secondochè l'asta pende dalla parte di A, è orizzontale o pende dalla parte di B, allora i tre primi postulati di Archimede dicono: 1. Se $\alpha = \beta$ e $a \geq b$ sarà rispettivamente $A(a, \alpha) \geq B(b, \beta)$; 2. Se $A(a, \alpha) = B(b, \beta)$ sarà $A(a, \alpha + \delta) > B(b, \beta)$. 3. Nelle stesse ipotesi $A(a, \alpha - \delta) < B(b, \beta)$ (2). Da essi segue: Se $a = b$ e $A(a, \alpha) = B(b, \beta)$ sarà $\alpha = \beta$; se $a = b$ e $\alpha > \beta$ sarà $A(a, \alpha) > B(b, \beta)$; se $\alpha > \beta$ e $A(a, \alpha) = B(b, \beta)$ sarà $a < b$. E quindi si arriva al *teorema fondamentale:* " se $A(a, \alpha) = B(b, \beta)$ si ha $\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}$ tanto se α e β sono fra loro commensurabili (prop. 6ª) quanto se sono incommensurabili (prop. 7ª) ". Le altre proposizioni preliminari si riferiscono ai centri di gravità di figure piane, punti che il nostro matematico non definisce (3), forse perchè già se ne era occupato nell'opera — oggi perduta, ma citata da Pappo (4) — Περὶ γνγῶν. Dopo avere rilevate due proprietà semplici dei detti punti (proposizioni 4ª e 5ª), egli insegna

---

(1) Come risulta dalle citazioni di Gemino fatte da Proclo (Proclo-Taylor, II, p. 3-4) e da Eutocio (*Arch. Op. omnia*, III, p. 308).

(2) Per quanto concerne il valore *fisico* di questi postulati rimandiamo il lettore alle osservazioni fatte dal Mach a p. 8 e seg. dell'opera *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* (II Aufl. Leipzig, 1889).

(3) Al silenzio di Archimede tentò sopperire Eutocio (*Archimedis Opera omnia*, T. III, p. 306); però dalle parole di queste non risulta che per ogni figura piana esista sempre uno e un solo centro di gravità.

(4) Pappo ed. Hultsch, p. 1068.

Digitized by Google

(prop. 8ª) a determinare il centro di gravità della figura piana che nasce togliendo da una data una sua parte quando sian noti i centri di gravità del tutto e di ciò che si toglie; dai teoremi 9° e 10° si apprende l'ubicazione del centro di gravità di un parallelogrammo e dai quattro seguenti quelle del centro di gravità di un triangolo (1); e siccome qualunque trapezio si può riguardare come differenza di due triangoli, così la prop. 8ª è applicabile alla ricerca del centro di gravità di esso; in tal modo si trova che questo sta sulla congiungente i punti medii delle basi del trapezio e la divide nel rapporto $2b_2 + b_1 : 2b_1 + b_2$, dette b_1 e b_2 le lunghezze delle basi stesse.

35. Di queste proposizioni relative ai centri di gravità del triangolo e del trapezio Archimede fa importanti applicazioni nel secondo dei libri componenti il gruppo che stiamo esaminando. Questo libro si apre con tre proprietà elementari della parabola che Archimede dice essere dimostrate nei trattati sulle coniche (in quelli di Aristeo ed Euclide forse?), e ne trae due nuove conseguenze che gli serviranno poi. Premesso ciò, egli suppone di avere una bilancia AB a braccia eguali col fulcro in C e di appendere al braccio CB un triangolo con un lato verticale o un trapezio a basi verticali per modo che la verticale passante pel centro di gravità di quello o di questo passi per un punto di BC; e si propone (prop. 6ª-14ª) in ogni caso di determinare quale area debba avere una superficie piana affinchè, appendendola in A pel proprio centro di gravità, faccia prendere alla bilancia la sua posizione di equilibrio. Se ora si suppone di appendere al braccio CB un segmento parabolico avente per base questo braccio e l'asse verticale, inscrivendo in esso dei triangoli o dei trapezii della specie anzidetta si de-

(1) Emerge da ciò che ad Archimede era noto il *teorema delle tre mediane*; tuttavia per trovarne l'enunciazione esplicita ed una dimostrazione geometrica bisogna arrivare sino a Leonardo Pisano (v. il T. II, p. 112-113 degli *Scritti pubblicati da B. Boncompagni*, Roma 1862).

Digitized by Google

durranno due limiti fra cui è compresa l'area del triangolo avente per un cateto CB, per altro cateto la verticale di C e per ipotenusa la tangente in B alla parabola (prop. 14ª), risultato questo che poi si estende (prop. 15ª) e permette di dimostrare, mediante riduzione all'assurdo (prop. 16ª), un'espressione dell'area di un segmento parabolico qualsivoglia: se si chiama *base* del segmento la retta che lo limita e *vertice* il punto in cui la tangente è parallela alla base, si può dire (prop. 17ª) che " ogni segmento parabolico è quattro terzi del triangolo avente comuni con esso la base ed il vertice „. Archimede giunse così (e per primo, come afferma egli stesso nella prefazione al libro in discorso) a quadrare un segmento parabolico, anzi, prescindendo dalle ricerche troppo speciali di Ippocrate (L. I, n. 44-45), per primo a quadrare un'area limitata da linee non tutte rette, giacchè (come egli rileva) non riuscirono nel loro intento coloro che prima di lui tentarono di quadrare il circolo od un segmento circolare od un segmento di sezione conica. — Ad Archimede però non isfuggì che nel suo metodo di ricerca si annida un elemento eterogeneo somministrato dalla meccanica, e gli sorse pertanto il desiderio di surrogarlo con altro completamente geometrico. Questo legittimo desiderio viene soddisfatto dal procedimento esposto nella seconda parte del libro che stiamo esaminando; ove (dopo avere dimostrato due semplici proprietà della parabola) Archimede anzitutto fa vedere che " un segmento parabolico è minore del doppio del triangolo di egual base ed eguale altezza „ e ne deduce la possibilità di inscrivere nel segmento stesso una linea poligonale limitante assieme alla base del segmento un'area differente dall'area del segmento di meno uno spazio dato ad arbitrio. Dimostra poi che " se B è il vertice del segmento parabolico $AB\Gamma$ e Δ quello del segmento analogo di base $B\Gamma$ il triangolo $AB\Gamma$ risulterà ottuplo di $B\Delta\Gamma$ „ (proposizione 21ª), e che " la somma di quantisivogliano spazii ciascuno quadruplo del seguente a partire dal triangolo $BA\Gamma$ è minore del segmento parabolico considerato „. Da tali verità e

Digitized by Google

da un semplice lemma di algebra geometrica (1) (prop. 23ª) Archimede desume il risultato anzidetto (prop. 24ª) col ragionamento seguente:

Indichiamo con S il dato segmento $A\Delta BE\Gamma$ di parabola e sia $AB\Gamma$ il triangolo di egual base ed eguale altezza (fig. 1ª). Indichiamo ancora con K un rettangolo $= \frac{4}{3}$ del triangolo $AB\Gamma$. Bisogna dimostrare che $K = S$. Infatti se ciò non accade dovrà essere $K > S$ o $K < S$. — Sia in primo luogo, se è possibile, $S > K$. Nei due segmenti $A\Delta B$ e $BE\Gamma$ inscriviamo i triangoli $A\Delta B$ e $BE\Gamma$ per modo che la tangente in Δ sia parallela ad AB e quella in E a $B\Gamma$. Operiamo similmente sui quattro residui segmenti parabolici e così continuiamo finchè la somma σ dei segmenti residui risulti $< S - K$ (prop. 20ª, cor.); detta ancora Σ la somma dei triangoli successivamente inscritti, avremo quindi $\sigma < \Sigma + \sigma - K$ cioè $\Sigma > K$ il che è assurdo. Infatti noi abbiamo una somma (Σ) di spazii in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, cioè il triangolo $AB\Gamma$ che è quadruplo della somma dei due triangoli $A\Delta B$ e $BE\Gamma$ (prop. 21ª), e questa è quadrupla della somma dei triangoli inscritti nei quattro segmenti residui e così via; e perciò (prop. 23ª) la somma degli spazii seguenti il primo, cioè $\Sigma - AB\Gamma$, è minore di $\frac{1}{3}$ del primo $AB\Gamma$, onde $\Sigma < \frac{4}{3} AB\Gamma = K$. Dunque non può essere $S > K$. — Supponiamo invece sia $S < K$. Si considerino gli spazii $Z = AB\Gamma, H = \frac{1}{4} Z, \Theta = \frac{1}{4} H$, e così via finchè si arrivi ad uno spazio $I < K - S$. Sarà

$$Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z \text{ (prop. 23ª)}$$

epperò

$$K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$$

e

$$K - (Z + H + \Theta + I) < I;$$

donde, per essere $I < K - S$, si desume

$$S < Z + H + \Theta + I$$

---

(1) Ecco in che consiste: dati quantisivogliano termini $u_0 u_1 .., u_n$ di una progressione geometrica di ragione 4, si ha

$$(u_0 + u_1 + \ldots + u_n) + \frac{u_0}{3} = u_n + \frac{u_n}{3},$$

relazione che risulta da un teorema di Euclide (cfr. n.° 18) ma che Archimede dimostra direttamente.

Digitized by Google

il che è impossibile. Si è infatti dimostrato (prop. 22ª) che, dati quantisivogliano spazii in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ il massimo dei quali sia eguale al triangolo inscritto in un segmento S di parabola, la loro somma è $> S$. Perciò non può neppure aversi $S < K$. Ma si è già escluso che sia $S > K$. Dunque $S = K$.

36. Le questioni risolte nei due libri ora esaminati ne suggeriscono tosto un'altra: la determinazione cioè del centro di gravità di un segmento parabolico; ad essa è consacrato il II Libro sull'*Equilibrio dei piani*. L'artificio usato da Archimede a tale scopo è la considerazione della *figura propriamente inscritta* in un segmento parabolico: sotto questo nome egli intende la figura somma del triangolo avente comune con questo la base ed il vertice, dei triangoli analoghi dedotti dai due segmenti parabolici residui, poi di quelli risultanti dai quattro segmenti parabolici rimanenti e così via. Il centro di gravità di una tal figura sta sull'*asse del segmento* (retta congiungente il vertice col punto medio della base), altrettanto dicasi del centro di gravità del segmento; quest'ultimo è più vicino al vertice del centro di gravità di qualsiasi figura propriamente inscritta, ma la distanza fra 'uno e l'altro può rendersi minore di qualunque lunghezza data. Da tutti questi teoremi si deduce senza stento che (prop. 8ª) " il centro di gravità di un segmento parabolico sta sull'asse e lo divide in due parti tali che quella adiacente al vertice sta all'altra come 3 a 2 „. Che se poi si considera il trapezio mistilineo compreso da due corde parallele di una parabola (ne diremo b_1 e b_2 le lunghezze) e dai relativi archi di curva, il centro di gravità si può assegnare mediante un lemma assai complicato di algebra geometrica (1), coll'ajuto del quale si trova

---

(1) Esso dice che dalle relazioni:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}\,,\quad \frac{d}{a-d} = \frac{e}{\frac{3}{5}(a-c)}\,,\quad \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d} = \frac{f}{a-c}$$

segue l'altra

$$e + f = \frac{2}{5}a\,.$$

Digitized by Google

(prop. 10ª) che " esso sta sull'asse; diviso questo in cinque parti eguali, esso determina sul segmento medio due parti tali che il rapporto di quella più vicina alla base b_1 a quella più vicina alla base b_2 è espresso da $b_2^2(2b_1 + b_2) : b_1^2(2b_2 + b_1)$ „; riteniamo superfluo arrestarci a rilevare il singolare valore di questa conclusione e a mettere in evidenza la straordinaria sagacia di cui diede prova Archimede nello scoprirla e dimostrarla coi metodi di cui disponeva.

37. Mentre nei tre libri testè discorsi Archimede gettò i fondamenti della statica geometrica, altri due egli ha destinati ad iniziare la trattazione matematica dell'idrostatica. Ma, quelli ci pervennero direttamente, mentre di questi ci giunse notizia per via indiretta e mal sicura; intendiamo parlare dell'opera intitolata *De insidentibus aquae* o anche *De iis quae in humido vehuntur*, de cui primo libro Nicolò Tartaglia fece conoscere nel 1543 una traduzione latina che (se si presta fede a lui) sarebbe stata ricavata dall'originale greco, ma che, con maggiore probabilità, egli non fece che ricopiare da un codice del XIII secolo contenente la versione (dal greco o dall'arabo) fattane da Guglielmo di Mörbecke (1): ad ogni modo l'originale sembra irremissibilmente perduto, eccezion fatta per un breve frammento di esso pubblicato per la prima volta dal Mai (2). Di quest'opera di Ar-

---

(1) Cfr. Heiberg nei *Prolegomena* alla sua ed. di Archimede, in *Quaest. Arch.*, p. 95 e seg., e nel V Heft delle *Abh. zur Gesch. der Math.*, p. 6-7. Inoltre Cantor *Vorlesungen* II, p. 473.

(2) Aggiungasi che nel 1551 Tartaglia tradusse la stessa opera dal latino in italiano correggendo tacitamente gli errori di cui riboccava la prima versione e aggiungendovi un breve commento; il secondo libro apparve soltanto nel 1564 per merito del libraio veneziano Curzio Trajano erede dei mss. di Tartaglia. Al Commandino si deve la più diffusa e migliore edizione latina di tutta l'opera (Bologna, 1565). Una restituzione di tutto il I libro fu fatta dall'Heiberg (*Archimedis* Περὶ ὀχουμένων *liber I graece restituit* in *Mélanges Graux*, Paris, 1884, p. 689-703), il quale giunse così a dimostrare che il trattato in discorso appartiene in realtà ad Archimede. Veggasi anche H. Zotenberg *Traduction arabe du Traité des corps flottants d'Archimède* (Journ. asiatique, T. XIII della VII Serie, 1879, p. 509-515).

Digitized by Google

chimede c'interessano assai meno i risultati che i procedimenti adoperati per raggiungerli, chè, se quelli appartengono alle matematiche applicate, questi sono da ascriversi fra i più rigorosi e originali ragionamenti di matematica pura; quelli tendono a determinare le condizioni di equilibrio di un segmento di sfera o di conoide retto (1) immerso in un fluido più o meno denso; questi poggiano su pochi postulati che Archimede enuncia senza giustificare in alcun modo, e procedono con quell'andamento sicuro ma un po' misterioso che caratterizza le argomentazioni del grande Siracusano. E siccome dei metodi di ricerca e di esposizione a cui egli accordò la preferenza dovremo occuparci in più opportuno momento (v. n. 44), così non ci arresteremo a lungo su questo e su gli altri lavori meccanici di Archimede (2). Soltanto osserveremo (3), a complemento di quanto precede, che essi presentano il carattere proprio e distintivo della filosofia naturale di Platone, che è quello di astrarre dalle proprietà fisiche dei corpi per trattenersi a contemplare i caratteri matematici delle loro forme; ad esempio la leva archimedea, sulla quale è fondata tutta la statica, non è una verga solida ma una linea geometrica, e l'umido archimedeo è un liquido che esiste non in natura ma nelle mentali astrazioni del filosofo, il quale suppone che le molecole rasentino le pareti de' vasi e fluiscano le une sulle altre senza patirvi la minima resistenza, a quel modo che un punto genera una linea liberamente fluendo nello spazio.

38. Con assai maggior ragione dei così detti *XIV e XV Libri* degli *Elementi di Euclide,* possono considerarsi siccome una con-

---

(1) Di questo Archimede suppone si sappia trovare il centro di gravità che egli insegnò a determinare forse in qualche continuazione, oggi perduta, delle ricerche di cui abbiamo parlato nel numero prec.

(2) Il lettore desideroso di maggiori particolari ricorra al Marie che con amore fece un'analisi dei due libri *Su i galleggianti* nel T. I (Paris, 1883), p. 110-127, della sua *Histoire des Sciences math. et phys.*

(3) Cfr. Caverni, *Storia del metodo sperimentale in Italia*, T. I (Firenze, 1891), pag. 35.

Digitized by Google

tinuazione ed un complemento dell'opera capitale di Euclide i due libri di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*), i quali formano un eccellente capitolo di stereometria in senso stretto. Mentre però il libro di Ipsicle e quello che vi è annesso concernono i poliedri regolari, i due libri archimedei svolgono ulteriormente il confronto fra i corpi limitati da superficie non tutte piane che Euclide aveva iniziato nel penultimo de' suoi libri (1). Ma a tale scopo non sono sufficienti i concetti ed i postulati esposti dall' Alessandrino ed il Siracusano prima d' ogni altra cosa fa conoscere quelli nuovi che gli sono necessarii; i concetti nuovi si riferiscono alla concavità da una parte di linee e superficie, mentre i postulati (che forse furono introdotti nella scienza prima di Archimede) (2) servono a confrontare le lunghezze o le aree di linee e superficie contermini e sono tuttora invocati quanto si tratta il problema della rettificazione di una linea o della misurazione di una superficie (3). Si nota fra questi ultimi l'affermazione che " la retta segna il minimo cammino fra due punti „ — la quale da Proclo (4) e da altri venne erroneamente scambiata per una definizione della retta (5) — e la sua analoga nello spazio,

(1) Vale la pena di notare che tale dipendenza è implicitamente riconosciuta da Archimede; infatti egli espone come lemmi, la cui dimostrazione fu data « dai suoi predecessori » (*Archimedis Opera Omnia* ed. Heiberg, T. I, p. 82), i teoremi 11°-15° del XII Libro degli *Elementi di Euclide.*

(2) Allman, op. cit. p. 187.

(3) « Nous partirons, pour la solution de ce problème, du principe d'Archimède, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant lequel de deux lignes courbes, ou composées de droites, ayant leur concavité tournée du même côté et les mêmes extrêmes, celle qui renferme l'autre est la plus longue ». Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1813, p. 218).

(4) Proclo-Taylor, I, p 133.

(5) La definizione di retta come linea di lunghezza minima si aggira in un circolo vizioso sinchè non si sappia definire il concetto di lunghezza senza ricorrere alla retta; un tentativo in questo senso fu fatto da R. Bettazzi nell' articolo intitolato *Il concetto di lunghezza e la retta* (Annali di Matematica, T. XX della 2ª Serie, 1892, p. 19-37): anche cfr. le osservazioni dello stesso autore *Sulla definizione della retta* (Periodico di mat. per l' inseg. secondario, T. VII. 1892, p. 16-25 e 54-61).

Digitized by Google

nonchè l'esplicita enunciazione di quel principio (ricordato nella prefazione ed applicato nella ricerca della *Quadratura della parabola*) denominato oggi *assioma d'Archimede,* benchè già Eudosso se ne fosse servito dianzi (L. I, n. 72). Non sarà giudicato fuor di luogo notare anche (1) come Archimede ammetta per evidente essere due porzioni di linee o di superficie qualsivogliano grandezze omogenee, come pure due porzioni di spazio; in conseguenza egli fu in grado di parlare di somma e di differenza (v. l'enunciato del suo postulato) di due fra tali grandezze, di considerare fra due di esse una terza da esse compresa, di suddividerle in parti, ecc. Mediante l'esplicita enunciazione dei postulati surriferiti egli si pose in grado, non soltanto di colmare le lacune che nel n. 21 rilevammo nel sistema geometrico euclideo, ma eziandio di fare a questo sistema delle aggiunte importanti che ora segnaleremo. Quelle di maggiore rilievo sono riassunte negli enunciati seguenti:

Prop. 13ª. La superficie laterale d'un cilindro circolare retto è eguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato ed il diametro della base del cilindro. Prop. 14ª. La superficie laterale di un cono circolare retto è eguale ad un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra il lato ed il raggio della base del cono. Prop. 16ª. Secando un cono circolare retto con un piano parallelo alla base, si ottiene un tronco di cono la cui superficie laterale è eguale ad un cerchio avente per raggio la media proporzionale fra il lato e la somma dei raggi delle basi del tronco. Prop. 33ª. La superficie di una sfera è eguale al quadruplo di un suo circolo massimo. Prop. 34ª. Il volume di una sfera è eguale a quello di un cono avente per base un circolo massimo e per altezza un raggio. *Cor.* Se un cilindro ha per base un circolo massimo di una sfera e per altezza un diametro, il volume e la sua superficie della sfera sono risp. due terzi del volume e della superficie totale del cilindro. Prop. 42ª-43ª. La superficie di un segmento sferico, esclusa la base, è eguale ad un circolo avente per raggio il segmento rettilineo che unisce il vertice del segmento ad un punto della base (2).

---

(1) Cfr. Stolz, *Zur Geometrie des Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* (Math. Annalen, XXII Bd., 1883, pagine 504-519) e Lasswitz, *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton,* I Bd. (Hamburg und Leipzig, 1890), p. 180.

(2) Questa proprietà da Archimede è dimostrata direttamente per un segmento minore di un emisfero (prop. 42ª) e poi estesa ad un segmento qualunque (prop. 43ª). Pappo (ed. Hultsch, p. 382) l'enunciò in generale con un teorema unico.

Digitized by Google

Prop. 44ª. Un settore sferico è eguale ad un cono avente per base le superficie della corrispondente calotta e per altezza il raggio della sfera.

Le altre proposizioni componenti il I Libro servono quasi tutte (1) a dimostrare quelle testè citate; non è a credere però che esse abbiano esclusivamente il valore di strumenti logici: per converso ve ne sono fra esse dotate di importanza intrinseca non comune: a provarlo è sufficiente citare quelle che recano i numeri 22 e 23, la seconda delle quali, tradotta nel linguaggio della trigonometria, insegna a calcolare la somma di un certo numero d'archi circolari in progressione aritmetica, mentre la prima concerne un caso particolare dell'altra; e mi piace notare che le dimostrazioni di esse la vincono, a parer mio, per semplicità ed eleganza sulle consuete dimostrazioni elementari delle formole seguenti che ad esse equivalgono:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}+\ldots.+\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m}=\cot\frac{\pi}{2m}$$

$$\frac{2\left\{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\alpha}{m}+\ldots.+\operatorname{sen}\frac{(m-1)\alpha}{m}\right\}+\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2m}$$

---

(1) Fra quelle che non abbiamo citate ve ne sono tre (17ª-19ª) le quali mettono in luce l'abilità spiegata da Archimede nello scegliere gli enunciati più eleganti pei suoi teoremi. Nella prima ad es. egli vuol trovare il volume V dell'insieme di due coni retti aventi la base comune ed i vertici da parti opposte (*rombo solido*); ora, detto r il raggio della base, e h_1, h_2 le altezze dei due coni si ha evidentemente

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\,(h_1+h_2);$$

ma, se si chiama S_1 la superficie laterale del primo cono, l_1 il suo lato e d_1 la perpendicolare condotta su questo dal vertice del secondo cono si ha

$$S_1=\pi r l_1\,,\,(h_1+h_2)\,r=d_1 l_1\,,$$

onde

$$V=\frac{1}{3}S_1 d_1\;;$$

tale relazione prova che « il rombo solido è equivalente ad un cono di base S_1 ed altezza d_1 ». Analoghe osservazioni si potrebbero ripetere riguardo alle due proposizioni successive, ma per brevità le sopprimiamo.

Digitized by Google

I ragionamenti adoperati da Archimede per dimostrare le proposizioni citate sono tutti del medesimo tipo ed hanno una grandissima importanza perchè lo studio approfondito di essi e di altri somiglianti che egli espose altrove ne hanno posto in evidenza il comune substrato logico e guidarono più tardi (v. L. I, n. 72) a concepire e formulare il metodo di esaustione. Per dichiararne la natura scegliamo ad es. le dimostrazioni dei teoremi 33° e 34°; l'artificio su cui queste riposano è la considerazione delle *figure inscritte o circoscritte alla sfera,* delle figure cioè generate dalla rotazione di un semipoligono parilatero e regolare inscritto o circoscritto ad un circolo massimo fatta attorno ad un diametro che ne congiunge due vertici opposti; ecco in qual modo esso permette di conseguire lo scopo voluto (1):

Sia S la superficie della sfera ed A il quadruplo di un circolo massimo: per dimostrare che $S = A$ noi faremo vedere che non può essere nè $S > A$ nè $S < A$ (2). Infatti se fosse $S > A$ si potrebbero (prop. 2ª) sempre trovare due rette B e $\Gamma < B$ tali che $\frac{B}{\Gamma} < \frac{S}{A}$; presa allora la linea Δ media proporzionale fra B e Γ, si potranno (prop. 3ª) trovare una figura inscritta ed una circoscritta tali che, detti l_i e l_c i lati dei poligoni simili generatori, si abbia $\frac{l_i}{l_c} > \frac{B}{\Delta}$. Ora, se S_i e S_c sono le superficie delle figure suddette, si ha (proposizione 32ª) $\frac{S_c}{S_i} = \frac{l_c^2}{l_i^2}$, epperò successivamente

$$\frac{S_c}{S_i} < \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B^2}{B\Gamma} = \frac{B}{\Gamma} < \frac{S}{A};$$

ora la relazione $\frac{S_c}{S_i} < \frac{S}{A}$ è impossibile perchè dall'essere $S_c > S$ (prop. 28ª) e $S_i < A$ (prop. 25ª) risulta $\frac{S_c}{S_i} > \frac{S}{A}$: dunque l'ipotesi $S > A$ è assurda. —

---

(1) Le proposizioni citate in parentesi nel corso del ragionamento che segue sono pure dimostrate da Archimede nel I Libro; resta così messa in evidenza la loro funzione rispetto alle altre.

(2) Notisi che per concludere da ciò che $S = A$ bisogna ammettere come assioma o come postulato (e già osservammo che Archimede l'ammette) essere tutte le superficie grandezze della stessa specie.

Digitized by Google

Se invece fosse $S < A$, si considererebbero due rette B, Γ tali che $\frac{B}{\Gamma} < \frac{A}{S}$ e ragionando come prima si troverebbe $\frac{S_c}{S_i} < \frac{A}{S}$, relazione pur essa impossibile perchè essendo $S_c > A$ (prop. 30ª) e $S_i < S$ (prop. 23ª) è $\frac{S_c}{S_i} > \frac{A}{S}$: dunque non può neppure essere $S < A$. Epperò $S = A$ c. d. d.

Similmente sia V il volume della sfera e A quello del cono avente per base la superficie della sfera e per altezza il raggio. Supponiamo $V > A$; esisteranno allora (prop. 2ª) due rette K e $H < K$ tali che $\frac{K}{H} > \frac{V}{A}$; s'inseriscano fra esse due medie proporzionali I e Θ. Si potranno allora considerare due figure, una inscritta e l'altra circoscritta, tali che, chiamati ancora l_i e l_c i lati dei poligoni simili che le generano, sia $\frac{l_c}{l_i} < \frac{K}{I}$ (prop. 3ª). Ora, detti V_i e V_c i volumi di quelle figure si ha (prop. 32ª) $\frac{V_c}{V_i} = \frac{l_c^3}{l_i^3}$, onde successivamente (per essere $K : I = I : \Theta = \Theta : H$)

$$\frac{V_c}{V_i} < \frac{K^3}{I^3} = \frac{K^3}{IK\Theta} = \frac{K^2}{I\Theta} = \frac{K^2}{KH} = \frac{K}{H} < \frac{V}{A};$$

ora la relazione $\frac{V_c}{V_i} < \frac{V}{A}$ non può aver luogo perchè dalle diseguaglianze $V_c > V$ (prop. 28ª) e $V_i < A$ (prop. 27ª) risulta $\frac{V_c}{V_i} > \frac{V}{A}$: perciò non è $V > A$. Se invece supponiamo $V < A$, determineremo due rette K e $H < K$ tali che sia $\frac{K}{H} < \frac{A}{V}$ e, ragionando come dianzi, concluderemo $\frac{V_c}{V_i} < \frac{A}{V}$, relazione pure assurda giacchè essendo $V_i < V$ (prop. 23ª) e $V_c > A$ (prop. 31ª) si ha certamente $\frac{V_c}{V_i} > \frac{A}{V}$. Non essendo dunque V nè maggiore nè minore di A è necessariamente $V = A$ c. d. d.

Aggiungiamo che a base di tutte le dimostrazioni del genere considerato sta, più o meno nascostamente, l'assioma d'Archimede: ad esempio esso è invocato per dimostrare la prop. 2ª, dalla quale poi derivano le prop. 4ª e 5ª, da quest'ultima la prop. 6ª, ecc.

39. L'argomento del II dei libri *Su la sfera ed il cilindro* è strettamente legato a quello del I; infatti quel libro tende a sciogliere un certo numero di problemi di 1°, 2° e 3° grado, la cui soluzione è resa possibile in parte dalle proposizioni del I

Digitized by Google

Libro ed in parte da analoghe proposizioni fatte conoscere nel II. Fra le questioni della prima categoria troviamo anzitutto quella che consiste nella ricerca di una sfera equivalente ad un cono dato o ad un dato cilindro: essa si riduce a quella della duplicazione del cubo; di analoga riduzione è suscettibile la costruzione di un segmento sferico simile ad un secondo ed equivalente ad un terzo (prop. 5ª), mentre essa si riduce al 2° grado se invece il segmento deve essere simile ad un secondo ed avere la stessa superficie, esclusa la base, di un terzo (prop. 6ª). La divisione con un piano della superficie di una sfera di raggio R in due parti aventi un dato rapporto $\frac{l}{m} > 1$ è di primo grado e non esige che i teoremi del I Libro; per converso la divisione analoga del volume della sfera in due parti aventi un dato rapporto (prop. 4ª), non solo esige si sappia calcolare il volume di un segmento sferico (ed a ciò provvede la prop. 2ª), ma anche si sia in grado di risolvere geometricamente la seguente equazione cubica:

$$[1] \qquad x^3 - 3R^2x + 2\frac{l-m}{l+m}R^3 = o:$$

aggiungiamo che la citata prop. 2ª abilita anche a " separare con un piano da una sfera un segmento avente un rapporto dato col cono di egual base ed eguale altezza „ (prop. 7ª). Chiude degnamente questa serie di ricerche il teorema " fra tutti i segmenti di eguale superficie, l'emisfero ha il volume massimo „, la cui dimostrazione si fonda sulla limitazione

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{V_1}{V_2} < \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2,$$

ove V_1 e S_1 sono volume e superficie del maggiore dei segmenti che un piano determina in una sfera e V_2 e S_2 sono volume e superficie del minore (1).

---

(1) Le due ultime proposizioni citate servono a dimostrare false altre analoghe che erano state proposte prima: lo afferma Archimede nella prefazione alle *Spirali*.

Digitized by Google

All'enumerazione dei problemi risolti da Archimede sarebbe il caso di aggiungere qualche notizia intorno ai metodi in cui sono risolti: ma, per quanto concerne i problemi di 1° e 2° grado, non è il caso di spendere attorno ad essi molte parole, mentre all'opposto sarebbe interessantissimo studiare come Archimede risolvesse quelli di 3°; sgraziatamente del problema di Delo il Siracusano parla (1) come fosse di soluzione così conosciuta che qualunque altro problema fosse da riguardar per risolto quando ad esso fosse ridotto (2), mentre, per quanto concerne la soluzione dell'equazione [1], egli si limita ad enunciarla sotto forma di problema come segue: " date due rette $B\Delta$ e BZ, delle quali $B\Delta$ è doppia di BZ, e dato ancora un punto Θ di BZ, trovare sulla retta ΔB un punto X tale che $B\Delta^2 : \Delta X^2 = XZ : Z\Theta$ (3) „ e ne rimanda la soluzione — nonchè lo studio del relativo diorisma — alla fine del libro: ma sino dall'epoca di Diocle (cfr. n. 73), nessun codice esistente conteneva la prova che Archimede avesse mantenuta la sua promessa. Sicchè la soluzione data da Archimede dei problemi cubici ed in particolare di quello avente per iscopo la divisione di una sfera in due parti aventi un rapporto assegnato deve ascriversi fra gli enigmi che presenta la storia della matematica greca (4).

---

(1) Cfr. anche il ragionamento che riferimmo nel n.° prec.

(2) Vedremo nel Libro IV come il silenzio di Archimede abbia persuaso Eutocio a registrare un gran numero di soluzioni del problema di Delo; anzi alcune di esse furono da noi esposte nel libro prec. (n. 51, 62, 76), delle altre ci occuperemo poi.

(3) Che (posto $B\Theta : \Theta Z = m : l$) questo problema si riduca all'equazione [1], si vede prendendo per incognita principale le distanze del punto cercato X dal punto medio della retta ΔB.

(4) A scioglierlo si provarono molti geometri antichi (come vedremo nel IV Libro parlando di Eutocio) e moderni (cfr. ad es.: F. Bruno, *Soluzioni geometriche di alcuni difficili problemi solidi*, Napoli 1824; Zeuthen, op. cit., p. 235 e seg. e *Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3e dégré par Archimède* in *Bibliotheca mathematica*, 1893, p. 97-104). — Notiamo di più che, siccome la equazione [1] ha tre radici reali, così essa deve ridursi a quella che serve per la trisezione del-

Digitized by Google

40. Se una retta si muove in un piano rotando attorno ad un suo punto fisso con velocità uniforme, e se un punto percorre questa retta con velocità pure uniforme partendo da quel punto fisso, il punto mobile descriverà una linea curva, che diremo *spirale d'Archimede,* perchè lo studio delle proprietà di essa venne fatto dal sommo geometra di Siracusa nell'opuscolo *Περὶ ἑλίκων* (1); ad ogni giro di quella retta corrisponde una spira della curva.

Adoperando per brevità la nomenclatura moderna, chiameremo *polo* il punto fisso, *raggi vettori* le rette che lo uniscono ai punti della curva ed *argomenti* gli angoli formati da queste rette con la posizione iniziale della retta mobile. Designando con ρ il raggio vettore e con φ l'argomento di un punto generico della curva e con a una costante data, la proprietà caratteristica della spirale d'Archimede è espressa dall'equazione $\rho = a\varphi$.

Quando la retta mobile avrà compiuti n giri, il punto mobile avrà descritto una retta di lunghezza $2n\pi a$, onde la lunghezza

---

l'angolo; come si esegua tale riduzione indicarono C. Huygens fin dal 1653 (*Oeuvres de Huygens*, T. I, 1888, p. 239) e più recentemente F. Padula (*Rend. dell'Acc. di Napoli*, T. XI, 1852), con due costruzioni che si trovano riportate nel mio lavoro su *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova, 1892, p. 75); e riguardo al significato geometrico delle tre soluzioni dell'equazione |1|. consulti il lettore un'elegantissima nota del Poinsot che il Peyrard inserì nella sua traduzione francese di Archimede (*Oeuvres d'Archimède*, T. I, p. 394).

(1) Esso è dedicato a Dositeo. Nella lettera prefazione, per varie ragioni interessantissima, Archimede dice che egli aveva inviati gli enunciati di alcuni teoremi sulle spirali a Conone e che questi non arrivò a dimostrarli essendo morto nel frattempo. Ciò indusse taluno (Pappo ed. Hultsch, p. 234-5; Montucla, *Hist. des math.*, II éd., T. I, p. 226; Dilling, *De graecis mathematicis*, Berolini 1831, p. 49) a credere che, all'opposto, di Conone fossero i teoremi e soltanto le dimostrazioni di Archimede e che quindi la spirale non dovesse recare il nome del Siracusano. La falsità di quest'opinione fu dimostrata dal Nizze nelle osservazioni critiche di cui corredò la sua traduzione tedesca di Archimede (cfr. Cantor, *Vorlesungen*, I, p. 263; P. Tannery, *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité*, § VIII; Bull. des Sc. math. et astr., 2.e Série, T. VII).

Digitized by Google

della circonferenza avente questo raggio (o, come dice Archimede, la periferia dell'n^{mo} *cerchio*) è $4n\pi^2 a$; d'altronde l'angolo formato dalla tangente alla curva nell'estremo della sua n^{ma} spira col corrispondente raggio vettore ha, in virtù di una formola notissima, per tangente trigonometrica $2n\pi$; ne viene che la perpendicolare condotta dal polo alla posizione iniziale della retta mobile incontrerà la tangente anzidetta in un punto la cui distanza dal polo è $2n\pi a \,.\, 2n\pi = 4n^2\pi^2 a$, epperò è eguale a n volte la periferia dell'n^{mo} circolo (prop. 18ª e 19ª dell'opuscolo citato): donde emerge l'applicabilità della spirale in discorso alla rettificazione della circonferenza, applicabilità che, se si presta fede a Simplicio (v. L. I, n. 80) ed Eutocio (1), non sarebbe sfuggita ad Archimede stesso. Più generalmente: consideriamo un punto qualunque (ρ, φ) della spirale; la corrispondente tangente (2) forma col raggio vettore passante per il punto di contatto un angolo la cui tangente trigonometrica è $\rho : a$ (3) ed incontra in un certo punto la perpendicolare condotta dal polo a quel raggio vettore; ora si vede subito che $\rho^2 : a$ misura tanto la distanza di quel punto dal polo, quanto l'arco circolare avente per centro il polo, passante pel punto considerato dalla spirale ed intercetto fra il raggio vettore corrispondente a questo punto e la posizione iniziale della retta mobile (prop. 20ª) (4): donde emerge la possibilità di servirsi della spirale d'Archimede per rettificare un arco circolare qualsivoglia. — Chiamiamo E_n l'area descritta dal raggio vettore quando l'argomento varia

---

(1) *Archimedis Opera omnia*, ed. Heiberg, Vol. III, p. 266.

(2) Che « una retta non può toccare una spirale in più d'un punto », vien dimostrato da Archimede nella prop. 13ª del suo libro.

(3) Se (come è costume) si prende quale senso positivo della spirale quello in cui movesi il punto generatore e lo si trasporta nella tangente in un punto qualunque della curva, allora è ottuso l'angolo del raggio vettore, immaginato percorso dal polo verso un punto della curva, colla direzione positiva della tangente in questo punto alla curva stessa: tale proprietà si apprende dai teoremi 16° e 17°.

(4) Si noti qui la più antica determinazione della tangente ad una curva col mezzo della sottotangente polare.

Digitized by Google

fra $2(n-1)\pi$ e $2n\pi$ e C_n l'area dell'n^{mo} cerchio; si ha allora evidentemente

$$C_n = 4n^2\pi^3a^2,$$

d'altronde, in forza di un teorema assai noto, è

$$E_n = \frac{4}{3}\pi^3a^2\,(3n^2 - 3n + 1);$$

si ha quindi

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{n(n-1)+\frac{1}{3}}{n^2} = \frac{2n\pi a \,.\, 2(n-1)\pi a + \frac{1}{3}(2\pi a)^2}{(2n\pi a)^2};$$

in particolare

$$E_1 = \frac{1}{3}C_1\,,\, E_2 = \frac{7}{12}C_2\,;$$

dunque: " La superficie compresa fra la prima spira della curva e la posizione iniziale della retta mobile è eguale alla terza parte del primo cerchio (prop. 24ª); la superficie compresa fra la seconda spira e la stessa retta sta al secondo cerchio come 7 a 12 (prop. 25ª); ed in generale la superficie compresa fra l'n^{ma} spira e la retta medesima sta all'n^{mo} circolo come il rettangolo delle periferie dei circoli $(n-1)^{mo}$ ed n^{mo} accresciuto della terza parte del quadrato della differenza di queste circonferenze sta al quadrato del raggio dell'n^{mo} circolo (*cor.* alla prop. 25ª) ". Dalle formole precedenti, risulta ancora

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi^3a^2\,,\, E_2 - E_1 = 8\pi^3a^2\,,\, E_n - E_{n-1} = 8(n-1)\pi^3a^2\,,$$

e quindi le relazioni

$$E_1 = \frac{1}{6}(E_2 - E_1)\,,\, E_n - E_{n-1} = (n-1)(E_2 - E_1)$$

Digitized by Google

che è facile enunciare a parole (prop. 27ª). — Consideriamo da ultimo l'area S del triangolo mistilineo compreso fra un arco di spirale ed i raggi vettori relativi ai suoi estremi; se ρ_1 e $\rho_2 > \rho_1$ sono questi raggi vettori, si trova subito

$$S = \frac{(\rho_2^2 + \rho_2\rho_1 + \rho_1^2)(\rho_2 - \rho_1)}{6a};$$

denotando poi con S_1 e S_2 i settori circolari compresi entro gli stessi raggi vettori si ha evidentemente:

$$A'' = S - S_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2(\rho_2 + 2\rho_1)}{2a},$$

$$A' = S_2 - S = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2(2\rho_2 + \rho_1)}{2a}$$

$$S_1 = \frac{\rho_1^2(\rho_2 - \rho_1)}{2a}, \quad S_2 = \frac{\rho_2^2(\rho_2 - \rho_1)}{2a}$$

epperò

$$\frac{S}{S_2} = \frac{\rho_2^2 + \rho_2\rho_1 + \rho_1^2}{3\rho_2^2} = \frac{\frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)^2 + \rho_1\rho_2}{\rho_2^2}$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{2\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_1 + \frac{2}{3}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)}$$

e queste ultime equazioni dicono: " L' area di un settore di spirale sta al settore circolare avente lo stesso angolo e per raggio il maggiore dei raggi vettori che limitano quel settore, come il rettangolo di questi raggi vettori aumentato della terza parte del quadrato della loro differenza sta al quadrato del maggiore di essi (prop. 26ª). Si prendano sulla spirale due punti qualunque e si uniscano al polo; si descrivano due archi di circolo passanti per quei due punti ed intercetti da quelle congiungenti (la minore delle quali prolungata); allora la superficie compresa fra l' arco del cerchio maggiore, il prolungamento della congiungente minore e l' arco di spirale, sta alla superficie compresa

Digitized by Google

fra l'arco del cerchio minore, la congiungente minore e l'arco di spirale, come il raggio del cerchio minore aumentato dei due terzi della differenza fra i due raggi sta allo stesso raggio aumentato di un terzo della medesima differenza (prop. 28ª) „.

Le proprietà ora indicate sono le più interessanti fra quelle che Archimede ravvisò nella sua celebre curva (1); se ne abbiamo accompagnati gli enunciati con un cenno di un modo con cui si possono dimostrare senza difficoltà servendosi dei procedimenti moderni, fu per agevolare al lettore l'intelligenza di una fra le più astruse produzioni dell'antica letteratura matematica (2), non già collo scopo di dimostrare la superiorità dei metodi moderni, chè anzi, notando come Archimede sia riuscito a risolvere tutte le questioni metriche non trascendenti relative alla sua curva (3), si è portati ad affermare che i metodi vetusti, applicati alle classi di problemi per cui vennero creati, sono indiscutibilmente di potenza non inferiore a quella di cui gode il calcolo infinitesimale (4).

41. Per applicare questi procedimenti alla trattazione dell'argomento scelto, Archimede ebbe bisogno di poggiarsi sopra alcuni teoremi di cinematica, di geometria e di algebra geo-

---

(1) Non è superfluo aggiungere che Archimede dimostra di regola ogni teorema per la prima spira, poi per la seconda, e nota che similmente si farebbe per le altre: donde emerge il legame strettissimo che esiste fra le proposizioni 14ª e 15ª, 16ª e 17ª, 18ª e 19ª, 21ª e 22ª, 24ª e 25ª.

(2) « Elles » (le dimostrazioni dei teoremi sulla spirale d'Archimede) « sont si longues et si difficiles à embrasser que, comme on l'a pû voir dans la Préface de l'Analyse des infiniments petits, M. Bovillaud a avoué qu'il ne les avait jamais bien entendues, et que Viète les a injustement soupçonnées de paralogisme, parce qu'il n'avait pû non plus parvenir à les bien entendre ». *Histoire de l'Académie des Sciences pour l'année* 1704 (Paris, 1722, p. 42). « Après vingt siècles de travaux et de découvertes, les intelligences les plus puissantes viennent encore échouer contre la synthèse difficile du Traité des spirales ». Libri, op. cit., T. I, pag. 35.

(3) Ci esprimiamo così perchè la rettificazione della curva esige l'uso di logaritmi.

(4) Cfr. Carnot, *Reflexions sur le métaphysique du calcul infinitésimal*, II éd. (Paris, 1813), p. 138.

Digitized by Google

metrica sui quali è necessario spendiamo qualche parola. Riguardo ai primi (prop. 1ª e 2ª) basti rilevare che ivi viene esposta la proprietà caratteristica del moto uniforme per dimostrare la quale viene invocato il lemma di Archimede il quale quindi, anche questa volta, il grande geometra pone a sostegno dell'insieme delle proprie argomentazioni. — I secondi sono di natura porismatica, giacchè affermano la possibilità di costruire certe figure quando siano soddisfatte delle determinate condizioni (1), e vengono dimostrati nell'ipotesi che si sappiano risolvere alcuni *problemi d'inserzione* (2) dei quali Archimede non insegna la soluzione. Tale silenzio — a cui d'altronde non è difficile sopperire (3) — come si può interpretare? Una prima spiegazione si ottiene osservando che di quei problemi non è necessario conoscere la soluzione completa ma basta sapere che essa esiste, della qual cosa è agevole convincersi mediante alcune semplici considerazioni di continuità (4); ma, siccome queste non erano ritenute dagli antichi sufficientemente rigorose, così si è pensato che la risolubilità delle anzidette questioni fosse dimostrata in opere che non giunsero sino a noi (5), anzi l'indole porisma-

---

(1) Tradotte in formole queste proposizioni insegnano le condizioni di risolvibilità di alcune speciali equazioni trigonometriche.

(2) Di uno di tali problemi si servì Ippocrate nel costruire la terza delle sue lunule (L. I, n. 45); l'enunciato generale in cui tutti son compresi verrà esposto fra non molto (v. n. 65); rileviamo intanto che quelli adoperati da Archimede sono: I. *Dato un diametro di un cerchio e l'estremo di un raggio ad esso perpendicolare, adattare una retta di data lunghezza fra il cerchio ed il diametro prolungato per modo che il prolungamento di essa passi pel detto estremo.* II. *Data una corda di un cerchio ed un punto dell'arco sotteso, adattare una retta di data lunghezza fra la corda e l'arco complementare per modo che il suo prolungamento passi pel punto dato.*

(3) Cfr. R. Baltzer a p. 1231-33 di *Pappo ed. Hultsch*, Heiberg in *Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abth.*, T. XXV, p. 66.

(4) P. Tannery, *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2.e Série, T. V, 1884, p. 49-63).

(5) Quest'ipotesi si presenta spontaneamente osservando che Archimede, nel dimostrare l'espressione del volume della sfera (v. n. 35), adoperò, come già rilevammo, l'inserzione di due medie proporzionali, senza neppure accennare come si eseguisse.

Digitized by Google

tica delle proposizioni invocate fa pensare a qualche collezione di porismi analoga a quella composta da Euclide (v. n. 27-28); sventuratamente questa ha un esistenza puramente ipotetica, anzi assai problematica, dal momento che nè Pappo nè alcun altro antico geometra allude ad alcuna raccolta di quel genere (1). Una seconda spiegazione, che ci sembra assai più plausibile, si ottiene osservando che i citati problemi — anzi di regola tutti i problemi di inserzione — si possono sciogliere in pratica assai agevolmente col mezzo di una riga materiale mobile, sul cui orlo siano segnati due punti distanti per una lunghezza eguale al segmento da inserire; ora nulla vieta di supporre che di questo mezzo siasi giovato Archimede il quale senza pedanterie usò tutti i procedimenti più convenienti a condurre alla scoperta della verità; come egli si servì di considerazioni statiche per quadrare la parabola (n. 32) e di considerazioni aritmetiche per recare qualche cospicuo contributo al problema della quadratura del cerchio (n. 43), così egli probabilmente non si sarà fatto scrupolo di adoperare anche le inserzioni meccaniche quando gli riuscivano utili. Ammesso ciò, si giunge in possesso di uno fra i più forti argomenti a sostegno della tesi che le inserzioni meccaniche erano dai Greci ascritte fra le operazioni concesse al geometra (2), almeno nelle investigazioni che uscivano dai primi elementi. — Finalmente riguardo alle proposizioni aritmetiche (prop. 10ª e 11ª) è sufficiente notare che esse esprimono in linguaggio geometrico le seguenti relazioni:

$$n^3 + n^2 + (1 + 2 + \ldots + n) = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2) < n^3 < 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$\frac{n\,(a+nd)^2}{a^2+(a+d)^2+\ldots+(a+\overline{n-1}\,d)^2} < \frac{(a+nd)^2}{a(a+nd)+\frac{1}{3}n^2d^2} < \frac{n\,(a+nd)^2}{a^2+(a+d)^2+\ldots+(a+\overline{n-1}\,d)^2}$$

---

(1) Heiberg, *Litt. Studien üb. Euklid*, p. 68-70.

(2) Quest'opinione fu emessa dall'Oppermann, accettata e difesa dallo Zeuthen nel cap. XII dell'op. cit.

Digitized by Google

Nel determinare le aree di cui si parla negli enunciati riferiti nel n.° prec. Archimede procede in modo somigliante a quello che vedemmo da lui seguito nel I Libro *Su la sfera ed il cilindro,* onde per caratterizzarlo completamente basta che aggiungiamo la definizione delle *superficie inscritte* e *circoscritte* da lui scelte siccome ausiliari. Si consideri a tal uopo un settore di spirale e se ne divida l'angolo in un certo numero di parti eguali; per ognuno dei settori parziali si potranno allora considerare due settori circolari uno interno e l'altro esterno a questo, aventi comuni i lati rettilinei e passanti ciascuno per un estremo del contorno curvilineo del settore di spirale; su ognuno dei nuovi settori di spirale si operi nell'istesso modo e così si continui; l'insieme dei settori interni così generati è la figura ausiliare *inscritta,* l'insieme degli esterni la *circoscritta.*

Archimede, come accennammo, si occupa eziandio della costruzione di tangenti e noi, per chiarire come egli l'ottenga, non troviamo di meglio che riferire il ragionamento da lui usato nel dimostrare la prop. 18ª.

Teorema. Se si conduce la tangente nell'estremo della prima spira della curva e dal punto origine della spirale si conduce la perpendicolare alla posizione iniziale della retta mobile, questa segherà la tangente in un punto la cui distanza dall'origine della spirale è eguale alla periferia del primo circolo.

Dimostrazione. Sia ABΓΔΘ la spirale avente A per origine; inoltre ΘA sia la posizione iniziale della retta generatrice, ΘHK il primo circolo e ΘZ la tangente in Θ alla spirale. Si conduca da A la retta AZ perpendicolare ad AΘ; questa incontrerà la tangente ΘZ perchè l'angolo delle rette ZΘ, ΘA è acuto (prop. 16ª). L'incontro abbia luogo in Z: bisogna dimostrare che la retta AZ è eguale alla periferia del circolo ΘKH. Infatti se non lo è sarà maggiore o minore.

Supponiamo anzitutto AZ > circ. ΘKH. Si prenda allora (fig. 2.ª) una retta AΛ < AZ e > circ. ΘKH (prop. 4ª). Si avrà allora un circolo ΘKH ed in esso una corda ΘH minore del diametro. Inoltre $\frac{\Theta A}{A\Lambda} >$ del rapporto della metà di HΘ alla perpendicolare condotta da A a questa corda, perchè questo rapporto è $= \frac{\Theta A}{AZ}$ che è evidentemente $< \frac{\Theta A}{A\Lambda}$. È quindi possibile condurre una retta AN da A al prolungamento di ZΘ per modo che sia $\frac{NP}{\Theta P} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$ (prop. 7ª); essa tagli il circolo in P e la spirale in X. Ora $\frac{\Theta P}{A\Lambda} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta HK}$ perchè

Digitized by Google

$\Theta P <$ arc. ΘP e $A\Lambda >$ circ. ΘKH. Inoltre $\frac{NP}{PA} = \frac{NP}{\Theta A} = \frac{\Theta P}{A\Lambda}$ onde

$\frac{NP}{PA} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta KH}$, da cui $\frac{NA}{PA} < \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{arc. } \Theta P + \text{circ. } \Theta KH} = \frac{XA}{A\Theta}$ (prop. 15ª).

Ora la relazione $\frac{NA}{PA} < \frac{XA}{A\Theta}$ è impossibile perchè $NA > AX$ e $PA = A\Theta$. Perciò non può essere $AZ >$ circ. ΘKH.

Supponiamo invece che sia $AZ <$ circ. ΘKH. Si scelga allora (fig. 3.ª) una retta $A\Lambda > AZ$ e $<$ circ. ΘKH (prop. 4ª) e si conduca da Θ la parallela ad AZ. Allora si ha un circolo ΘKH ed in esso una corda ΘH minore del diametro ed una retta ΘM tangente in Θ. Inoltre $\frac{A\Theta}{A\Lambda} <$ del rapporto della metà di $H\Theta$ alla perpendicolare condotta da A a questa corda, perchè esso è $< \frac{A\Theta}{AZ}$, rapporto eguale al precedente. Si potrà quindi condurre da *A* alla tangente una retta $A\Pi$ per modo che $\frac{PN}{\Theta\Pi} = \frac{\Theta A}{A\Lambda}$ (prop. 8ª); essa tagli il circolo in P e la spirale in X. Ora, essendo $\Theta A = AP$, dalla relazione precedente segue $\frac{NP}{PA} = \frac{\Theta\Pi}{A\Lambda}$. Di più $\frac{\Theta\Pi}{A\Lambda} > \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ. } \Theta HK}$ perchè $\Theta\Pi >$ arc. ΘP e per ipotesi $A\Lambda <$ circ. ΘHK; onde $\frac{NP}{AP} > \frac{\text{arc. } \Theta P}{\text{circ } \Theta HK}$. Ancora: $\frac{PA}{NA} > \frac{\text{circ. } \Theta HK}{\text{arc. } \Theta KP}$ e $\frac{\text{circ. } \Theta HK}{\text{arc. } \Theta KP} = \frac{\Theta A}{AX}$ (prop. 14ª): dunque $\frac{PA}{NA} > \frac{\Theta A}{AX}$, relazione impossibile perchè $PA = \Theta A$ e $NA > AX$. Perciò non può neppure essere $AZ <$ circ. ΘKH. Dunque $AZ =$ circ. ΘKH, c. d. d. (1).

A questa dimostrazione Pappo mosse il seguente appunto: Ci sembra sia non piccolo errore per un geometra quello di risolvere un problema piano mediante le linee coniche o linee superiori e in generale far derivare la soluzione di una questione da un genere al quale non appartiene la questione stessa, come fecero Apollonio nel problema (2) sulla parabola nel V Libro delle *Coniche* ed Archimede nel suo libro *Sulle spirali* allorquando usa di un'inserzione in un circolo che è un problema solido. Giacchè si può, senz'adoperare alcuna proposizione solida, dimostrare il teorema esposto da quest' ultimo, cioè che la circonferenza del circolo relativo alla prima rivoluzione è eguale alla retta condotta dall'origine alla tangente (3).

---

(1) Archimede, ed. Heiberg, T. II, p. 70-76.

(2) Quale? V. n.° 60.

(3) Pappo ed. Hultsch, p. 270-273; cfr. anche p. 296 e seg. Inoltre Heiberg, *Ueber eine Stelle des Pappus* (Zeit. f. Math. u. Phys., Bd. XXIII, 1878, *Hist.-lit. Abth.*, p. 117-120).

Digitized by Google

Come ognun vede, in questa critica si possono distinguere due parti: una colpisce in generale l'uso nelle dimostrazioni di inserzioni non eseguibili *regula et circini* e ad essa abbiamo implicitamente risposto colle osservazioni fatte anteriormente sull'uso di questo artificio di dimostrazione; un'altra invece mira al ragionamento dianzi riferito e per riconoscere se abbia o non qualche valore è inevitabile assicurarsi se del teorema d'Archimede esista o non una dimostrazione nella quale non intervengano problemi di grado superiore al 2° (1). Orbene, una tale dimostrazione esiste in fatto (2); perchè, senza uscire dagli elementi, si può far vedere che, se (fig. 2ª e 3ª) la retta AZ è eguale alla periferia del primo circolo e si conduce la retta $Z\Theta$, questa gode della proprietà che tutti i punti della curva stanno da una parte di essa, ed è noto essere questa la proprietà con cui gli antichi solevano caratterizzare la tangente ad una curva. Forza è dunque convenire che Pappo, se con dubbio fondamento e comportandosi da pedante criticò in massima l'impiego nelle dimostrazioni di inserzioni ineseguibili elementarmente, non senza qualche ragione criticò Archimede per avere adoperato un ragionamento più complicato di quanto fosse strettamente indispensabile. Tuttavia egli, esprimendo la propria disapprovazione in quel modo così crudo, palesò di non tenere abbastanza conto del fatto che per giungere alla verità lo spirito umano non segue di regola il cammino di minima resistenza, ed ebbe torto di non rilevare almeno che pel progresso della scienza sarebbe estremamente desiderabile si moltiplicassero gli *errori* analoghi a quello che egli così aspramente rimproverò ad Archimede, purchè ciascuno recasse un incremento altrettanto notevole alle nostre cognizioni.

42. Facendo ruotare un'ellisse attorno ad uno de' suoi assi, si ottiene una superficie che Archimede chiama *sferoide, allun-*

---

(1) Tale questione venne lasciata irresoluta dall'Hultsch: cfr. Pappo ed. Hultsch., p. 299, nota 1.

(2) Come fece vedere il Tannery nella memoria da ultimo citata.

Digitized by Google

gato od *accorciato* secondo che l'asse di rotazione è il maggiore o il minore degli assi della curva; facendo invece rotare una parabola attorno al suo asse o un'iperbola (cioè uno dei due rami di cui noi oggi riteniamo composta tale curva) attorno al suo asse trasverso, nasce un *conoide rettangolo* od *ottusangolo*. Gli è lo studio di queste quattro notevoli superficie che Archimede si è proposto nel suo libro Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων (1). Il quale è esso pure diretto a Dositeo e si apre con tre proposizioni di aritmetica, di cui la prima è soltanto enunciata, essendo dimostrata nel libro *Sulle spirali* (prop. 11ª), mentre le due altre dicono:

Prop. 1ª. Se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_1}{A_2}\,,\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{A_2}{A_3}\,,\ldots,\ \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

e

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1}\,,\ \frac{a_2}{b_2} = \frac{A_2}{B_2}\,,\ldots,\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n}{B_n}$$

sarà

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{B_1 + B_2 + \ldots + B_n}.$$

Prop. 2ª. Se si pone

$$S = (l + a)\,a + (l + 2a)\,2a + \ldots + (l + \overline{n-1}a)\,\overline{n-1}a + (l + na)\,na$$

$$S' = (l + a)\,a + (l + 2a)\,2a + \ldots + (l + \overline{n-1}a)\,\overline{n-1}a$$

$$\Sigma = n\,(l + na)\,na$$

si avrà

$$\frac{\Sigma}{S} < \frac{na + l}{\frac{na}{3} + \frac{l}{2}} < \frac{\Sigma}{S'}\,.$$

Prima di passare ad esporre le indagini che sono lo scopo precipuo del libro di cui ci occupiamo, Archimede, fedele alle con-

(1) Importa rilevare subito due cose: 1.° che Archimede conobbe tutte le quàdriche rotonde eccettuato l'iperboloide ad una falda, 2.° che del conoide ottusangolo egli considerò il cono asintoto, il quale egli intendeva descritto dalla rotazione degli asintoti dell'iperbola generatrice.

Digitized by Google

suetudini sue e dei geometri contemporanei, fa conoscere tutte le proposizioni sussidiarie che dovrà invocare più tardi. La prima si può considerare quasi un complemento ai risultati ottenuti nella *Quadratura della parabola,* giacchè ha per iscopo il confronto fra due segmenti di parabola (1) e vien dimostrata servendosi dell'espressione dell'area di un segmento parabolico e di un teorema che Apollonio inserì poi nel III Libro delle *Coniche* (prop. 17ª); le tre successive sono analoghe inquantochè servono a confrontare l'area di un'ellisse con quella di un circolo o di un'altra ellisse (prop. 4ª-6ª) e sono dimostrate con artifici non dissimili da quelli che si usano oggi per raggiungere lo stesso scopo. Dopo ciò Archimede abbandona la geometria di misura per entrare nel campo della geometria di posizione, ed in tre proposizioni estremamente notevoli (che gli piace enunciare sotto forma di porismi) insegna a costruire un cono (obliquo o retto) o un cilindro circolari passanti per una data ellisse e soddisfacenti ad altre condizioni date (prop. 7ª-9ª), e porge in tal modo un dato di fatto per dimostrare che dei coni obliqui i geometri greci anteriori ad Apollonio si erano occupati non senza frutto (2).

Premesso ciò e ricordate le proposizioni concernenti la misura dei coni, cilindri e loro *tronchi* (3), Archimede si volge

---

(1) Sia p il semiparametro di una parabola nella quale è inscritto un triangolo AA_1A_2 e d la mediana uscente da A del triangolo AA_1A_2 (cioè l'*asse del segmento parabolico* A_1AA_2). È facile vedere che

$$\textit{area triangolo } A_1AA_2 = 2\sqrt{2p\,d^3}$$

$$\textit{area segmento } A_1AA_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2p\,d^3};$$

donde segue che *due segmenti di una parabola aventi eguali assi sono equivalenti.* È appunto quanto dimostra Archimede nella prop. 4ª. Si può aggiungere (v. formole prec.) che *i quadrati di due segmenti della stessa parabola stanno fra loro come i cubi dei relativi assi.*

(2) Chasles, *Ap. hist.*, II ed., (Paris, 1875), p. 546 nota.

(3) Solidi ottenuti tagliando un cono o un cilindro retto con piani non paralleli alle basi.

Digitized by Google

allo studio delle quattro quàdriche rotonde anteriormente definite, determinando anzitutto (prop. 11ª-14ª) la specie delle sezioni prodotte in esse da piani aventi determinate posizioni (1). I teoremi 15° e 16° constano ciascuno di tre parti diverse che per comodità distingueremo colle lettere *a, b, c;* 15*a* e 15*b* si riferiscono alla posizione rispetto a quelle superficie di certe rette, 15*c* e 16*a* insegnano come sia situato il piano tangente in un punto, 16*b* la costruzione di questo; finalmente 16*c* e 17 si riferiscono alle coppie di piani tangenti fra loro paralleli di uno sferoide, e provano indirettamente come ad Archimede non sia sfuggita l'assenza di tali coppie di piani nelle altre due quàdriche a lui note. Col teorema affermante che ogni piano condotto pel centro di uno sferoide divide in due parti eguali il solido e la superficie, Archimede chiude la rassegna delle proprietà di posizione di cui godono gli sferoidi ed i conoidi, e si volge quindi ad applicare i metodi così abilmente adoperati nei libri *Su la sfera ed il cilindro* alla ricerca delle proposizioni che nelle quàdriche rotonde corrispondono a quelle in questi dimostrate per la sfera. A tale scopo — servendosi della prop. 1ª del Libro X degli *Elementi di Euclide*, la quale, come sappiamo, equivale all'assioma di Archimede — egli dimostra l'importante teorema seguente (nel cui enunciato il lettore ravviserà tosto la forma porismatica): " Dato un segmento determinato in un conoide od in uno sferoide da un piano perpendicolare (prop. 19ª) od obliquo all'asse (prop. 20ª) — nel caso dello sferoide si suppone di più che il segmento sia minore di un emisferoide — si potrà in esso inscrivere una figura e ad esso circoscriverne un'altra, tali che la loro differenza sia minore di qualunque grandezza data „; da esso, mediante ragionamenti apagogici analoghi a quelli che noi abbiamo riferiti nei n.i 33 e 34, deduce le seguenti impor-

(1) Le dimostrazioni sottintese da Archimede furono ricostruite dagli antichi editori delle sue opere (cfr. *Archimedis Opera* ed. Heiberg, Vol. I, p. 343, nota 1) e dallo Zeuthen (op. cit., Cap. XIX).

Digitized by Google

tantissime proposizioni alle quali il Libro in discorso deve l'altissima e meritata fama di cui gode:

Prop. 21^a-22^a. Il volume di qualunque segmento di conoide rettangolo è una volta e mezza il volume di un cono avente la stessa base e per vertice il punto *(vertice del segmento)* in cui il piano tangente è parallelo alla base (1). Prop. 25^a-26^a. Il volume di qualunque segmento di conoide ottusangolo sta al cono avente la stessa base e lo stesso vertice, come l'asse del segmento assieme al triplo della distanza del vertice di questo dal centro della superficie sta all'asse assieme al doppio di questa stessa distanza. Prop. 27^a-32^a. Se uno sferoide è tagliato da un piano qualunque, il minore (maggiore) dei segmenti risultanti starà al cono avente la stessa base e lo stesso vertice, come la somma della semi-congiungente i vertici dei due segmenti e dell'asse del segmento maggiore (minore) sta all'asse del segmento maggiore (minore).

Per tale modo Archimede con un nuovo e convincentissimo esempio dimostrò la malleabilità del metodo da lui usato; i suoi procedimenti sono vere integrazioni eseguite senza l'algoritmo infinitesimale; ad essi s'inspirarono, in essi trovarono lo stimolo ad ulteriori investigazioni, Cavalieri, Keplero e quanti altri contribuirono alla creazione del calcolo integrale (2).

43. Di tre sole proposizioni consta l'opuscolo che chiude la serie delle autentiche scritture archimedee da esaminarsi nel presente Libro (3). È quello intitolato Κύκλου μέτρησις, estratto fatto presumibilmente ad uso scolastico (4) di un più esteso lavoro, ricordato da Pappo (5), *Sulla periferia del cerchio* (Περὶ τῆς

(1) Le prop. 23^a-24^a, che servono a paragonare due segmenti di uno stesso conoide rettangolo, sono corollarii delle due pecedenti.

(2) Si veggano anche le ricerche compiute nella scuola napoletana intorno ad un certo problema di Wallis, delle quali ho trattato a p. 55-61 del mio precitato scritto sopra Nicola Fergola.

(3) Cfr. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842, p. 108-122); Rudio, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (Leipzig, 1892, p. 71-81); Hultsch, *Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes* (Götting. Nachrichten 1893, p. 385-393).

(4) P. Tannery, *Sur le mésure du cercle d'Archimède* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, T. IV, 2.e Série, 1882), p. 313 e *Bull. des Sc. math. ed astr.*, 2.e Série, T. VI, 1882, I Partie, p. 106.

(5) Pappo ed. Hultsch, p. 312.

Digitized by Google

τοῦ κύκλου περιφερείας) nel quale era forse (1) cominciato il raffronto fra un arco qualsivoglia e la propria corda. Lo scopo della parte superstite di tale opera è il paragone della lunghezza dell'intera periferia di un circolo col relativo diametro, paragone legittimo perchè Archimede — come esplicitamente dichiara il commentatore Eutocio (2) — a somiglianza del suo predecessore Dinostrato (v. L. I, n. 81) annoverava fra le grandezze omogenee le lunghezze di due linee qualsivogliano. Esso viene raggiunto col mezzo di tre proposizioni che ci sono presentate in ordine differente dall'ordine logico (perchè la seconda di esse non è che un semplice corollario della terza) e che noi, autorizzati anche dallo stato dei manoscritti esistenti (3), esamineremo nella loro naturale successione.

La prima di esse afferma l'equivalenza di un circolo ad un triangolo rettangolo avente i cateti eguali uno alla periferia l'altro al raggio del circolo; è una proposizione che viene da Proclo (4) attribuita ad Archimede (ciò che vien confermato da due citazioni di Pappo) (5), attribuzione che non ha nulla di sorprendente vista fra l'altro la somiglianza dell'enunciato e della dimostrazione di essa con altre che pure vengono attribuite al Siracusano; il ragionamento di Archimede poggia sulla considerazione dei poligoni regolari di 3.2^n lati inscritti e circoscritti alla sfera ed è di natura apagogica; è l'argomentazione di Antifonte e di Brisone (v. L. I, n.i 48 e 49) purgata

(1) P. Tannery, *Recherches sur l'astronomie ancienne* (Paris, 1893), p. 63-4.

(2) *Archimedis Opera omnia* ed. Heiberg, Vol. III, p. 266.

(3) « Hic locus mire corruptus et confusus transcriptori tribuo, qui eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutavit; neque enim Archimedes hanc propositionem ante prop. 3, qua nititur, posuit » Archimede ed Heiberg, T. I, p. 263, nota 2.

(4) Proclo-Taylor, II, p. 201.

(5) Pappo ed. Hultsch, p. 258 e 312. Questo commentatore preferisce enunciare il teorema di Archimede dicendo essere il circolo metà del rettangolo avente per base la periferia e per altezza il raggio.

Digitized by Google

da ogni considerazione di infinito e resa conclusiva mediante il lemma che porta il nome di Archimede.

Maggior novità di concetti troviamo nella terza proposizione; essa assegna dei limiti fra cui è compreso il rapporto (del quale Euclide aveva già dimostrato la costanza col teorema 2.° del Libro XII degli *Elementi*) della periferia di un circolo qualunque al relativo diametro; essa viene stabilita con un argomentazione la quale, come vedremo a suo tempo, fin dall'antichità venne sfruttata da Apollonio da Perga e Filone da Gadara (1) per trovare con un'approssimazione maggiore di quella raggiunta da Archimede il valore del rapporto anzidetto, e che in tempi recenti venne ravvisata come suscettibile di assai più vasta applicazione (2). Tale argomentazione ha per proprio fondamento la considerazione dei lati L_n dei poligoni regolari di $n = 6, 12, 24, 48, 96$ lati circoscritti al cerchio di diametro D e dei lati l_n degli analoghi poligoni inscritti; Archimede dimostra che il rapporto $D : L_n$ è, pei valori suddetti di n, superiore rispettivamente a

$$\frac{265}{153}, \quad \frac{571}{153}, \quad \frac{1172\frac{1}{8}}{153}, \quad \frac{2334\frac{1}{4}}{153}, \quad \frac{4673\frac{1}{2}}{153},$$

mentre il rapporto $D : l_n$ è, per $n = 12, 24, 48, 96$, inferiore rispettivamente

$$\frac{3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}, \quad \frac{1838\frac{9}{11}}{240}, \quad \frac{1009\frac{1}{6}}{66}, \quad \frac{2017\frac{1}{4}}{66};$$

(1) Ricordati da Eutocio nella chiusa del suo commento alla *Misura del cerchio* (Archimede ed. Heiberg. Vol. III, p. 300-302).

(2) C. Runge, *Ueber eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen* (Acta mathematica, T. XV, 1891, pagine 221-247).

Digitized by Google

detti quindi P e p i perimetri dei due poligoni di 96 lati e C la periferia del circolo si avrà

$$\frac{P}{D} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = \frac{29376}{9347} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{2}{1335}} < 3 + \frac{1}{7}$$

$$\frac{p}{D} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10 + \frac{1}{110}}} > 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} = 3 + \frac{10}{71};$$

siccome poi

$$p < C < P$$

così *a fortiori* sarà

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3 + \frac{1}{7}$$

come appunto trovò Archimede (1). — Emerge dal fin quì detto che il ragionamento archimedeo riposa sul calcolo approssimato dei lati dei poligoni regolari successivamente inscritti e circoscritti; per eseguirlo basta una facile combinazione di poche proposizioni della più elementare geometria, ma fa mestieri avere a propria disposizione un considerevole corredo di nozioni aritmetiche le quali permettano di riconoscere che

$$265\ ,\ 591\frac{1}{8}\ ,\ 1172\frac{1}{8}\ ,\ 2339\frac{1}{4}$$

sono valori approssimati per difetto di

$$\sqrt{70227}\ ,\ \sqrt{349450}\ ,\ \sqrt{1373943\frac{11}{264}}\ ,\ \sqrt{5472132}\ ,$$

(1) Notiamo che durante il Medio Evo la conclusione cui arrivò Archimede venne fraintesa, perchè si ritenne essere esattamente $\pi = 3\frac{1}{7}$.

Digitized by Google

mentre

$$1351\ ,\ 3013\frac{11}{24}\ ,\ 1838\frac{9}{11}\ ,\ 1009\frac{1}{6}\ ,\ 2017\frac{1}{2}$$

sono valori approssimati per eccesso di

$$\sqrt{1825200}\ ,\ \sqrt{9082321}\ ,\ \sqrt{3380929}\ ,\ \sqrt{1018405}\ ,\ \sqrt{4069284\frac{1}{36}}\ .$$

In qual modo Archimede abbia ottenuti questi risultati così notevoli ci è completamente ignoto; egli non si è indugiato ad esporre questi particolari di calcolo pratico, ed Eutocio — che, come la maggior parte dei commentatori, è assai laconico appunto nei passi in cui con più intenso desiderio il lettore invoca il suo ajuto — rimandando per i procedimenti di estrazione della radice quadrata ai commenti alla grande opera di Claudio Tolomeo, si limita a verificare, con delle volgari elevazioni a quadrato, l'esattezza dei calcoli di Archimede. Sventura volle che le opere citate da Eutocio siano andate perdute tutte ad eccezione di una la quale riesce di assai mediocre ajuto nell'occasione presente; epperò ci troviamo di fronte ad uno dei troppo numerosi problemi la cui soluzione definitiva sarà possibile soltanto il giorno in cui verrà strappato il velo che nasconde ai nostri occhi la logistica degli antichi Greci. Riserbandoci di riprendere a miglior tempo (Libro V) questo argomento, noteremo intanto che per risolvere il problema storico dianzi enunciato da tempo furono istituite numerose ricerche molte delle quali di valore indiscutibile (1); ma, se esse devono menzionarsi con onore

(1) Su alcune di tali indagini attrassero l'attenzione dei dotti S. Günther, nel lavoro *Antike Näherungsmethode im Lichte moderner Mathematik* (Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., VI Folge, IX Bd., Prag 1878). H. G. Zeuthen nella nota *Nogle Hypotheser om Archimedes Kuadratrods beregning* (Tidsskrift for Math., 1879, p. 145-155) e J. L. Heiberg nelle citate *Quaest. Arch.*, (p. 60 66). Ma una rassegna completa delle più cospicue fra esse leggesi nella memoria *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und ihre Entwickelungsmethoden von* S. Günther (Abh. zur Gesch. d. Math., IV Heft, Leipzig, 1882). Sullo stesso argomento si consultino gli

Digitized by Google

pel loro pregio intrinseco e per l'ingegno che attestano nei loro autori, tuttavia — come in generale quelle aventi carattere di divinazione (1) — non possono ascriversi fra i contributi alle nostre cognizioni positive sulla scienza greca, tanto più che i risultati a cui esse guidarono non sono fra loro in un perfetto accordo (2).

Ritornando ora all' opuscolo che ci occupa, noteremo che, essendo $\frac{P}{D} < \frac{22}{7}$ ed essendo il cerchio di diametro D espresso da $\frac{1}{4} PD$, si ha subito che il rapporto della superficie di un cerchio qualunque al quadrato del suo diametro è minore, ma approssimativamente eguale a $\frac{11}{14}$: gli è quello che si apprende dalla seconda proposizione di Archimede.

---

scritti posteriori di Heilermann, Weissenborn, Schoenborn e Demme inserti nei vol.i XXVII, XXVIII e XXXI della *Zeitschrift f. Math. u. Phys*, ed ancora: Weissenborn, *Die irrationale Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron* (Berlin, 1883), Hunrath *Ueber das Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern* (Hadersleben 1883), Thiele *Archimedes* $og \sqrt{3}$ (Tidsskrift for Math., 5e Série, T. II, 1884, p. 151-153) e Weissenborn, *Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano* (Berlin, 1894). Un contributo di singolare importanza allo studio degli irrazionali in Archimede recò l' Hultsch coll' articolo già citato che egli inserì nelle *Gött. Nachr.* 1893, ma riserbiamo di occuparcene in altro momento; allora terremo conto anche della memoria dello stesso autore *Zur Kreismessung des Archimedes* di cui la prima parte è inserita nel Vol. 39 (Hist.-lit. Abth. p. 121-237) della *Zeit. f. Math und Phys.*.

(1) Specialmente quando si tratta di operazioni approssimate nel compiere le quali un abile calcolatore abbandona di quando in quando il metodo generale per raggiungere più rapidamente un buon risultato.

(2) Infatti, se gli uni contestano ad Archimede la conoscenza di un procedimento uniforme per calcolare le radici quadrate, altri arrivano ad attribuirgli dei procedimenti che equivalgono all'applicazione delle frazioni continue alla estrazione delle radici quadrate; e l'ipotesi non molto riverente che il Siracusano abbia sottintesi i calcoli in discorso perchè erano così poco eleganti da diminuire invece che accrescere il pregio del suo scritto è in aperto contrasto con quella che spiega il suo silenzio coll'avere egli giudicato le lacune da lui lasciate facilmente colmabili dai suoi contemporanei.

Digitized by Google

L'opera testè esaminata fu, dopo il Rinascimento, il bersaglio a cui appuntarono i loro strali i pretesi quadratori del circolo, i quali, trovando le lor conclusioni discordanti da quelle a cui era giunto Archimede, per difenderle si sforzarono di mostrare erronee quelle del Siracusano; questi all' opposto trovò degli strenui difensori in coloro che confutarono quelle quadrature, i quali a ragione notarono che per conseguire il loro scopo nessun mezzo poteva dirsi migliore del far vedere *a priori* errata qualsivoglia proposizione fosse in disaccordo con quelle di cui si compone la *Misura del cerchio.*

44. Nei lavori di cui abbiamo testè compiuta un' analisi sommaria, Archimede ha offerto i primi esempii di determinazioni rigorose di volumi limitati da superficie non tutte piane, di aree piane limitate da linee curve e di aree non piane, ha insegnato a tracciare le tangenti anzi a studiare completamente una notevole curva trascendente ed ha trattato il problema della quadratura del circolo sotto l'unica forma che allora era possibile per renderlo in qualche modo risolvibile (1). Laonde i risultati più cospicui che egli ha ottenuti, quei risultati il cui raggiungimento è senza dubbio il principale scopo di quei lavori, appartengono a quelle che oggi si riguardano per applicazioni del calcolo infinitesimale alla geometria; ed è opportuno ricordare quì in primo luogo che lo studio approfondito di essi guidò Leibniz e Newton alla scoperta dei procedimenti generali moderni e in secondo luogo che dietro l'imponente autorità del Siracusano si rifugiarono i primi geometri che si servirono di questi procedimenti. Ma quei risultati sono raggiunti indipendentemente dal concetto di infinito — dal quale i geometri greci del periodo aureo rifuggivano quasi con superstizioso terrore non essendo loro riuscito di fondare su di esso dei ragionamenti esenti da obbiezioni — col mezzo di un artificio (metodo d'esau-

(1) Si allude qui all'altra formulazione, che solo l'analisi moderna permise, e che guidò il Lindemann alla soluzione definitiva completa del celebre problema.

Digitized by Google

stione), adoperato già da Euclide nel XII Libro degli *Elementi* (v. n. 22), di aspetto variabile, ma di essenza costante, che Archimede — secondo il costume in uso a suoi tempi (1) — non enuncia in generale, ma applica senza dichiararlo in ogni caso particolare. Tale artifizio (cfr. n.i 22, 37 e 39) riposa sulla considerazione di due grandezze variabili, fra cui è sempre compresa la grandezza da misurarsi e tali che la loro differenza si può rendere più piccola di qualsivoglia grandezza data; coll'aiuto di esso e dell'assioma d'Archimede, si arriva attraverso ad una duplice riduzione all'assurdo a convincere che la grandezza da misurare non potrebbe essere maggiore nè minore di una certa grandezza determinata appunto dal teorema da dimostrarsi; che in conseguenza queste due grandezze siano fra loro eguali si deduce ammettendo che siano omogenee. Nei ragionamenti di tal fatta quello che muta da caso a caso è la scelta delle grandezze ausiliarie, nella quale appunto si rivela l'abilità del geometra, come nella scelta delle variabili d'integrazione si dimostra quella dell'analista (e si noti che questo non è un semplice paragone, ma invece la constatazione di un'affinità profonda fra i metodi antichi ed i moderni). E per dirigere tale scelta a quale varietà di espedienti dovette ricorrere Archimede! Quanto profondamente egli dovette studiare le proprietà delle figure da lui considerate! Gli è per questa ragione che le opere di questo celebre geometra, oltre le conclusioni a cui sopra alludemmo, contengono gran numero di indagini ausiliarie degne della più elevata considerazione; a dimostrarlo basti citare il primo studio metodico a noi noto delle quàdriche di rivoluzione (2).

---

(1) « Ce qui manque aux mathématiques grecques ce sont moins les mèthodes (les grands géomètres en possedaient assez pour l'ordre de travaux qu'il poursuivaient) que des formules propres à l'exposition des méthodes ». P. Tannery, *Bull. d. Sc. math.*, 1885.

(2) Rileviamo anzi che molte proposizioni di Archimede nonchè le loro dimostrazioni sono indipendenti dall'ipotesi che la quàdrica sia rotonda.

Digitized by Google

La considerazione simultanea delle figure inscritte e circoscritte guida di regola con estrema difficoltà alla scoperta del limite comune a cui esse tendono non appena si abbandonino i problemi più elementari, le figure di più facile costruzione; ciò indusse la maggioranza degli scienziati moderni (1) a supporre che i procedimenti di dimostrazione impiegati da Archimede fossero differenti da quelli che gli servirono alla scoperta delle verità da lui esposte; ipotesi questa che si direbbe confermata da parecchii passi delle lettere che preludono ai suoi lavori, nei quali sembra che il nostro geometra schiettamente distingua l'atto di scoprire dall'atto di dimostrare le verità geometriche. Spogliato così il modo di procedere archimedeo del carattere di metodo di ricerca, si è stimolati a ricostruire le analisi relative alle di lui splendide sintesi; un pregevole tentativo in questo senso venne fatto da uno dei più profondi conoscitori dell'antica geometria (2), ma il determinare in quale proporzione esso accresca quanto sappiamo sulla scienza grera è un problema che sfugge ai nostri metodi di misura. D' altronde, siccome è comune a tutti il desiderio di formarsi un concetto, almeno approssimativo, del modo in cui la mente umana procede alla scoperta del vero, così crediamo dar quì un posto alla geniale congettura (3) secondo cui Archimede (nonchè in generale gli antichi geometri) avrebbe usato quali ausiliarii per l' indagine delle proprietà dello spazio l' applicazione dell' aritmetica alla geometria (4) e di questa a quella, nonchè in genere le matematiche applicate e specialmente la meccanica,

(1) Fra questi sembra non potersi ascrivere il Carnot: si veggano le sue *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (2.ª ed., Paris, 1813), p. 134-141.

(2) Il Barrow: si veggano le XXIV-XXVII delle sue *Lectiones mathematicae.*

(3) L. F. Ofterdinger, *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik* (Ulm, 1860), p. 6-7.

(4) Ciò è ammesso anche dal Marie, il quale osserva di più: « De toutes les choses incroyables entre lesquelles, pourtant, il faut bien choisir, en présence du fait, la plus croyable est encore, il me semble, qu' Archimède se servait pour lui-même d' une certaine algèbre et y était très-versé ». *Hist. des sciences math. et phys.*, T. I (Paris, 1883), p. 121.

Digitized by Google

senza sdegnare i soccorsi indiscutibilmente potenti dell'analogia e dell'induzione: una semplice ispezione delle pagine che precedono somministra argomenti assai poderosi a sostegno di questa supposizione.

45. Oltre alle opere archimedee che ci arrivarono pel tramite dei Greci, di due altre serbarono notizia gli Arabi: una è quella di cui già ci occupammo nel n. 37, l'altra è una collezione di eleganti proposizioni di geometria piana di cui nel 1659 S. Foster pubblicò per le stampe (1) una versione latina dovuta ad I. Graves sotto il titolo di *Lemmata Archimedis,* e che per la seconda volta venne fatta conoscere (2) poco dopo da G. A. Borelli sotto il titolo di *Liber assumptorum;* in seguito venne accolta in tutte le più reputate edizioni degli scritti archimedei (3). Ciò non ostante essa non può considerarsi per un lavoro redatto da Archimede stesso; chè altrimenti, come spiegare che negli enunciati delle prop. IV e XIV si possa parlare di lui in terza persona e che in alcuni ragionamenti si trovino delle non lievi inesattezze? Le ragioni per le quali si propende a considerare quel lavoro come una collezione di teoremi radunati da qualche geometra posteriore nel leggere alcune memorie del Siracusano verranno indicate dopo i loro enunciati che ora riferiremo:

I. Se due circoli si toccano, gli estremi di due loro raggi paralleli sono allineati col punto di contatto (4). II. È dato un semicerchio, la tangente in un estremo del relativo diametro ed un'altra tangente qualunque; la retta che unisce l'altro estremo del diametro alla intersezione delle due tangenti, biseca la perpendicolare abbassata sul diametro dal punto di contatto della seconda tangente. III. Dato (fig. 4ª) un segmento circolare qualunque ABC ed un punto qualunque B dell'arco relativo; si conduce BD perpendicolare ad AC, si porta sulla corda $DE = AD$ e sull'arco $BF = AB$: condotta la retta CF, sarà

(1) *Miscellanea* (London, 1659).

(2) *Apolloniis Pergaei Conica* V-VII *et Archimedis Assumptorum liber* (Florentiae, 1661).

(3) Cfr. anche A. M. Sédillot, *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, T. I (Paris, 1845), p. 401-6.

(4) Il teorema vien dimostrato da Archimede nell'ipotesi che il contatto sia interno; il caso del contatto esterno fu considerato da Pappo (ed. Hultsch, p. 840).

Digitized by Google

$CF = CE$. IV. Dato (fig. 5ª) un semicerchio ABC ed un punto D del diametro si descrivono nell'interno di esso due semicircoli aventi per diametri AD e CD. La figura (ἀρβηλος) (1) limitata dalle tre semicirconferenze è eguale al cerchio avente per diametro la retta DB perpendicolare ad AC. V. Nella stessa figura, i circoli inscritti nei due triangoli mistilinei i cui l'*arbelo* è diviso dalla retta DB sono eguali (2). VI. Nella stessa figura, dato il rapporto $AD : DC = \lambda$, trovare il rapporto al diametro AC del raggio del cerchio tangente ai tre semicerchi dianzi descritti; se p. es. $\lambda = \frac{3}{2}$ il rapporto cercato vale $\frac{6}{19}$ (3). VII. Il quadrato circoscritto ad un cerchio è doppio del quadrato inscritto in questo. VIII. Se si prolunga una corda qualunque AB di un cerchio di un segmento BF eguale al raggio e si unisce al centro C l'estremo del prolungamento, si avranno in totale due secanti FBA, FDE che intercettano sulla circonferenza data due archi non adiacenti AE, BD di cui uno è il triplo dell'altro (4). IX. Due corde di un cerchio fra loro perpendicolari dividono la periferia di questo in quattro archi tali che la somma di due opposti è eguale alla somma degli altri due. X. Date (fig. 6ª) due tangenti DA e DC di un cerchio ed una secante DB entro l'angolo da esse formate; per il punto di contatto C di una di esse si conduce la corda CE parallela alla secante e se ne unisce l'estremo E al punto di contatto A dell'altra tangente. Le rette AE e BD si tagliano in un punto F; se da questo si conduce FG perpendicolare a CE, il punto G bisecherà questa corda. XI. Due corde di un cerchio fra loro perpendicolari si

(1) Questa figura (il cui nome deriva dalla sua rassomiglianza con un trincetto da calzolaio) è considerata anche da Pappo (ed Hultsch, p. 228-224), il quale però non parla di Archimede, probabilmente perchè non ebbe da invocare alcuno dei lemmi IV-VI.

(2) Infatti è facile vedere che il raggio di ciascuno è espresso da $\frac{AC \cdot DC}{AD + CD}$.

(3) Archimede si limita a dimostrare questo risultato speciale, asserendo che similmente procederebbesi in ogni altro caso. In generale in rapporto richiesto è espresso da $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$.

(4) Quindi, se si vuole dividere in tre parti eguali un arco AE, basta condurre per A una retta tale che la porzione di essa compresa fra il diametro EDF prolungato e la circonferenza a cui appartiene l'arco sia eguale al raggio. Il problema della trisezione dell'angolo è così ridotto ad un problema di inserzione che forse (cfr. n. 41) Archimede intendeva si risolvesse meccanicamente. Che lo scopo del lemma VIII sia appunto di ridurre l'uno all'altro i problemi citati è detto esplicitamente da Newton (v. *Arithmétique universelle, trad. Beaudeux* Paris, an. X, 1802, T. II, p. 55, 56 e 82) ed è implicitamente confermato dall'uso che ne fecero i commentatori Arabi.

Digitized by Google

tagliano scambievolmente in quattro parti i cui quadrati dànno per somma il quadrato del diametro. XII. Date una semicirconferenza e le tangenti in due suoi punti qualunque, il punto a queste comune e l'intersezione delle rette che uniscono i punti di contatto agli estremi del diametro, stanno su una retta perpendicolare a questo (1). XIII. Se dagli estremi di un diametro si conducono le perpendicolari ad una corda, i loro estremi saranno equidistanti dal punto medio della corda. XIV. Dati (fig. 7ª) un semicerchio ABC e due punti E, G del diametro AC equidistanti dal centro O, si descrivano i due semicerchii di diametri AE, GC interni al dato e il semicerchio di diametro EG esterno; la figura [che Archimede chiama σαλίνον (2)] limitata dalle quattro semicirconferenze è eguale al cerchio avente per diametro la retta BH perpendicolare ad AC in O. XV. Se AC (fig. 8ª) è il lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio di diametro AB e D è il punto medio dell'arco AC, il prolungamento della retta CD taglierà il diametro in un punto E che dista di una lunghezza eguale al raggio dal piede G della perpendicolare condotta ad AB dal punto F comune alle rette AC e BD.

Un semplice esame di queste proposizioni mostra che esse trattano tutte di cerchii, molte di rette a questi tangenti, alcune di circoli fra loro tangenti; si può quindi supporle estratte dagli scritti *Sui cerchii tangenti* e *Sull'ettagono nel circolo,* ora perduti, che gli Arabi attribuiscono ad Archimede (3). Inoltre le quadrature dell'*arbelo* e del *salinon* (figure di cui è palese l'analogia con le lunule d'Ippocrate) sono semplici applicazioni del primo dei teoremi insegnati nella *Misura del circolo;* e l'espressione di ricercata eleganza con cui sono enunciate richiama alla mente le doti analoghe che rilevammo in scritture indiscutibilmente archimedee (v. n. 38). Finalmente la proposizione VIII — alla quale, come dicemmo in nota, sarebbe difficile assegnare uno scopo diverso da quello di trisecare un angolo — viene a

(1) Come ognun vede, assoggettando questo lemma ad una trasformazione projettiva si ottiene il seguente notissimo teorema: *Dato un quadrangolo semplice inscritto in una conica, le tangenti in due vertici adiacenti e le tangenti negli altri due s'intersecano in due punti allineati col punto d'incontro delle diagonali.*

(2) Grafia ed etimologia di questo vocabolo sono incerte; così Barrow preferisce scrivere σαλίνιον, Cantor (*Vorlesungen* I, 284) fa derivare il detto nome da σάλος (ondeggiare dell'alto mare), mentre l'Heiberg (*Archimedis Opera* II, 443) lo deduce da σέλινον (edera) colla cui foglia egli ravvisa nel *salinon* una certa rassomiglianza.

(3) Cfr. Heiberg, *Quaest. Arch.*, p. 29.

Digitized by Google

confermare le osservazioni anteriormente fatte (v. n. 41) intorno all'uso delle inserzioni meccaniche per risolvere i problemi geometrici. Per tutte queste ragioni noi ascriviamo ad Archimede la totalità dei *Lemmi* che portano il suo nome, senza però escludere la possibilità che fra essi se ne trovino taluni derivati da altra fonte.

46. Di un' ultima importante classe d' indagini compiute da Archimede serbò notizia Pappo nella seconda parte del V Libro della *Collezione matematica* (1). Ivi, per dimostrare che la sfera è il corpo che, a parità di superficie, racchiude il volume massimo, il commentatore citato la paragona ad altre figure in essa inscritte e sceglie, oltre i cinque poliedri regolari, altri solidi dotati di una parziale regolarità, cioè limitati da facce equilatere ed equiangole ma non tutte simili; tali solidi, egli aggiunge, sono in numero di tredici e furono scoperti da Archimede. Per descriverne la struttura, Pappo indica per ciascuno dei poliedri archimedei (che indicheremo per brevità con le lettere P_1,..., P_{13}) il numero delle facce di ogni specie che lo limitano; se si conviene d'indicare con P_k $(a_\alpha, b_\beta, \ldots)$ che il k^{mo} poliedro archimedeo ha per facce α a-goni regolari, β b-goni regolari, ecc., i suoi dati si possono riassumere come segue: P_1 $(4_3, 4_6)$, P_2 $(8_3, 6_4)$, P_3 $(6_4, 8_6)$, P_4 $(8_3, 6_8)$, P_5 $(8_3, 18_4)$, P_6 $(12_4, 8_6, 6_8)$, P_7 $(20_3, 12_5)$, P_8 $(12_5, 20_6)$, P_9 $(20_3, 12_{10})$, P_{10} $(32_3, 6_4)$, P_{11} $(20_3, 30_4, 12_5)$, P_{12} $(30_4, 20_6, 12_{10})$, P_{13} $(80_3, 12_5)$. Perciò P_1 ha 8 facce (donde il nome di *ὀκτάεδρον* con cui lo designa Pappo); P_2, P_3 e P_4 ne hanno 14 (*τεσσαραικαιδεκάεδρα*); P_5 e P_6 26 (*ἑξκαιεικοσάεδρα*); P_7, P_8 e P_9 32 (*δυοκαιτριακοντάεδρα*); P_{10} 38 (*ὀκτωκαιτριακοντάεδρον*); P_{11} e P_{12} 62 (*δυοκαιεξηκοντάεδρα*); finalmente P_{13} 92 (*δυοκαιεννηκοντάεδρον*). Il numero degli spigoli è espresso, come osserva Pappo, dalla semisomma del numero dei lati di tutte le facce — cioè da $\frac{1}{2}(a\alpha + \beta b + \ldots)$ —

(1) Ed. Hultsch, p. 350-358.

Digitized by Google

onde è ordinatamente 18, 24, 36, 36, 48, 72, 60, 90, 90, 60, 120, 180 e 150; invece il numero dei vertici è quella stessa somma divisa per 3, per 4 o per 5 secondo che gli angoli del poliedro sono tutti triedri, tetraedri o pentaedri, onde è ordinatamente 12_3, 12_4, 24_3, 24_3, 24_4, 48_3, 30_4, 60_3, 60_3, 24_5, 60_4, 120_3 e 60_5, ove gli indici indicando il numero delle facce di ciascun angolo solido.

Il commentatore citato si limita a descrivere i poliedri di Archimede, nel modo testè riassunto (1), senza dire nè lo scopo per cui quel grande istituì le ricerche in discorso, nè i mezzi di cui si servì per compierle; ora, quanto al fine, non è improbabile che Archimede si proponesse di sviluppare ulteriormente la teoria dei poliedri aggiungendo dei nuovi solidi interessanti a quelli tanto ammirati dai discepoli di Pitagora e di Platone; e quanto ai mezzi, fu supposto (2) avere Archimede conosciuta quella celebre relazione fra i numeri dei vertici, delle facce e degli spigoli che porta ingiustamente il nome di Eulero (3), ipotesi questa che può confortarsi con l'osservazione che, basandosi su quella formola, è possibile dimostrare direttamente l'esistenza dei tredici solidi di Archimede (4). Ma ad un geometra (e specialmente ad un geometra dell'antichità) non può bastare l'avere dimostrata la possibilità

---

(1) Le figure di essi furono disegnate da Keplero nel II Libro dell'*Harmonices mundi* (v. *J. Kepleri Astronomi Opera Omnia ed. Frisch*, Francforti et Erlangae, 1864, T. V. p. 123-126); ivi anche si trova una completa nomenclatura dei solidi archimedei.

(2) Günther, *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der math. Wissenschaften* (Leipzig, 1876), p. 53.

(3) Ci esprimiamo così perchè — come rilevarono il Baltzer (*Berliner Monatsberichte*, 1861) e il De Jonquières (*Comptes rendus*, 1890) — essa fu scoperta assai prima da Descartes (il lavoro di questo fu studiato a fondo dal De Jonquières stesso nella *Bibl. math.* 1890, p. 43-55, ed in più esteso lavoro pubblicato, pure nel 1890, dall'Istituto di Francia), il quale di più ha considerati e studiati tutti i poliedri archimedei esclusi P_{10} e P_{13}.

(4) Baltzer, *Stereometria*, *trad.* Cremona (II ed., Genova, 1877), p. 121-125.

Digitized by Google

di una figura geometrica, egli è tenuto ad insegnarne la costruzione; ha fatto ciò Archimede pei poliedri che recano il suo nome? Sopra tale questione Pappo serba un completo silenzio; invece un di lui antico anonimo scoliasta (1) riferisce un procedimento uniforme per costruire i primi cinque poliedri archimedei che, a nostro avviso, egli apprese nell' opera *Sui poliedri* che ad Archimede si attribuisce. Per dichiarare in che consista, indichiamo con le lettere *T, E, O, D, I,* i cinque poliedri regolari nell' ordine seguente: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro; inoltre chiamiamo *inscritto* un poligono regolare di $2n$ lati in uno di n, quando n lati del primo sono stesi su altrettanti del secondo, mentre i rimanenti si trovano rimpetto ad altrettanti vertici di questo. Allora: P_1 *nasce da T inscrivendo un esagono in ogni sua faccia e conducendo un piano per ciascuna terna di punti così ottenuti adiacente a un vertice di T;* P_2 *nasce da E, bisecandone gli spigoli e congiungendo, come nel caso precedente, con piani i punti ottenuti;* P_3 *nasce da O inscrivendo nelle sue facce degli esagoni e conducendo dei piani nel modo anzidetto;* P_4 *nasce da E inscrivendo nelle facce degli ottagoni; finalmente* P_5 *nasce da* P_2 *bisecandone gli spigoli.* La verità di queste proposizioni si constata senza dificoltà effettuando le operazioni indicate e si giunge così nel modo più ovvio ad immaginare la forma dei primi cinque solidi di Archimede; ora ognun vede che queste operazioni non sono che il prodotto dell' applicazione costante di quel metodo di derivazione dei cristalli che ai geometri venne nel 1509 insegnato da Luca Paciuolo (2) (1445-1514 circa) ed ai mineralisti venne suggerito da Romé de 'l' Isle (1736-1790) il quale v' impose il nome di *troncatura* (3). È notevole che quello stesso metodo è capace di condurre a tutti i

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p, 1241; cfr. p. 1170.

(2) Veggasi la *Divina Proportione* di questo celebre matematico.

(3) Si consulti l' *Essai de cristallographie* (Paris, 1772) e più completamente la *Cristallographie ou description des formes propres à tous les corps du règne mineral* (Paris, 1783).

Digitized by Google

poliedri di Archimede uno solo escluso (quello che chiamammo P_{10}) (1): infatti al lettore non sarà difficile verificare che *P_6 deriva da P_2 inscrivendo degli ottagoni nelle sue facce quadrate; P_7 bisecando gli spigoli di D o di I; P_8 da I inscrivendo degli esagoni nelle facce di I; P_9 da D inscrivendo in ogni sua faccia un decagono; finalmente da P_7 si possono dedurre P_{11} e P_{12}, mentre P_{13} si ottiene bisecando gli spigoli di P_{10}*. E noi non esitiamo ad attribuire ad Archimede anche la conoscenza di queste proposizioni, nonchè la nozione della feconda legge di derivazione dei cristalli che dianzi abbiamo ricordata, legge che egli forse, seguendo il suo costume (cfr. n. 44), avrà costantemente applicata, senza mai enunciarla in generale (2).

47. Per completare il quadro delle produzioni geometriche di Archimede, fa d'uopo accennare brevemente a quelle che gli vennero attribuite — oltre alle due *Sui circoli tangenti* e *Sull'ettagono nel circolo* (3) che ricordammo nel n. 45 — o di cui conservaronsi i soli titoli. Fra le prime spicca un'esposizione delle proprietà delle coniche, dalla quale si volle Apollonio Pergeo attingesse a così larga mano da meritare in conseguenza il nome di plagiario (4); ora, benchè le vaste nozioni che Ar-

---

(1) Il Romé de l'Isle nella maggiore delle sue opere dianzi citate ottiene col mezzo della troncatura i primi poliedri di cui ci stiamo occupando (v. tav. I, fig. 2, 18, 19, Tav. II, 5, 11, 6), di cui soltanto P_1, P_4, P_6 s'incontrano in natura; gli altri poliedri (eccetto P_{10}) è vano cercare nelle opere di cristallografia perchè, come si sa, nessun minerale conosciuto cristallizza in una forma avente la stessa simmetria del dodecaedro e dell'icosaedro regolari.

(2) Altre costruzioni dei poliedri P_1, P_3, P_4, P_8, P_9 furono indicate da Abû'l-Wafâ; — v. Woepcke, *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux* (Journal Asiatique, T. V della V Serie, 1853, p. 242, 356 e seg).

(3) Non è improbabile che ivi venisse insegnata la costruzione approssimata dell'ettagono che Abû'l-Wafâ espose in un lavoro dal Woepcke pubblicato nelle citate *Recherches* (v. spec., p. 329) e che — forse pel tramite degli Arabi — venne a conoscenza di Leonardo da Vinci che la registrò ne' suoi manoscritti (cfr. Cantor, *Vorlesungen* II, p. 273).

(4) Si vegga il principio della prefazione al Commento fatto da Eutocio alle *Coniche* di Apollonio (*Apollonii Pergaei quae grece extant cum commentariis antiquis*, ed. Heiberg, Vol. II, Lipsiae, 1893, p. 168).

Digitized by Google

chimede aveva sulle curve anzidette (1) possano essere citate a comprovare l'esistenza di quell'opera, pure nessuna attestazione è capace di togliere ad essa il carattere ipotetico che possiede. Altrettanto può ripetersi riguardo ad uno scritto *Sui triangoli rettangoli* e ad uno *Sui Dati* di cui gli Arabi fecero autore il Siracusano: al primo potrebbe riferirsi una citazione che si legge nella dimostrazione del V de' *Lemmi,* mentre una che s'incontra in quella del XII parrebbe riferirsi ad un lavoro *Sulle figure quadrilatere.* — Ad Archimede viene anche fatta risalire l'invenzione d'un giuoco geometrico su cui non val la pena di arrestarsi (2), mentre una lettera, di cui un tempo egli fu ritenuto autore (3), venne poi dimostrata falsa (4); delle di lui vaste cognizioni aritmetiche e delle sue produzioni meccaniche verrà fatto cenno in luogo più opportuno, sicchè di lui dovremo ancor occuparci più di una volta (5); però dal sin quì detto ri-

---

(1) Così Archimede applica le proposizioni che nelle *Coniche* di Apollonio portano i numeri I, 20, 35, 46; II, 5; III, 17, 18. Per maggiori particolari rimandiamo all'interessante articolo dell'Heiberg intitolato *Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte* (Zeit. f. Math. u. Phys., T. XXV, 1880, Hist.-lit. Abth., p. 41-67), dal quale si desume fra l'altro che Archimede conosceva la definizione delle coniche a centro mediante l'equazione $\frac{y^2}{xx_1} = \text{cost.}$ con la condizione $x + x_1 = \text{cost.}$, nonchè l'analoga definizione della parabola $\frac{y^2}{x} = \text{cost.}$, inoltre la teoria dei diametri conjugati e le relative equazioni cartesiane, finalmente il teorema (ingiustamente attribuito a Newton): « se M_1M_2 e N_1N_2 sono due corde di una conica aventi date direzioni e segantisi in un punto P, il rapporto $\frac{PM_1 \cdot PM_2}{PN_1 \cdot PN_2}$ è indipendente dalla posizione di P ». V. anche Heiberg, *Litt. Studien über Euklid*, p. 86-88, Zeuthen, op. cit., Cap. II, VI, XVII e XIX.

(2) Mazzuchelli, op. cit., p. 28-30, Cantor, *Vorlesungen*, T. I, p. 255.

(3) Venne pubblicata dall'Henning a Darmstadt nel 1872.

(4) Cfr. M. Curtze in *Zeit. f. Math. und Phys*, T. XX, *Hist.-lit. Abth.* p. 89 e seg., e Heiberg in *Quaest. Arch.* p. 27.

(5) Aggiungiamo quì che il Cod. Basil. F. II, 33 contiene sotto il titolo *Archimedis De curvis superficiebus* alcune proposizioni estratte dal I Libro *Su la sfera ed il cilindro* e dalla *Misura del cerchio* che sembrano tradotte dall'Arabo in La-

Digitized by Google

sulta già che egli non si è limitato a coltivare ed estendere dei campi d'indagine già dissodati da altri, ma scoprì delle intere contrade ubertosissime, ove innumerevoli generazioni di scienziati trovarono il loro alimento intellettuale senza ancora esaurirle; con piena ragione adunque il Wallis disse Archimede *vir stupendae sagacitatis, qui pria fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur!*

IV.

Eratostene.

48. Fra coloro coi quali è fama Archimede avesse dimestichezza durante il suo soggiorno in Alessandria (v. n. 32), il più rinomato è colui che ci tramandò notizia delle origini favolose del problema di Delo (v. L. I, n. 42); di lui vogliamo occuparci con quella diffusione che da un lato egli merita in grazia de' suoi lavori matematici e che d'altro lato ci è consentita dalle notizie sicure da noi possedute intorno alla sua vita ed ai suoi scritti (1).

Nacque Eratostene a Cirene nel 276 o nel 275 a. C. ed ebbe a maestri in patria il grammatico Lisania, in Alessandria Callimaco, che in quel tempo era a capo della celebre Biblioteca, e in Atene altri a cui egli si volse per famigliarizzarsi con

---

tino; quel manoscritto non ci apprende dunque nulla di essenzialmente nuovo; ad ogni modo, per chi desiderasse conoscere gli enunciati delle proposizioni in esso contenute, avvertiamo che l'Heiberg li inserì nella sua edizione di Archimede (T. III, p. LXXXVII-LXXXVIII).

(1) I frammenti delle opere di Eratostene ancora esistenti furono raccolti da G. Bernhardy e pubblicati col titolo di *Eratosthenica* (Berolini, 1822); opera sulla quale R. Stiehle fece una serie di osservazioni, correzioni ed aggiunte nell'articolo *Zu den Fragmenten des Eratosthenes* (Philologus, II Supplementband, 1861, p. 453-492); nessuna di queste però si riferisce alle produzioni matematiche o alle notizie biografiche.

Digitized by Google

le dottrine di Platone. Da Tolomeo Evergete (il cui regno si stende dal 246 al 221 a. C.) venne, intorno il 235 a. C., prescelto per succedere a Callimaco nell'ufficio di bibliotecario, ed in Egitto passò il rimanente della sua vita, la quale finì, verso il 194 a. C., quando egli si lasciò morire di fame a quanto narrasi per la disperazione di avere perduta la vista (1). Ebbe Eratostene ingegno eccezionalmente versatile (2), sicchè si sarebbe tentati ad equipararlo a quegli scienziati enciclopedici del periodo precedente a quello che stiamo studiando, il prototipo dei quali è per noi Eudosso da Cnido. Egli infatti fu filosofo (e viene annoverato fra gli stoici), oratore, poeta, archeologo, geografo (3) e matematico non spregievole; ma il soprannome di *filologo,* che di preferenza gli viene attribuito, sembra indicare che egli specialmente come grammatico venisse reputato eccellente; tuttavia anche delle occupazioni sue come cultore delle scienze abbiamo attestazioni sicure nel tentativo fatto da lui per misurare la terra (4), nella parte che prese alla riforma del calendario (5), negli studii che gli fecero conseguire una posizione eminente

---

(1) Cfr. Bernhardy, l. c., p. VII e seg., nonchè le autorità ivi citate; inoltre Parthey, *Das alexandrinische Museum* (Berlin, 1843), p. 190-193.

(2) Eratostene venne talvolta sopranominato πένταθλος per essere riuscito vincitore in tutte le cinque gare (la lotta, il salto, il gitto del disco o dell'asta ed il pugilato) che fino all'Ol. 18.ª formarono un ciclo dei celebri giuochi olimpici. Quanto al significato della lettera β unita talora al suo nome, esso non è noto con certezza; vuole lo Schiaparelli (*Mem. del R. Ist. Lombardo, Classe di Scienze matem. e naturali*, Vol. X, p. 10 nota) che significasse essere Eratostene secondo in tutte le discipline, primo in nessuna; opinione questa accettata dallo Zeuthen (*Forelaesning*, p. 23).

(3) Cfr. H. Berger, *Die geographische Fragmente des Eratosthenes* (Leipzig, 1880).

(4) Rosenberg, *Geschichte der Physik*, T. I (Braunschweig, 1882), p. 39. Notisi che l'eccezionale importanza dei lavori geodetici del Cirenaico fu implicitamente riconosciuta da W. Snellius quando intitolò *Eratosthenes Batavus* (1617) l'opera che gli meritò di venire considerato come il fondatore della moderna geodesia di precisione.

(5) Cfr. Curtius, *Storia Greca*, T. I (1877), p. 147 e 201.

Digitized by Google

nella storia della metrologia (1); l'esame di queste produzioni è riserbato ai cultori della geografia matematica e della cronologia, per converso spetta a noi di esaminare le tre uniche produzioni matematiche che non caddero in completa dimenticanza.

49. Della prima dà notizia Eratostene stesso nella continuazione dell'epistola al terzo Tolomeo di cui nel Libro prec. (n. 42) riferimmo l'esordio (2). Mentre questo è consacrato all'esposizione del primo movente alla ricerca della duplicazione del cubo e dei primi metodi con cui essa venne risolta, il proseguimento contiene — dopo un breve cenno delle molteplici occasioni in cui anche in pratica è necessario di sapere trovare due medie proporzionali fra due rette date e l'osservazione che la soluzione che ora esporremo si può adattare all'inserzione di quantesivogliano medie — il seguente modo di risolvimento:

Siano date (fig. 9ª) due rette diseguali AE e ΘΔ fra cui bisogna inserire due medie in proporzione continua. Sia AE perpendicolare a EΘ e su EΘ si costruiscano tre parallelogrammi eguali AZ, ΛH, IΘ dei quali si traccino le diagonali AZ, ΛH IΘ. Queste saranno fra loro parallele. Tenendo fermo il parallelogrammo intermedio, si accostino ad esso gli altri due, ponendo AZ al disopra e IΘ al disotto come è indicato dalla seconda figura (fig. 10ª), per modo che i punti A, B, Γ, Δ si dispongano in linea retta. Per questi punti A, B, Γ, Δ si conduca una retta la quale incontri in K la EΘ prolungata. Essendo parallele le rette AE e BZ si avrà

$$AK : KB = EK : KZ,$$

ed essendolo AZ e BH si avrà

$$AK : KB = ZK : KH;$$

perciò

$$AK : KB = EK : KZ = ZK : KH.$$

---

(1) Hultsch, *Griechische und römische Metrologie* (II Bearbeitung, Berlin, 1882), p. 60 e seg.

(2) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 106-115. Cfr. anche Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione* (Gottingae, 1798), p. 131-159; Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (II ed. Paris, 1831), p. 229 e 287-89.

Digitized by Google

Similmente, essendo parallele BZ e HΓ sarà

$$BK : K\Gamma = ZK : KH,$$

ed essendolo BH e ΓΘ sarà

$$BK : K\Gamma = HK : K\Theta;$$

perciò

$$BK : K\Gamma = ZK : KH = HK : K\Theta.$$

Ma

$$ZK : KH = EK : KZ$$

dunque è anche

$$EK : KZ = ZK : KH = HK : K\Theta.$$

Finalmente è

$$EK : KZ = AE : BZ,\ ZK : KH = BZ : \Gamma H,\ HK : K\Theta = \Gamma H : \Delta\Theta;$$

sarà in conseguenza

$$AE : BZ = BZ : \Gamma H = \Gamma H : \Delta\Theta,$$

epperò fra AE e ΔΘ si sono trovate due medie proporzionali BZ e ΓH.

Questa costruzione si può eseguire in modo assai agevole praticamente coll'ajuto di uno strumento — da Pappo (1) chiamato *mesolabio* — (2), composto di tre tavolette rettangolari fra loro eguali, che Eratostene descrive accuratamente, ma su cui noi crediamo superfluo arrestarci perchè siamo sicuri che il lettore se lo figurerà senza stento. Tale strumento sembra fosse conservato presso un altare, su una facciata del quale era scolpita la dimostrazione precedente sotto forma più concisa e accompagnata da un grazioso epigramma (3) narrante le vicende più cospicue del problema in questione.

50. Assai più scarse ed incerte sono le nostre nozioni su uno scritto geometrico di maggior lena *Sulle proporzioni* che avrebbe

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 54-6.

(2) Ammesso apocrifo l'apparato attribuito a Platone (v. L. I, n. 62) sarebbe questo il più antico strumento geometrico conosciuto.

(3) Ricordato anche da Proclo (*Proclo-Taylor* I, p. 134).

Digitized by Google

composto — a quanto riferisce Pappo (1) — il matematico di cui stiamo occupandoci. Questo lavoro aveva attinenza col metodo analitico e portava il titolo Περὶ μεσοτήτων; ma lo scopo ed il contenuto di esso non vennero dichiarati da Pappo nè da alcun altro antico scrittore (2). Di colmare la lacuna che in conseguenza presenta la storia della matematica greca, si sforzarono parecchi ricercatori di cui non è inopportuno far qui rapidissimo cenno: primo in ordine di tempo è il Montucla (3), il quale suggerì due teoremi come ingredienti dell'opera perduta; viene poi il Tannery (4), secondo cui i luoghi studiati da Eratostene sarebbero le linee (rette e coniche) rappresentate in coordinate trilineari dalle equazioni

$$2x_2 = x_1 + x_3\,,\; x_2^2 = x_1 x_3\,,\; x_2(x_1 + x_3) = 2x_1 x_3\,,\; x_1(x_1 - x_2) = x_3(x_2 - x_3)\,,$$
$$x_1(x_1 - x_2) = x_2(x_2 - x_3);$$

il Marie (5) invece si limita a congetturare che quei luoghi fossero strettamente collegati alla risoluzione del problema di Delo; mentre finalmente lo Zeuthen (6) formulò l'ipotesi, che i luoghi di Eratostene venissero generati conducendo delle trasversali da un polo fisso del piano di una conica e determinando su ogni trasversale il punto formante con il polo e le intersezioni con la curva una delle proporzioni conosciute dagli antichi, e

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 636, 652 e 662.

(2) A questo libro si riferiscono forse Proclo (v. *Proclo-Taylor* II, p. 80) nel combattere l'opinione di Eratostene che l'idea di proposizione abbraccia tutta la matematica, e Teone Smirneo (v. ed. Dupuis, Paris 1892, p. 182) nel riferire le opinioni del poligrafo da Cirene secondo cui tutte le figure risultano da qualche proporzione, e per costruirle bisogna partire dall'eguaglianza perchè in eguaglianze esse si risolvono.

(3) *Hist. des Math.*, T. I, 2e éd. p. 280.

(4) *L'arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Série, T. III, 1880), p. 361.

(5) *Histoire des Sciences math. et phys.*, T. I (Paris, 1883), p. 80.

(6) Op. cit., p. 321 e seg.

Digitized by Google

giunse persino ad attribuire all'erudito di Cirene un procedimento per trovare in una conica una corda di data lunghezza passante per un punto dato. Quanto tali congetture hanno di vero? a quale deve accordarsi la preferenza?

> These are the questions nobody can answer,
> These are the problems nobody can solve.

51. Dopo che Euclide ebbe dimostrato (Elem. VIII, prop. 20ª cfr. n. 17) essere illimitata la serie dei numeri primi, due questioni spontaneamente si presentano, cioè: la ricerca di un metodo per discernere i numeri primi dai numeri composti e, forse come corollario di tal metodo, l'espressione generale dei numeri primi. Orbene, della prima di tali questioni Eratostene diede una soluzione nell'unico frammento superstite di una sua opera aritmetica, frammento di cui ci occupiamo in questo momento perchè il metodo suggerito dal Cirenaico per costruire una tavola di numeri primi (il così detto *κόσκινον* o *cribrum Eratosthenis*) porge un necessario complemento alle ricerche aritmetiche di Euclide. Per esporre in che consiste questo procedimento (1) osserviamo che, eccetto 2, tutti i numeri pari sono composti, sicchè, oltre 2, tutti i numeri primi si trovano nella serie dei numeri dispari

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,....

Ciò posto, 3 è un numero primo, ma non lo sono tutti i suoi multipli, i quali occupano in questa serie i posti della forma $3r+1$ ($r=1,2,...$); cancelliamoli dalla serie; similmente 5 è primo, ma non lo sono i suoi multipli, cioè i termini di quella

(1) Riferito da Nicomaco (*Arith.*, L. I, c. 13) e dal Bernhardy (*op. cit.*, p. 174). Cfr. anche l'articolo di Horseley intitolato ΚΟΣΚΙΝΟΝ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΟΥΣ *or the Sieve of Eratosthenes* (*Phil. Trans.*, 1772; p. 314 del Vol. XIII della ristampa di questa collezione fatta nel 1809).

Digitized by Google

serie che occupano i posti della forma $5r + 2$ ($r = 1, 2, \ldots$), onde questi vanno soppressi; similmente si cancelleranno quelli occupanti posti dalla forma $7r + 3$ ($r = 1, 2, \ldots$); invece 9 è numero composto onde esso ed i suoi multipli furono già tolti; ma lo stesso non può ripetersi riguardo a 11, perciò dalla serie in questione dovranno venire eliminati i termini di posti $11r + 5$; e così via. Si trova così facilmente che fra 1 e 100 non vi sono altri numeri primi tranne i 25 seguenti:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Per quanto sia semplice, direi quasi primitivo, questo procedimento, esso venne continuamente invocato per quasi diciannove secoli quando si ebbe bisogno di decidere se un numero fosse o non primo, cioè sino al momento in cui Schooten pubblicò una grande tavola di numeri primi (1); oggi ancora non è infrequente il servirsene e probabilmente vi si ricorrerà fino al giorno in cui i geometri giungeranno in possesso di una proprietà caratteristica atta a discernere con facilità i numeri composti da quelli che tali non sono.

V.

Apollonio.

52. Due sono le grandi categorie in cui è costume ripartire le verità geometriche; l'una abbraccia quelle proposizioni in cui si stabilisce il confronto fra i contenuti di varietà (li-

(1) *Exercitationum mathematicarum*, Liber V, (Lugd. Bat. 1657, p. 393-403). Questa tavola comprende tutti i numeri primi inferiori a 10000, epperò è sufficiente pei calcoli consueti; una analoga, ma di dimensioni assai più modeste, si trova già nel *Liber Abaci* di Leonardo Pisano (*Scritti inediti di Leonardo Pisano matematico del secolo XIII*, pubblicati da B. Boncompagni, T. I., Roma 1857, p. 31).

Digitized by Google

neari, superficiali o solide) della stessa specie; l'altra i teoremi ed i problemi ove è in giuoco la posizione delle varie parti di una figura o di varie figure. Alla prima si dà il nome di *geometria di misura,* di *geometria di posizione* alla seconda. Benchè questa ripartizione sia propria all'epoca moderna, i due corrispondenti indirizzi dell'investigazione geometrica sono visibili *ab antiquo:* se il primo trova in Archimede il suo più illustre rappresentante, quello in cui è più chiaramente visibile il secondo è Apollonio Pergeo, l'ultima, in ordine di tempo, fra le stelle di prima grandezza del periodo scientifico di cui ci stiamo occupando, quell'investigatore che Leibniz non esitò a porre allo stesso livello di Archimede quando sentenziò: *qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur.*

Intorno alla vita di lui abbiamo informazioni estremamente scarse; Proclo (1) lo fa tacitamente posteriore ad Euclide quando rileva che la conoscenza degli *Elementi* è presupposta nelle sue opere; Eutocio (2), fondandosi su quanto Eraclide (cfr. n.° 32) scrisse nella *Vita d'Archimede,* lo dice oriundo da Perga città della Pamfilia e vissuto al tempo del primo Tolomeo Evergete (246-221 a C.). La sua istruzione si compì in Alessandria sotto la direzione dei successori di Euclide; quali siano state le sue occupazioni posteriori è ignoto con precisione, certo è però che ben presto egli seppe conquistarsi una posizione scientifica tanto eminente che, benchè di poco posteriore ad Archimede (3), anzi sorto forse quando l'astro del Siracusano non aveva ancora cessato di splendere, fu ritenuto degno del nome di *grande geometra* o *geometra per eccellenza.* Di un suo soggiorno in Pergamo (città che era sede di una biblioteca e di un'università simili a quelle

---

(1) Proclo-Taylor I, 104.

(2) *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis,* ed. Heiberg, II Vol. (Lipsiae, 1893), p. 168.

(3) Si può ritenere col Balsam (v. la pref. alla traduzione delle *Coniche* citata nel n. 53) che Apollonio fosse più giovane di Archimede di circa quarant'anni.

Digitized by Google

di Alessandria) ci dà notizia la prefazione generale della massima sua opera (v. n.° 54), indirizzata ad un tale Eudemo che Apollonio appunto in Pergamo conobbe; mentre una sua dimora in Efeso ci viene rivelata dalla prefazione speciale al secondo libro dell'opera stessa. Delle poco pregevoli qualità del carattere del nostro matematico parla Pappo (1) in un brano (di autenticità a dir vero sospetta) della *Collezione matematica,* dal quale risulterebbe che Apollonio fosse stato vano e borioso. Notisi da ultimo che sotto il regno di Tolomeo Filopatore (221-204 a. C.) fiorì un astronomo designato pure col nome di Apollonio; è desso da identificarsi col nostro matematico? Questa identificazione venne accolta con favore dal Cantor (2) ed è ammessa implicitamente dallo Schiaparelli (3), esplicitamente dal Tannery (4); noi stessi incliniamo ad accettarla, ma non crediamo opportuno di arrestarci ora a discutere una questione che in questo momento ha per noi un interesse assai secondario.

A queste poche notizie biografiche che ci arrivano da fonte greca nessun altro dato positivo si aggiunge per merito di scrittori Arabi (5); questi somministrano per converso alcune informazioni bibliografiche che si trovano riepilogate nell'opera a cui già ricorremmo in parecchie occasioni (6) ed alle quali reputiamo conveniente accordare quì un posto, non soltanto pel loro intrinseco valore, ma anche perchè fungano quasi di piattaforma al nostro studio sul *grande geometra:*

Apollonio. È l'autore dell'opera sulle coniche. I figli di Mûsâs ricordano nell'introduzione al libro sulle coniche, che Apollonio era Alessandrino di na-

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 678.

(2) *Vorlesungen* I, p. 288.

(3) « E ad Apollonio di Perga . . era . . dato il sopranome di εψιλον, perchè amava assai di guardare la luna, la cui falce è simile alla figura della lettera ε ». *Mem. del R. Ist. Lomb., Classe di Scienze mat. e nat.*, Vol. X, p. 10, nota.

(4) *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893), p. 69.

(5) Si potrebbe anzi dire che questi hanno somministrato soltanto delle notizie *negative:* cfr. più avanti nel testo.

(6) V. Suter-Fihrist, p. 18-19.

Digitized by Google

scita (?) e che il suo libro sulle coniche era corrotto, in primo luogo perchè il manoscritto era difficile (a capirsi) e quindi si era tralasciato di commentarlo, ed in secondo luogo perchè il ricordo del libro erasi affievolito ed aveva finito per scomparire; cosicchè accadde che nelle mani della gente si trovarono degli esemplari differenti, finchè apparve un uomo di Ascalona chiamato Eutocio che era assai versato nella geometria — i figli di Mûsâs asseriscono che egli compose dei libri geometrici eccellenti, ma nessuno di questi giunse sino a noi —; dopo che egli ebbe raccolto di quell'opera quanto più potè, pose in ordine quattro libri — i figli di Mûsâs dicono che l'opera completa era in otto libri, dei quali esistono tuttora i primi sette ed una parte dell'ottavo, che i primi quattro libri vennero tradotti sotto la direzione di Aḥmed ben Mûsâs da Hilâl ben Abî Hilâl al Ḥimṣi ed i tre ultimi da Ṯâbit ben Ḳurra al-Harrânî, e che quanto resta dell'ottavo libro si riduce a quattro teoremi. — Pertanto la parte superstite dell'opera che Apollonio scrisse sulle coniche è in sette libri con un frammento dell'ottavo. Egli compose di più: Due libri sulla sezione di rette in dato rapporto. Due libri sulla sezione determinata: il primo dei quali fu migliorato da Ṯâbit, mentre il secondo, benchè sia stato tradotto in Arabo, è inintelligibile. Un libro sulla sezione delle superficie in dato rapporto. Su i cerchii tangenti. Ṯâbit ben Ḳurra ricorda che da Apollonio proviene una memoria sul teorema che dice: due rette le quali escono da una terza sotto angoli un po' minori di due retti, si incontrano.

53. Nella stessa guisa che Euclide è conosciuto dall'universalità degli studiosi pei suoi *Elementi,* così all'eccellente esposizione che fece della teoria delle sezioni coniche deve principalmente la sua rinomanza Apollonio di Perga.

Prescindendo da alcuni frammenti che di questo trattato pubblicò Giorgio Valla in Venezia nel 1501 (1) sotto il titolo abbastanza buffo *De comica sectione,* la prima volta che esso vide la luce per le stampe fu per cura di G. B. Memo (2), patrizio veneto, il quale, illudendosi di potere somministrare ai geometri una traduzione latina dei primi quattro libri delle *Coniche* disponendo di cognizioni filologiche, non di sapere matematico, compì un lavoro che venne giudicato in generale meritevole di

(1) In un'opera *De expetendis et fugiendis rebus* descritta dal Riccardi in *Biblioteca matematica italiana*, Parte I, Vol. 2.° (Modena, 1873-76), p. 573-4, e dall'Heiberg in *Philologische Studien zu griech. Mathematikern*, III (Leipzig, 1881).

(2) *Apollonii Pergei philosophi mathematicique excellentissimi Opera* (Venetiis, 1537).

Digitized by Google

mediocre considerazione e che in particolare fu vivamente criticato da Maurolico (1494-1575) (1). Un plauso assai maggiore ottenne l'opera analoga del Commandino (2), alla quale attinse a larga mano il gesuita Claudio Richard (1589-1644) per l'edizione delle *Coniche* da lui fatta quasi un secolo più tardi (3). Se tutti i citati editori si arrestarono ai primi quattro libri, gli è che soltanto questi erano stati (4) trovati in greco; ciò spiega anche perchè Maurolico divisasse di accingersi alla divinazione dei libri V e VI (5). Intanto che il Messinese si occupava di questa ricostruzione, G. A. Borelli (1608-1679) (6) ravvisava in un manoscritto della Biblioteca Medicea la traduzione araba dei libri V-VII e, ottenuto il consenso del Granduca di Toscana, lo portò seco a Roma ove, combinando la propria scienza geometrica colla conoscenza delle lingue orientali posseduta da Abramo d'Echelles, potè giungere a compierne la traduzione, la quale nel 1661 egli presentò ai matematici (7); notisi che nel frattempo (1659) era giunta a cognizione del pubblico la celebre divinazione fatta da Viviani del libro V (8).

---

(1) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, T. III (Paris, 1840), p. 242.

(2) *Apollonii Pergaei Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitae. Sereni Antissensis philosophi libri duo nunc primum in lucem edidit* (Bononiae, 1566).

(3) *Apollonii Pergaei Conicorum libri IV cum Commentariis Claudii Richardi*, (Antuerpiae, 1655).

(4) Le condizioni sono ora circa le stesse; anzi dei libri V-VII si ritiene oggi irremissibilmente perduto l'originale, mentre per l'ultimo non è più ragionevole sperare nemmeno in qualche versione orientale.

(5) Gli elementi per giudicare quanto sia riuscito il tentativo fatto in questo senso dal Maurolico si trovano adunati nel n. 6 dell'Appendice al presente libro.

(6) Cfr. per quanto segue M. del Gaizo, *Contributo allo studio della vita e delle opere di Giovanni Alfonso Borelli* (Atti dell'Acc. Pontaniana, Vol. XX, 1891, p. 1-48).

(7) *Apollonii Pergaei Conicorum libri* V, VI, VII. *Paraphraste Abalphato Asphahanensi nunc primum edidit* (Florentiae, 1661). Una seconda traduzione dell'arabo, che sembra di utilità pressochè nulla, fu pubblicata a Kiel nel 1669 dal Ravius.

(8) V. il n. 7 dell'Appendice al presente libro.

Digitized by Google

Un'edizione completa del testo greco venne per la prima volta progettata e tentata sul finire del secolo XVII da Edoardo Bernhard, intrapresa da Davide Gregory (1661-1710) e portata a compimento (1710) da Edmondo Halley (1656-1724); il quale aggiunse la traduzione de' libri V-VII e una sua divinazione dell'ultimo (1). — L'unica edizione critica da noi posseduta è la recente dell'Heiberg (1891-1893); sgraziatamente essa comprende soltanto la parte delle *Coniche* che ci pervenne pel tramite dei Greci (2), mentre sarebbe necessario che essa abbracciasse tutto il trattato; speriamo che il Nix — al quale dobbiamo una nuova versione dall' arabo (sul codice 943 della Bodleiana) di un frammento del V Libro (3) — voglia porgere un complemento degno quanto necessario al lavoro del celebre erudito danese. — Di traduzioni in lingue moderne è in dominio del pubblico unicamente quella fatta dal Balsam in tedesco liberamente in base all' edizione di Halley (4); una italiana deve esistere tuttora manoscritta (5); una francese era stata eseguita dal Peyrard (1760-1822), ma il suo autore venne colto da morte quando ne erano impressi i primi fogli; l'impresa venne in conseguenza abbandonata ed il vuoto risultante è soltanto in parte colmato dal largo riassunto che più tardi fece l'Housel dell'opera apolloniana (5).

---

(1) *Apollonii Pergaei Conicorum libri* VIII (Oxonii, 1710). Riguardo alla restituzione del libro VIII, si consulti il n. 8 dell'Appendice citata.

(2) Cfr. la recensione fattane dallo Zeuthen del Vol. II della 3ª Serie del *Nordisk tidsskrift for filologi* (Kjöbenhavn, 1894). Ai *Prolegomena* pieni di dottrina del II vol. ricorra chiunque desideri maggiori particolari intorno ai codici esistenti, ed al loro valore nonchè alla storia del testo.

(3) L. M. Ludwig Nix, *Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit Ibn Corrah* (Leipzig, 1889).

(4) *Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Buche* (Berlin, 1861).

(5) Apollonio ed. Heiberg, T. II, p, LXXXVIII.

(6) *Les coniques d'Apollonius.* (Journal de math. pures et appliquées, II Série, T. II, 1858).

Digitized by Google

54. Siccome l'*opus magnus* del geometra Pergeo è il lavoro più antico superstite riferentesi alle curve di second'ordine, così per determinare il progresso che esso segna sulle opere antecedenti altro mezzo non vi è che ricorrere alle dichiarazioni di Apollonio stesso e dei più accreditati commentatori greci, non trascurando di rilevare quelle proprietà delle sezioni coniche applicate o presupposte in iscritti anteriori a quelli di Apollonio. Orbene, mentre Eutocio, come sappiamo (L. I, n. 77) (1), fa merito ad Apollonio di avere per primo avvertita l'esistenza in qualunque cono (retto od obliquo) di tutte le coniche, per converso Pappo si limita ad asserire (2) che Apollonio, non riuscendo a rendersi ragione del principio di classificazione per le coniche usato dai suoi predecessori dal momento che la così detta " sezione del cono rettangolo „ esiste anche nei coni obliquangoli e similmente per le altre, modificò i nomi vetusti delle tre sezioni coniche e le chiamò *ellisse, iperbola* e *parabola*. D'altronde Apollonio — nella prefazione generale della sua opera, che riferiremo nel numero seguente — quando parla del primo libro di essa, si limita a dichiarare che contiene la generazione e le proprietà fondamentali delle coniche esposte in modo più completo e più generale di quello usato dai geometri anteriori. E queste semplici parole, scritte da persona che aveva per abitudine di non misurare le espressioni quando si trattava di estollere i proprii meriti, si possono a fatica interpretare siccome annunziatrici di una scoperta così cospicua com'è quella dell'*esistenza in qualunque cono di tutte le specie di coniche;* tanto più che non è possibile negare che Euclide (3) e Archimede (4) sapessero in un cono acutangolo trovarsi delle sezioni ellittiche. Se da ultimo si osserva (cfr. i libri seguenti) che Gemino, unica fonte di notizie a cui attinse Eutocio, probabilmente s'inspirò

(1) Cfr. Apollonio ed. Heiberg, Vol. II, p. 170.
(2) Pappo ed. Hultsch, p. 672-4.
(3) Cfr. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, p. 88.
(4) Archimede ed. Heiberg, T. I, p. 288.

Digitized by Google

esclusivamente alle opere del geometra di Perga e che d'altronde egli è, come matematico, di valore incomparabilmente inferiore a Pappo (il quale, come vedemmo, si esprime sotto forma assai più riservata) ci sembra essere quasi forzati di concludere che *la trattazione della teoria delle coniche quale si legge in Apollonio differisce dalle precedenti per ciò che questo geometra prende le mosse dalla definizione di quelle celebri curve come sezioni prodotte da piani in un cono qualsivoglia, mentre Aristeo ed Euclide le definivano mediante piani perpendicolari alle generatrici di un cono* (1). Ammesso che ad Apollonio sia dovuta questa trasformazione, risulta chiaro perchè a lui per primo sia apparso indispensabile l'imporre alle coniche dei nuovi nomi i quali, invece di esprimere delle proprietà affatto secondarie, rammentassero delle verità *già note* (come dimostrano le opere di Archimede) e da ritenersi per essenziali; i nuovi nomi avendo il loro fondamento nei problemi di applicazione di aree, coi quali i Greci erano famigliari sin dai tempi di Pitagora (v. L. I, n. 24), avevano grande probabilità di venire generalmente ben accolti, ed infatti, dopo Apollonio, li vediamo usati da tutti, senza eccezione (2).

55. Agli occhi dello storico presenta non comune importanza la prefazione generale della grande opera di Apollonio che già varie volte citammo; perciò crediamo opportuno accordarle quì un posto, tanto più che essa può fungere da documento giustificativo di un'opinione sostenuta nel n.° prec.:

Apollonio ad Eudemo salute. Se tu stai bene di corpo ed il resto procede a norma dei tuoi desiderii, io ne avrò gran piacere; anche a me va passabilmente. Allorquando io mi trovai con te a Pergamo, ebbi occasione di osservare che tu eri bramoso di conoscere le Coniche da me composte. Invio perciò ora a te il primo libro, dopo averne migliorata la forma; per gli altri farò lo stesso quando ne sarò soddisfatto. Giacchè credo che tu non avrai dimenticato

---

(1) È questa la tesi sostenuta dallo Zeuthen nel II cap. dell'opera più volte citata *Die Lehre der Kegelschnitte in Alterthum.*

(2) Intorno agli antichi nomi delle coniche v. anche: Heiberg, *Nogle puncter af de graeske mathematikeres terminologi* (Kjöbenhavn 1879).

Digitized by Google

di avere udito da me come io mi fossi accinto a scriverle dietro l'eccitamento del geometra Naucrate nell'epoca in cui egli venne in Alessandria e si trattenne presso di me; e come io, dopo averle esposte in otto libri, le comunicassi subito a lui prima di avervi posta tutta la necessaria diligenza, perchè egli voleva imbarcarsi al più presto, ma buttando giù tutto quello che mi capitava, coll'intenzione di rivederlo poi. Avendo poi trovato il tempo a ciò necessario, io le pubblicherò ora di mano in mano che le avrò corrette. Siccome è accaduto che anche altri che abitavano presso di me vedessero il primo ed il secondo libro prima della revisione, così non ti deve far meraviglia se li troverai ora sotto forma differente (da quella che tu conosci).

Ora nei primi quattro degli otto libri si trovano gli elementi della teoria (1). Il primo contiene la generazione delle tre coniche e delle sezioni opposte, nonchè le loro principali proprietà, esposte in modo più completo e generale di quello che era stato fatto dai nostri predecessori. Il secondo libro si riferisce a i diametri e gli assi delle sezioni e gli asintoti, cose tutte che hanno importanza ancora più estesa ed essenziale pei diorismi (2): che cosa poi io intenda per diametri ed assi, apprenderai da questo stesso libro. Il terzo libro racchiude molti teoremi notevoli i quali sono utili per la sintesi ed il diorisma dei luoghi solidi (3) e sono per la maggior parte belli e nuovi. Dopo averli scoperti io mi accorsi che Euclide non aveva ottenuta la sintesi del *luogo relativo alle tre e quattro rette* ma soltanto una parte di essa e neppur molto felicemente; e che anzi non era possibile completar bene questa sintesi senza quello che scopersi io. Il quarto libro insegna in quanti modi si possono tagliare due coniche, oppure una conica ed un cerchio, e molte altre cose che erano totalmente sfuggite ai miei predecessori, cioè in quanti punti due sezioni opposte incontrino una conica, un cerchio o altre due sezioni opposte. Gli altri quattro libri abbracciano considerazioni più elevate. Il quinto infatti tratta diffusamente di massimi e minimi; il sesto di coniche eguali e simili; il settimo di teoremi relativi ai diorismi; e l'ottavo contiene dei problemi sulle coniche nei quali si trovano delle condizioni dioristiche limitatrici.

56. Il I Libro del trattato apolloniano si compone di due parti schiettamente distinte l'una dall'altra, ognuna delle quali si apre con una serie di definizioni.

---

(1) È forse a questo carattere elementare dei primi quattro libri che è dovuta la loro conservazione in greco.

(2) Si osservi quì e più innanzi rilevata esplicitamente l'importanza che gli antichi attribuivano ai diorismi..

(3) A quali problemi alludesse Apollonio è ignoto: forse (cfr. Zeuthen l. c., p. 309) non ne è rimasta più alcuna traccia.

Digitized by Google

Apollonio suppone dati ad arbitrio un circolo ed un punto esterno al piano di esso, ed immagina che una retta indefinita si muova colla condizione di passare pel punto dato e di incontrare la periferia del circolo. Nasce allora una superficie composta di due falde toccantisi nel punto fisso e alla quale noi, seguendo l'esempio del geometra di Perga, diamo il nome di *superficie conica:* il nome di *cono* è invece riserbato al solido limitato da questa e dal cerchio base; il punto fisso è vertice tanto della superficie quanto del solido, la congiungente del vertice col centro della base ne è l'*asse,* e, secondochè questo è perpendicolare o non alla base, il cono dicesi *retto* od *obliquo.* Esposti questi concetti nelle prime tre definizioni, nelle cinque successive Apollonio scende dallo spazio al piano per far sapere che cosa si debba intendere per *diametri* e *diametri conjugati, vertici, assi* e *assi conjugati* di una curva piana o del sistema di due curve. — L'or fatta distinzione in due gruppi delle *definizioni prime* del I Libro delle *Coniche* può estendersi ai teoremi costituenti la prima parte del Libro stesso, giacchè alcuni sono stereometrici, planimetrici gli altri. Il primo di essi insegna che qualsia retta congiungente il vertice ad un punto di una superficie conica giace totalmente su questa, mentre dal secondo si apprende essere interni alla superficie tutti i punti della retta che unisce due punti di essa. Apollonio si volge poi allo studio delle sezioni prodotte da piani in un cono e, seguendo il costume preferito dagli antichi (e adottato oggi dai sintetici seguaci di Staudt) di esaurire anzitutto i casi speciali, suppone da principio che il piano segante passi pel vertice (prop. 3ª) o sia parallelo alla base (prop. 4ª): nel primo caso la sezione è un triangolo e nel secondo un circolo; se il cono è obliquo vi è però un'altra serie di piani (fra loro paralleli) che lo secano in circoli, sono i piani delle sezioni antiparallele (*ὑπεναντία*) la cui esistenza è dimostrata dalla proposizione 5ª. Il teorema successivo insegna che un piano passante per l'asse di un cono biseca tutte le corde dello stesso che sono parallele ad una retta condotta nel piano della base perpendicolarmente

Digitized by Google

alla traccia di quel piano su questo. Ad esso tien dietro la prima proposizione generale sulle coniche, la quale dice che " se s'immagina di segare un cono con un piano per l'asse e con un piano perpendicolare alla traccia del primo sul piano della base, si ottiene sul secondo piano segante una curva tale che tutte le sue corde parallele alla intersezione del piano di essa col piano della base sono bisecate dall'intersezione dei due piani considerati „ (questa intersezione è pertanto un diametro della curva); il geometra greco non manca di osservare (1) che le corde sono perpendicolari a questa intersezione o se il cono è retto oppure se esso è ortogonalmente simmetrico rispetto al piano condotto per l'asse. Che la curva sezione di un cono con un piano si possa stendere all'infinito è dimostrato dalla prop. 8ª, che possa essere finita senz'essere circolare dalla seguente, e che una sezione conica divida il proprio piano in due regioni distinte dalla prop. 10ª. Importantissime sono le proposizioni 11ª-13ª le quali esprimono le proprietà delle coniche che noi significhiamo mediante l'equazione $y^2 = 2px + qx^2$, supposto di aver presi per assi coordinati il diametro che comparisce nel teor. 7° e la tangente in un suo estremo; si arriva così ad una proprietà delle coniche che abilita a studiarle senza ricorrere a considerazioni stereometriche; la possibilità di trasformare quell'equazione emerge — almeno pel caso dell'ellisse — dalla prop. 15ª. Agli enunciati delle prop. 11ª-13ª Apollonio collega le definizioni di *parabola, ellisse* ed *iperbola,* nonchè quelle di (*parametro* ossia) *lato retto* (*ὀρθία*) e *lato trasverso* (*πλαγία*) (2): giova rilevare che, non diversamente da quanto usava Archi-

---

(1) Chasles, non avendo prestata sufficiente attenzione a questa osservazione essenziale, fu trascinato ad asserzioni disformi dal vero; v. *Aperçu hist.* (2ª Ed., 1875), p. 18.

(2) Per rendersi facilmente ragione di alcune fra le cose che seguono, è bene tenere presente che per la conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ il lato trasverso è $2a$ ed il lato retto $\frac{2b^2}{a}$; mentre per la parabola $y^2 = 2px$, il lato retto è $2p$.

Digitized by Google

mede, Apollonio per *iperbola* intende uno solo dei rami infiniti formanti la curva da noi designata con tal nome e quando gli accade di considerarle insieme le chiama *sezioni opposte;* che queste siano identiche e possiedano dei diametri è dimostrato dai teoremi 14° e 16°.

Alla seconda parte del I Libro preludono le definizioni di *centro* d'un'ellisse, d'un'iperbola o di due sezioni opposte, di *raggio* (cioè *raggio vettore*), e di *diametro* (lunghezza) conjugato ad un diametro dato. I primi tre teoremi (17°-19°) che s'incontrano poi, nonchè quello che porta il numero 31, concernono la posizione di una retta rispetto ad una sezione conica; la loro importanza deriva soltanto dall'uso che si deve fare di esse per condurre in modo rigoroso certe dimostrazioni. Sono corollarii dei citati teoremi 11°-13° i seguenti:

20. I quadrati di due ordinate di una parabola relative allo stesso diametro stanno fra loro come le corrispondenti ascisse contate dal vertice. 21. Se in un'iperbola od in un'ellisse si conducono delle ordinate, il quadrato di ciascuna sta al rettangolo dei segmenti che essa determina sul corrispondente diametro trasverso come il lato retto sta al lato trasverso; quindi i quadrati di due ordinate stanno fra loro come i rettangoli che ad esse corrispondono nel modo detto.

Alla posizione di una corda o di una tangente rispetto ad un diametro si riferiscono le proposizioni 22ª-28ª ed alle rette passanti pel centro le 29ª-30ª. Dalle proposizioni 32ª-36ª s'impara a costruire la tangente in un punto di una conica di cui sia noto un diametro e la direzione delle corrispondenti ordinate; tale costruzione è ovvia se il punto considerato è l'estremo di quel diametro; altrimenti essa si ottiene applicando un teorema il quale in linguaggio moderno si enuncia: " se da un punto di una conica si guida l'ordinata corrispondente ad un dato diametro e si trova il conjugato armonico del piede di essa rispetto agli estremi del diametro, si otterrà l'intersezione di questo con la tangente nel punto considerato „, teorema il quale in un caso particolare dice che " nella parabola la sottangente è doppia dell'ascissa „. Le quattro proposizioni successive riflettono pure le tangenti; esse fanno conoscere delle re-

Digitized by Google

lazioni metriche abbastanza notevoli per meritare che noi le riassumiamo in un enunciato unico: " Se (gli assi essendo ortogonali od obliqui) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ è l'equazione cartesiana d'una conica di centro O, se P_x e P_y sono le projezioni sugli assi di un punto qualunque P della curva, e T_x e T_y le intersezioni cogli assi stessi della tangente alla curva in P, sussisteranno le eguaglianze:

$$OP_x \,.\, OT_x = a^2 \;;\; \frac{P_xT_x \,.\, OP_x}{\overline{PP_x}^2} = \mp \frac{a^2}{b^2}$$

$$OP_y \,.\, OT_y = \pm b^2 \;;\; \frac{P_yT_y \,.\, OP_y}{\overline{PP_y}^2} = \mp \frac{b^2}{a^2} \text{ ».}$$

La prop. 41ª può intendersi come una notevole rappresentazione geometrica dell'equazione di una conica a centro; le quattro successive concernono una relazione esistente fra un punto di una conica, la tangente e l'ordinata corrispondenti e le parallele condotte a queste da un altro punto della curva; dei diametri trattano le tre successive; e finalmente le 49ª-51ª si possono interpretare siccome esprimenti che l'equazione di una sezione conica e di due sezioni opposte non muta forma se al diametro che (v. più sopra) fu rivelato dalla considerazione stereometrica si sostituisce un altro diametro e le relative ordinate (1).

Tutte queste proposizioni, per quanto varia ne possa sembrare la materia, porgono insieme i mezzi per sciogliere i problemi con cui chiudesi il I libro, l'intento dei quali è di " trovare un cono rotondo su cui stia una parabola, un'ellisse, un'iperbola, o due sezioni opposte, noti che siano di queste curve un diametro e la direzione delle corrispondenti ordinate, inoltre il lato retto se si tratta d'una parabola oppure il lato retto ed il tras-

(1) Questo significato è in sostanza dichiarato dal geometra greco nelle osservazioni annesse alla prop. 51ª.

Digitized by Google

verso se si tratta di una conica a centro „; resta per tal modo implicitamente dimostrato che " qualunque curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali od oblique da un'equazione della forma $y^2 = 2px + qx^2$ si può immaginare ottenuta secando un cono circolare con un piano „. Importa (cfr. il n. seg.) rilevare che Apollonio per ciascuno dei problemi citati comincia a considerare il caso in cui le ordinate siano perpendicolari al corrispondente diametro, lo tratta direttamente, e poi riconduce ad esso il caso più generale dimostrando l'esistenza in qualunque conica di almeno un asse, cioè d'un diametro perpendicolare alle relative ordinate. Dall'ultima proposizione si apprende poi che esistono e come si ricostruiscano due coppie di sezioni opposte *conjugate* (*τομαὶ συζυγεῖς*).

57. Il secondo libro delle *Coniche* — al quale è pure premessa una breve lettera-prefazione ad Eudemo, che ha scarso interesse scientifico ma getta qualche luce sul modo in cui negli antichi tempi si riusciva a diffondere le opere dell'ingegno — ha lo scopo di stabilire le relazioni di posizione fra le coniche (considerate esclusivamente come curve piane) ed i loro asintoti; le proposizioni che lo costituiscono sono in gran parte verità che, se è ovvio intuire, non è facile dimostrare con solidi argomenti. Esso comincia con l'esposizione di un procedimento per costruire delle rette (*ἀσύμπτωτοι*) non secanti un'iperbola della quale sia noto un diametro, la direzione delle ordinate corrispondenti ed i relativi lati retto e trasverso; tale costruzione consiste nel congiungere il centro della curva all'estremo di un'ordinata passante per un vertice di essa e di lunghezza media proporzionale fra il lato retto ed il lato trasverso. Ogni retta condotta pel centro entro l'angolo degli asintoti taglia la curva (prop. 21ª); questi adunque fungono da elementi di separazione fra le rette passanti pel centro che incontrano la curva e quelle che non la incontrano, la loro posizione è pertanto indipendente dal diametro adoperato per tracciarli con la costruzione precedente; che la distanza di un punto della curva da un asintoto si possa rendere minore di qualunque lun-

Digitized by Google

ghezza data, vien dimostrato più tardi (prop. 14ª) mediante un teorema (prop. 12ª) che citeremo fra breve. Osserviamo intanto che le notevoli relazioni che intercedono fra gli asintoti e le tangenti d'un'iperbola erano nella loro totalità conosciute da Apollonio; così l'essere il segmento di una tangente intercetto dagli asintoti bisecato dal punto di contatto emerge dalla proposizione 3ª, la quale dice di più che esso segmento è medio proporzionale fra il lato retto ed il lato trasverso relativi al diametro contenente il punto di contatto. Dalla prima parte di questo teorema (il cui inverso è dimostrato nella proposizione 9ª) scaturisce subito un modo per costruire (ossia determinare lato retto e lato trasverso di) un'iperbola conoscendone gli asintoti ed un punto. Dopo una breve digressione (prop. 5ª-7ª) sulle relazioni esistenti fra una tangente d'una conica, il diametro passante pel punto di contatto e le corde parallele a quella tangente, Apollonio ritorna agli asintoti per dimostrare che essi e l'iperbola (prop. 8ª) oppure due sezioni opposte (prop. 16ª) determinano su qualsivoglia trasversale due segmenti MN e PQ concentrici e tali (prop. 8ª e 11ª) che i rettangoli $PM.PN$ e $QM.QN$ sono fra loro eguali. La proposizione 12ª esprime a parole e sotto forma più generale (1) l'equazione di un'iperbola riferita agli asintoti, la 13ª afferma l'unicità dell'intersezione d'un'iperbola con una retta condotta per un punto d'un asintoto parallelamente all'altro, mentre la 15ª insegna che due sezioni opposte hanno comuni gli asintoti, e la 16ª che due sezioni opposte sono tagliate da qualunque retta che incontri un asintoto ed il prolungamento dell'altro.

Con la proposizione che viene appresso s'inaugura una serie di proprietà in cui intervengono le sezioni opposte conjugate a due date sezioni opposte, giacchè essa afferma avere quelle quattro sezioni comuni gli asintoti. Le prop. 18ª-23ª e la 43ª

(1) Essa infatti dice costante il prodotto delle rette condotte da un punto di un'iperbola sotto angoli costanti *ma qualunque*.

Digitized by Google

insegnano delle proprietà di corde, tangenti e diametri di due coppie di sezioni opposte conjugate, proprietà che somigliano ad altre che dianzi riferimmo e mediante le quali acquistasi la certezza che come coppia di sezioni opposte conjugate ad una coppia data si ottiene sempre la medesima curva qualunque pajo di diametri conjugati si adoperi per costruirla. Le proposizioni 24ª-26ª, 33ª e 41ª-42ª trattano dell'intersezione di due corde di una conica, mentre le 27ª-32ª e le 34ª-40ª riguardano le coppie di tangenti parallele di una conica a centro; esse non hanno così grande valore da meritare che quì se ne riporti l'enunciato.

L'ultima parte del libro in discorso è occupata da problemi sulle coniche che può sciogliere chi conosca i teoremi precedenti e *in cui fa mestieri supporre la conica di cui si parla interamente descritta.* Risolta anzitutto la questione (indeterminata) di tracciare un diametro di una conica (prop. 44ª), Apollonio ha il modo per fissare la posizione del centro d'un'ellisse o d'una iperbola (prop. 45ª), l'asse di una parabola (prop. 46ª) e gli assi d'una conica a centro (prop. 47ª) — questi sono le mediane del rettangolo avente per vertici le intersezioni della conica con una circonferenza concentrica — e di dedurre (proposizione 48ª) l'unicità di tale coppia se la conica data non è un circolo; è importantissimo rilevare come per costruire gli assi Apollonio implicitamente ammetta l'esistenza di uno di essi, cosa lecita in forza della chiusa al libro I (cfr. n. prec.) (1). Il geometra greco passa poi a costruire le tangenti di una conica passanti per un punto dato (prop. 49ª) (2) o formanti

---

(1) Quest'osservazione fatta dallo Zeuthen (op. cit., p. 311) assolve Apollonio da una colpa di cui lo imputò l'Housel (l. c., p. 163).

(2) Apollonio esamina separatamente i casi in cui la curva è una parabola, un'iperbola o un'ellisse. Il primo suddivide in tre caratterizzati risp. dall'essere il punto sulla curva, sul prolungamento di un dato diametro od altrove. Il secondo in cinque differenziati l'uno dall'altro per essere il punto sulla curva, sul prolungamento di un dato diametro, entro l'angolo degli asintoti, su un asintoto o

Digitized by Google

un angolo dato coll'asse (prop. 50ª) o col diametro contenente il punto di contatto; quest'ultimo problema è possibile qualunque sia la grandezza dell'angolo dato se la curva è parabolica od iperbolica (prop. 51ª), ma se è ellittica (prop. 53ª) lo è soltanto quando quell'angolo non supera un certo limite la cui determinazione è lo scopo della prop. 52ª. Le soluzioni di questi problemi hanno soltanto importanza teorica; in pratica sono di scarsa utilità perchè in esse, come dicemmo, si suppone la conica completamente tracciata; che Apollonio le abbia riferite unicamente perchè erano in uso prima di lui è opinione personale dell'Housel (1) che noi non dividiamo, ma che ci riteniamo esonerati dal combattere perchè *quod gratis asseritur gratis negatur.*

58. Le proposizioni del III libro — l'importanza ed originalità delle quali sono rilevate, come sappiamo (v. n. 55), da Apollonio medesimo — si possono distribuire in parecchii gruppi. Infatti le prime quindici sono casi particolari della seguente: " In una conica a centro è costante l'area del quadrilatero che ha per lati due diametri qualisivogliano e le corde condotte da un punto qualunque della curva con la condizione di essere bisecate da questi diametri „. Similmente le otto seguenti sono suscettibili di venir compendiate nel teorema — attribuito a Newton ingiustamente (2), giacchè era conosciuto da Archimede per la parabola ed un ramo d'iperbola (v. una nota al n. 47) — che dice: " Se da un punto M del piano di una conica si conducono due corde AB e CD aventi direzioni fisse, il rapporto

---

nell'angolo adiacente a quello degli asintoti. Il terzo finalmente in due distinti dall'essere il punto sulla curva o fuori. — In alcuni di questi casi il problema ammette due soluzioni, la cui esistenza emerge dai ragionamenti di Apollonio, ma non viene da lui esplicitamente notata.

(1) Loc. cit., p. 166.

(2) A meno che tal nome non gli venga concesso in memoria della generalizzazione datavi da Newton (1704) a tutte le curve algebriche nella sua *Enumeratio linearum tertii ordinis.*

Digitized by Google

dei rettangoli $MA \cdot MB$ e $MC \cdot MD$ avrà un valore indipendente dalla posizione del punto M „.

I sei teoremi seguenti si possono enunciare come segue:

24-26 e 28. Date due iperbole conjugate, di cui a, b è in lunghezza una coppia di diametri conjugati, ed un punto esterno M; se la parallela condotta da M al primo di questi diametri incontra una delle curve in P e P', mentre la parallela condotta dallo stesso al secondo incontra l'altra in Q e Q', fra i segmenti rettilinei così risultanti sussisteranno le relazioni

$$\frac{MP \cdot MP'}{a^2} + \frac{MQ \cdot MQ'}{b^2} = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{\overline{MP}^2 + \overline{MP'}^2}{\overline{MQ}^2 + \overline{MQ'}^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

29. E se inoltre la prima delle anzidette parallele incontra in R e R' gli asintoti, si avrà

$$\frac{\overline{MR}^2 + \overline{MR'}^2 - \frac{1}{2}a^2}{\overline{MQ}^2 + \overline{MQ'}^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

27. Se MM' e NN' sono due corde di un'ellisse parallele a due diametri conjugati e O il loro punto d'intersezione, sarà

$$\frac{\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2}{a^2} + \frac{\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2}{b^2} = 1$$ (1)

Queste proposizioni si verificano in modo estremamente facile con poche linee di geometria analitica; da tali dimostrazioni non diversificano molto nel fondo i ragionamenti di Apollonio. Aggiungiamo come da un lato la mancanza di un saldo legame logico fra di esse e dall'altro la possibilità di servirsene per determinare il " luogo di un punto tale che il prodotto delle rette condotte da esso sotto dati angoli a due rette date stia in un rapporto assegnato al rettangolo delle rette analoghe condotte dallo stesso punto ad altre due rette date oppure al quadrato della retta condotta ad una terza retta data pure sotto un angolo dato „ ha indotto (2) a pensare che esse fossero quelle verità che po-

---

(1) Per l'iperbola sussiste un teorema analogo (esso è espresso dall'equazione analoga a quella del testo, col solo cambiamento di b^2 in $-b^2$), ma Apollonio non si arresta a dimostrarlo.

(2) Zeuthen, op. cit. Abschn. VI e VII

Digitized by Google

sero in grado il geometra di Perga (come egli afferma nella prefazione riferita nel n. 52) di rendere perfetta la sintesi del problema locale ora citato, il quale non è altro se non il celebre *locus ad tres aut quatuor lineas* degli antichi (1). La giustezza di tale opinione ci sembra possa difficilmente venire revocata in dubbio; ma quanto verosimile sia la conseguente restituzione che venne dallo Zeuthen proposta per la sintesi di Apollonio, non è quì il momento di discutere, tanto più che, ove entrassimo in tale esame, per debito di giustizia dovremmo occuparci delle altre analoghe divinazioni, molte delle quali non meritano certamente di essere cancellate dal catalogo delle opere congeneri (2). Vogliamo invece aggiungere l'osservazione che gli antichi geometri non possono avere mancato di rilevare che il luogo in discorso è circoscritto al relativo quadrilatero; e siccome, invece di dare il rapporto costante dei due rettangoli, è lecito assegnare un punto pel quale il luogo deve passare, così si può ritenere che in sostanza Apollonio abbia per primo insegnato a *descrivere una conica per cinque punti dati in un piano.*

---

(3) Cfr. Pappo ed Hultsch, p. 678. — Adottando il modo di vedere di P. Tannery (*Bull. des Sc. mathem.* 1894, p. 8) quel luogo sarebbe stato trattato più o meno completamente nei Luoghi solidi di Aristeo (v. L. I, n. 79).

(2) La più antica delle soluzioni geometriche superstiti del problema delle tre o quattro rette è, per quanto ci consta, quella che Newton espose al principio della V Sezione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687); tiene dietro ad essa in ordine cronologico quella di Enrico Pemberton (1694-1771) pubblicata per la prima volta nel 1763 (*On the locus for three and four lines celebrated among the ancients geometers.* The phil. Trans. of the R. Society of London abridged by Hutton, Shaw and Pearson, Vol. XII, London, 1809, p. 60-77); ed a questa segue quella di G. Scorza (1781-1843) che si legge nella *Divinazione della geometria analitica degli antichi* (Napoli, 1825). Una soluzione analitica del problema fu esposta in succinto da Cartesio nella *Géométrie* (1637) per dimostrare la potenza del metodo delle coordinate e completata dai suoi commentatori numerosissimi, come ultimo dei quali in ordine di tempo va posto il Fergola (1753-1822) in grazia del suo *Trattato analitico dei luoghi solidi* (Napoli, 1814 e 1828) di cui ho diffusamente trattato nello scritto già ricordato sopra Nicola Fergola. Una *Loci ad tres linea demonstratio* di Fermat, fatta conoscere dalla recente edizione delle *Oeuvres de Fermat* (Paris, 1891; T. I, p. 87-89; cfr. T. II, p. 105), coincide con quella esposta dallo Zeuthen nell'opera più volte citata.

Digitized by Google

Le prop. 30ª-40ª appartengono alla teoria dei poli e polari rispetto ad una conica; adoperando il linguaggio moderno esse possono riassumersi nelle due seguenti: I. Se da un punto estremo ad una conica si conducono due tangenti ed una secante, il segmento determinato su questa dalla curva è diviso armonicamente dal punto dato e dalla congiungente i punti di contatto delle due tangenti. II. Se da un punto dato si conduce la parallela alla polare di esso rispetto alla conica, ogni corda di questa passante pel centro del segmento determinato dalla curva sulla polare è divisa armonicamente da questo punto e da quella parallela. Possiamo ad esse riunire la prop. 44ª la quale insegna che " la polare d'un punto rispetto ad un'iperbola è parallela a due delle rette che congiungono a coppie le intersezioni degli asintoti colle tangenti guidate da quel punto alla curva „. — Questo teorema è separato dai tre precedenti da una terna di proposizioni di valore eccezionale; la prima di esse dice che " una tangente mobile determina su due tangenti fisse di una parabola punteggiate simili „; la seconda che " una tangente mobile d'un'ellisse o d'un'iperbola determina sopra due tangenti parallele fisse a partire dai rispettivi punti di contatto delle coppie di segmenti formanti un prodotto costante „; la terza finalmente che " è costante l'area del triangolo determinato con gli asintoti da una tangente qualunque dell'iperbola „. La straordinaria importanza di queste proposizioni è dovuta specialmente a ciò che esse dimostrano come i Greci avessero visto, almeno in qualche caso, come le tangenti di una curva, a somiglianza dei punti di essa, godano di una comune proprietà atta a caratterizzarle; se essi fossero assurti al concetto di una conica come inviluppo è incerto, come è ancora più dubbio che essi fossero in possesso del concetto generale di inviluppo (1). Per converso è indiscutibile che la prop. 41ª riduce la costruzione delle tangenti d'una parabola uscenti da un punto al famoso

(1) Il quale ordinariamente ritiensi sia stato introdotto nella scienza da Florimond de Beaune (1601-1651): cfr. Montucla, op. cit., T. II, p. 120.

Digitized by Google

problema della sezione di ragione di cui fra breve (n. 64) dovremo occuparci, mentre la 42ª e 43ª riconducono le determinazioni analoghe per le altre coniche al non meno famoso *problema della sezione di spazio* (cfr. n. 64) (1).

Nella prop. 45ª Apollonio introduce i fuochi delle coniche a centro, sotto il nome di *σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς* (2), caratterizzandoli come quei punti dell'asse trasverso le cui distanze dagli estremi di questo dànno un rettangolo eguale a quello del lato retto e del lato trasverso. Egli dimostra (3), prima d'ogni altra cosa, che il segmento di una tangente qualunque intercetto fra le tangenti nei vertici è visto da un fuoco sott'angolo retto; ne deduce (prop. 46ª) che ogni tangente di una conica forma angoli eguali con le congiungenti i fuochi col punto di contatto, e trova (prop. 47ª) che i punti d'intersezione di una tangente qualunque di una conica con le tangenti nei vertici sono congiunte ai fuochi mediante due rette che si tagliano in un punto la cui projezione ortogonale su quella tangente è il relativo punto di contatto. La prop. 48ª dice che l'angolo delle tangenti condotte da un punto ad una conica e l'angolo delle congiungenti quel punto con i fuochi hanno la medesima bisettrice; e, dopo avere imparato quale sia la curva podaria di un fuoco (prop. 47ª-50ª), si arriva alle importanti e notissime relazioni esistenti fra i raggi vettori di qualsia conica a centro (prop. 51ª-52ª). Tali sono proprietà focali delle coniche segnalate da Apollonio e da

---

(1) È opinione di Halley, condivisa da Zeuthen (v. op. cit. p. 344-45), che questo legame tra la teoria delle coniche ed i due citati problemi non sia rimasta ignota al greco geometra, al quale, come vedremo (n. 64), si debbono due opere speciali sopra questi problemi.

(2) È noto che il nome di fuochi venne suggerito da Keplero (1571-1630) e poi generalmente adottato: cfr. C. Taylor, *An Introduction to ancient and modern Geometry of Conics*, p. LVII.

(3) Cfr. anche l'articolo del Terquem *Théorie des coniques d'après Apollonius* (Nouv. Ann. de Math, T. III, 1844, p. 412-416), ove, fra le altre cose, è segnalata la identità nell'essenza delle dimostrazioni del geometra greco con le analoghe ordite da Gergonne mediante la geometria analitica.

Digitized by Google

lui dimostrate con argomentazioni la cui semplicità ed eleganza lasciano ben poco a desiderare; erano desse le uniche a lui note? oppure si è egli limitato a registrare quelle che più direttamente contribuiscono a raggiungere quello che (per sua esplicita dichiarazione) è lo scopo del libro, cioè di *gettare i fondamenti per la determinazione dei luoghi?* in particolare era a' tempi suoi ignoto il fuoco della parabola (1), erano sconosciute le direttrici (2) e le loro importanti relazioni con i fuochi? Ci è forza limitarci a proporre queste questioni che nessun documento a noi noto è capace di sciogliere definitivamente.

Le quattro proposizioni con le quali si chiude il libro in esame, se analizzate accuratamente da un lettore moderno, gli fanno provare una di quelle gradite sorprese che rappresentano la principale seduzione dello studio delle antiche opere matematiche. Ivi Apollonio considera simultaneamente le punteggiate che nascono su due tangenti di una conica projettandone i punti dai rispettivi punti di contatto, e trova fra esse delle re-

---

(1) In generale si propende ad ammettere in Apollonio la conoscenza del fuoco della parabola, senza però giustificare quest'opinione con argomenti decisivi; così il Tannery dice: « Je crois, ..., que si Apollonius n'a pas parlé du foyer de la parabole, c'est qu'il n'avait rien à en dire plus que ce qu'en avait déjà dit Aristée ». (*Bulletin des Sc. math.*, II Série, T. XIII, 1889, I Partie, p. 277); e così Zeuthen (*op. cit.* p. 368): « Um nun zu verstehen, dass Apollonius dennoch weder Brennpunkt und Leitlinie der Parabel noch die dem entsprechenden allgemeineren Sätze über Ellipse und Hyperbel mit aufgeführt hat, muss man zunächst auch hier beachten, dass es aus Apollonius' eigenen Vorrede hervorgeht dass er nicht imstande ist alles zu geben, was er über die Kegelschnitte weiss. Ferner muss man, wenn man Forderungen mit Bezug auf das stellen will, was jedenfalls hätte mit aufgenommenen werden müssen, sich hüten von den modernen Auschauungen über die Bedeutung der Brennpunkte für die Astronomie oder von ihrer Brauchbarkeit als Ausgangspunkt für die gesammte Lehre von den Kegelschnitten auszugehen ». Si vegga in oltre P. Tannery a pag. 224 del T. XV (1891), 2ª Serie, del *Bulletin des Sciences mathématiques.*

(2) Non senza regione l'Housel (op. cit. p. 171) che l'assenza di direttrici è il nèo principale della teoria dei fuochi esposta da Apollonio.

Digitized by Google

lazioni metriche le quali in sostanza non sono che espressioni della projettività da cui sono legate. Ciò prova che i geometri greci conobbero, almeno in alcuni casi, l'omografia esistente tra i fasci che projettano i punti di una conica da due punti di essa arbitrarii ma fissi; essi dunque si accostarono al teorema fondamentale dell'odierna teoria geometrica delle coniche, senza però raggiungerlo e tanto meno avvertire la possibilità di farne il caposaldo di tutta la teoria (1).

59. Quale scopo abbia e quanta originalità possieda il IV Libro delle *Coniche* di Apollonio, si desume dalla lettera dedicatoria che lo precede, la quale dice:

Apollonio ad Attalo (2) salute. Degli otto libri che ho scritto sulle *Coniche* ho già pubblicati i primi tre che diressi ad Eudemo da Pergamo. Morto questo io ho deciso d'inviare i rimanenti a te che sei bramoso di conoscere i miei scritti sopra tale argomento, perciò ti mando intanto il libro IV. Ivi è trattata la questione di determinare in quanti punti al massimo si possono incontrare due sezioni coniche oppure una conica ed un cerchio senza coincidere, inoltre in quanti punti al massimo una conica e una circonferenza possono segare due sezioni opposte, oppure due sezioni opposte altre due, e di più una serie di cose simili. Sul primo di questi argomenti già Conone da Samo scrisse a Trasideo, senza però condurre esattamente le dimostrazioni, per il che Nicotele da Cirene gli mosse delle giuste obbiezioni. Il secondo dei detti argomenti fu soltanto nominato da Nicotele nel suo scritto contro Conone come una cosa che si può trattare, ma io non l'ho mai visto svolto nè da lui nè da altri. Il terzo e gli altri che vi si connettono, per quanto mi consta, non vennero in mente ad alcuno. Tutte queste cose esigono molti e varii teoremi, non avendole io viste dimostrate da altri: tali teoremi furono esposti da me per la maggior parte nei primi tre libri, i rimanenti lo sono in questo. La considerazione di essi è di non piccola utilità nella sintesi e nel diorisma dei problemi. A dir vero Nicotele nel corso della sua polemica con Conone afferma che nessuna delle cose che questi ha trovato riesce utile pei diorismi, ma ciò non è vero; si possono infatti fare dei diorismi anche senza l'ajuto di esse, tuttavia è assai

---

(1) Il primo a segnalare il significato straordinariamente interessante di questo passo fu, per quanto ci consta, il Balsam (p. 161 della traduzione di Apollonio dianzi citata); indipendentemente da lui venne di nuovo indicato dallo Zeuthen (op. cit. p. 122 e seguenti).

(2) La persona a cui è diretta questa lettera non è altri se non Attalo I che regnò in Pergamo dal 241 al 197 a. C.

Digitized by Google

agevole il farli col loro sussidio, il trovare cioè se un problema ha parecchie soluzioni e quante o se non ne ha. Tale previa determinazione somministra un eccellente punto di partenza per molte ricerche e quei teoremi sono utilissimi nelle analisi dei diorismi. Ma anche prescindendo da questi vantaggi le dimostrazioni, in grazia del loro intrinseco valore, sono degne di venir bene accolte, dal momento che è nostro costume dare accesso nella matematica a molte cose per quest'unica ragione.

L'artificio usato da Apollonio per conseguire il fine che si era prefisso consiste in una ingegnosa ed elegante riduzione all'assurdo, metodo questo naturalissimo quando, come nel caso attuale, le proposizioni che si studiano sono evidenti *ad oculos,* ma esigono una dimostrazione inoppugnabile (1); esso ha il proprio fondamento nei teoremi sulle polari dimostrate dal Pergeo nel libro precedente e in quelli consegnati nelle prime 23^{e} proposizioni del libro attuale; su tali proposizioni crediamo superfluo l'arrestarci perchè esse si riducono a poche verità a tutti note (2). Piuttosto, nell'intento di dichiarare al lettore il procedimento suaccennato, indichiamo quì in poche parole l'argomentazione con cui Apollonio dimostra che due coniche non possono segarsi in più di quattro punti (prop. 25^{a}).

Siano, se è possibile, $ABCDE$ cinque punti comuni a due coniche, e supponiamo scelte le notazioni in modo che fra due qualunque di essi, presi in quell'ordine, non cada altra intersezione delle due curve. Condotte le rette AB e CD, queste

---

(1) Non diversamente pensava Eutocio; ciò sembra emergere dal seguente brano della lettera che egli premise al commento sul IV Libro delle *Coniche*: « Il quarto libro... è così elegante ed intelligibile che non richiede ulteriori spiegazioni, giacchè quanto può mancare alla chiarezza nei teoremi è compensato da quello che Apollonio dice nelle dimostrazioni. In questo libro tutto vien stabilito col metodo indiretto, del quale si è servito anche Euclide in quello che scrisse sulle intersezioni e i contatti dei circoli (Elem. III, 10 e 13). Per la qual ragione Aristotele ed i geometri, primo fra i quali Archimede, lo ritennero utile e necessario ». Apollonio ed. Heiberg. T. II, p. 354.

(2) Ci basti citare a mo' d'esempio la prop. 23^{a}: Se da un punto P si conducono le parallele agli asintoti fino ad incontrarli in A e B e se su di esse si prende $AM = PA$, $AN = PB$, la retta MN sarà la polare di P.

Digitized by Google

o s' incontreranno in un punto L fuori della curva o saranno parallele. Nel primo caso si conduca LE e si determinino i conjugati armonici F e G di L rispetto alle coppie A, B e C, D; la retta FG sarà polare di L rispetto a entrambe le curve; se essa taglia la EL in H e si determina il conjugato armonico M di E rispetto alla coppia LH, M sarà un nuovo punto comune alle due coniche e cadrà fra B e C contro l'ipotesi. Nel secondo caso si congiungano i punti medii F, G delle corde parallele AB, CD, si conduca da E la parallela ad AB che incontra FG in H e su essa si prenda $HM = EH$; si giungerà nuovamente ad un punto comune alle due coniche ed interposto fra B e C, ancora contro l'ipotesi fatta. In un caso e nell'altro adunque il supporre che le coniche abbiano comuni cinque punti mena ad un assurdo, onde esse non possono averne più di quattro.

Stimiamo non necessario l'esporre partitamente il contenuto delle trentaquattro proposizioni nelle quali Apollonio studia le posizioni mutue che possono presentare due sezioni coniche (1), dopo avere persuaso i lettori (prop. 24ª) che esse non possono avere alcuna porzione comune senza coincidere (2). Come accenna Apollonio stesso nella prefazione dianzi riferita, queste proposizioni erano nell'antichità di uso continuo per determinare il numero delle soluzioni dei problemi di 3° e 4° grado, in particolare per istudiare il problema della duplicazione del cubo. Rileveremo finalmente che, mentre i primi tre libri delle *Coniche* sono redatti in una forma che è modellata con fedeltà scrupolosa su quella degli *Elementi* di Euclide, nel IV (e non

---

(1) Riferiamo come esempii le seguenti: 30. Due parabole non possono toccarsi in più d'un punto. 34. Se due ellissi concentriche sono bitangenti, i punti di contatto sono gli estremi d'un diametro, 38. Una sezione conica non può tagliare due sezioni opposte in più di quattro punti.

(2) Si noti che quantunque Apollonio non faccia esplicito cenno dei casi in cui le due coniche abbiano all'infinito delle intersezioni o dei contatti, pure nel V libro dimostrò ad evidenza di conoscere e sapere trattare anche questi casi.

Digitized by Google

soltanto in questo) Apollonio si è creduto autorizzato a sopprimere in quasi tutte le proposizioni la protasi limitandosi all'enunciato sulla figura cioè all'ectesi (cfr. n. 24).

60. Il V Libro della grande opera di Apollonio (1), col quale comincia la parte superiore di essa (2), ha uno scopo dichiarato senz'ambiguità dall'autore tanto nella prefazione generale dell'opera, quanto nella dedica ad Attalo che egli ha premessa al libro stesso: lo scopo è *lo studio delle rette massime e minime che si possono condurre da un punto di un piano ad una sezione conica situata nello stesso;* ma nella citata lettera dedicatoria Apollonio vanta poi l'originalità di tali sue investigazioni e la varietà delle applicazioni che esse possono ricevere vuoi nel risolvere vuoi nel discutere i problemi. Che non fosse un eccesso di vanità che spingesse Apollonio a giudicare così favorevolmente la quinta sezione del suo lavoro è facile dimostrare; infatti essa è in primo luogo un contributo non spregevole alla teoria geometrica dei massimi e minimi; in secondo luogo rappresenta un capitolo importantissimo della teoria delle coniche, relativo a normali ed evolute, e benchè non tutti possano far propria l'opinione di coloro (3) che ammettono avere Apollonio avvertito l'esistenza di una linea continua luogo dei punti da ognuno dei quali esce una normale unica di una conica (cioè dell'evoluta), è vano il negare che ad Apollonio sia sfuggito che questi punti hanno una effettiva esistenza (4); da ultimo

---

(1) Cfr. il Cap. XIII dell'op. cit. di Zeuthen; in particolare a pag. 395 si troverà rilevato un notevole punto di contatto fra Apollonio e Cartesio.

(2) Secondo lo Zeuthen (l. c. p. 302) il sostanziale divario fra i primi quattro e gli ultimi risiederebbe in ciò che quelli costituiscono un *compendio* della teoria delle coniche, e questi rappresentano altrettante *monografie* staccate concernenti questa teoria.

(3) P. es. Montucla (op. cit. T. I, p. 247) e, con qualche riserva, Chasles (*Aperçu historique*, 2ᵉ ed., p. 20).

(4) Anzi, come nota lo Zeuthen (op. cit. p. 289), Apollonio insegna dell'evoluta della parabola una costruzione per punti dalla quale si deduce subito l'equazione della stessa in coordinate cartesiane.

Digitized by Google

ivi si trova una soluzione completa, accompagnata dalla relativa discussione, del problema (solido) che consiste nel determinare le normali di una conica uscenti da un punto dato nel suo piano. Perciò non deve recare meraviglia se il V Libro delle *Coniche* più di qualunque altro ha contribuito ad elevare Apollonio nell'estimazione universale; e l'ammirazione per lui sorge spontaneamente in chiunque rifletta quanto difficil cosa dovesse essere riconoscere coll'unico sussidio degli antichi procedimenti come si distribuiscano nel piano di una conica le rette ad essa normali; anzi tale ammirazione (come in casi analoghi che abbiamo già incontrati; v. n. 44) si mutò in taluno (1) nel sospetto che in Apollonio il metodo di esposizione fosse ben diverso dal metodo di ricerca della verità. Quanto sia fondato tale sospetto è impossibile decidere, ma a noi pare non sia indispensabile ricorrere ad ipotesi di questa natura, giacchè la storia della scienza in generale, e in ispecial modo la storia intellettuale del popolo ellèno, presenta innumerevoli esempii di uomini a cui la naturale sagacia permise raggiungere dei risultati che sembrava follia sperare, adoperando dei mezzi che nelle mani di altri sembravano dotati di fecondità limitata.

Volendo indicare anche di questo libro le verità più cospicue (benchè ciò presenti difficoltà maggiori che pei libri precedenti) ricordiamo che della conica a centro avente per equazione

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ a > b,$$

l'evoluta è rappresentata da

$$[2] \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 \mp b^2)^{\frac{2}{3}},$$

onde ha sull'asse maggiore AA' due punti U e U' che distano dai vertici di una lunghezza eguale al relativo semiparametro,

(1) Ad es. Cantor, *Vorlesungen* I, p. 294-295.

Digitized by Google

e, nel caso dell'ellisse, ne ha altri due V e V' sull'altro asse BB' che pure distano dai vertici del relativo semiparametro; similmente per la parabola

$$[3] \qquad y^2 = 2px$$

l'evoluta

$$[4] \qquad y^2 = \frac{8}{27}\frac{(x-p)^3}{p}$$

ha sull'asse un punto U distante dal vertice A del semiparametro. Ciò posto, le prime tre proposizioni del Libro V non sono che lemmi per le seguenti, porgendo una nuova interpretazione geometrica dell'equazione cartesiana di una conica a centro. Dimostrate queste, Apollonio si volge a considerare le rette massime e minime che si possono guidare ad una conica da un punto P del piano di essa scelto in posizioni speciali e la distribuzione dalle due parti di una di esse delle rette uscenti da P. Le posizioni di P che si presentano per prime sono i punti dell'asse: tutti questi godono la proprietà di avere l'asse stesso per corrispondente retta minima ed anche per retta massima se la curva è ellittica; fra i punti dell'asse ha speciale importanza il punto U, a cui sono consacrate le prop. 4ª-6ª, mentre la 7ª si riferisce ai punti del segmento AU e le 8ª-10ª ai punti dell'asse esterni al detto segmento (1). Per l'ellisse vi è poi sull'asse un altro punto notevole, cioè il centro, e la prop. 11ª assegna i valori estremi delle rette passanti per esso. Dimostrato (prop. 12ª) che una retta minima uscente da un punto dell'asse è retta minima rispetto a qualsia altro suo punto, Apollonio nota essere possibile che da un punto dell'asse d'una conica parta una retta minima distinta da questo e, supposto che esista in fatto, ne stabilisce delle proprietà (prop. 13ª-15ª);

(1) Si noti che dalla 8ª emerge essere nella parabola la sottonormale costante

Digitized by Google

e quindi, ben conoscendo l'uniformità di comportamento dei due assi di una ellisse, estende all'asse minore ed al punto V le proprietà avvertite nell'asse maggiore e nel punto U. — Le tre proposizioni seguenti concernono una nuova categoria di posizioni notevoli del punto P, cioè i punti della curva, ed insegnano che per uno di essi passa non più di una retta minima ed inoltre se la curva è ellittica non più di una retta massima. Dai sette teoremi successivi si apprende finalmente che una retta minima è (per usare il linguaggio moderno) normale alla curva; da quello che vien dopo l'estensione della dianzi citata prop. 12ª a rette minime uscenti da punti qualsivogliano e dalle 35ª-37ª in qual maniera sia disposta rispetto ai vertici una retta minima uscente da un punto dell'asse. — Finora Apollonio aveva considerate separatamente le rette minime e su ciascuna due soli punti, cioè quello da cui parte e quello ove è normale alla curva; nelle prop. successive (38ª-43ª) egli invece si occupa delle intersezioni delle normali fra loro e con la curva. Le undici seguenti (1), riferendosi al numero (mai maggiore di tre) delle normali che si possono condurre da un punto ad una conica, somministrano gli elementi per la discussione del problema di condurre da un punto le normali ad una conica, al qual problema sono consacrate le proposizioni che vengon poi (prop. 58ª-61ª per un punto esterno, prop. 62ª-63ª per uno interno alla curva) (2). La soluzione che Apollonio suggerisce per questo problema poggia sulla costruzione d'una iperbola equilatera destinata a tagliare la conica data nei piedi delle normali cercate; la determinazione di detta iperbola è un corollario dell'espressione, da Apollonio scoperta, della sotto-

(1) Importa rilevare che nella prop. 52ª ed in altre ancora Apollonio (come già aveva fatto Archimede) usa come ausiliaria l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, senza arrestarsi a suggerire il modo di eseguirla: al suo silenzio sopperirono i commentatori arabi; cfr. la trad. citata dal Balsam p. 201.

(2) Le più importanti fra esse, anzi fra quelle di tutto il V Libro, sono le 51 e 52.

Digitized by Google

normale per una conica qualsivoglia. Supposto che la conica considerata sia rappresentata da una delle precedenti equazioni [1], [3] e che α, β siano le coordinate del punto dato, allora l'iperbola equilatera ausiliaria ha per equazione

$$[5] \qquad (a^2 \mp b^2)\, xy - a^2 \alpha y \pm b^2 \beta x = o$$

oppure

$$[6] \qquad xy - (\alpha - p)\, y - p\beta = o;$$

ora è evidente che nel caso della parabola i piedi delle tre normali stanno anche su una circonferenza, su quella cioè rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - (\alpha + p)\, x - \frac{1}{2}\beta y = o;$$

tale importante circostanza è sfuggita ad Apollonio, onde con qualche fondamento è stato congetturato (1) fosse questo il passo del V Libro criticato da Pappo (2) nello squarcio da noi riferito nel n. 41, al quale (e non senza fondamento) sembrava colpa imperdonabile usare come curva ausiliaria un'iperbola quando poteva servire una circonferenza (3). — Le inda-

---

(1) Zeuthen Op. cit., p. 285 e seg.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 270-3.

(3) Un'altra interpretazione delle parole del commentatore alessandrino venne proposta dall'Hultsch (p. 273, nota 5 della cit. ed. di Pappo) e combattuta, a parer nostro vittoriosamente, da P. Tannery nell'importante lavoro *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède* (Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux, 2e Série, T. V, 1884, p. 51-52). Nel quale inoltre è suggerita una terza spiegazione con le parole seguenti: « Cependant l'oeuvre d'Apollonius présente une véritable lacune; la construction *plane* de le seconde normale passant per un point considéré sur l'enveloppe [des normales] n'est pas donnée. Était-ce cette lacune que signalait le critique? Elle témoignerait alors d'un progrès important accompli, après Apollonius, dans une théorie ou l'on ne sache pourtant pas qu'aucun ancien l'ait jamais dépassé. C'est, semble-t-il, la seule hypothèse qui puisse attribuer à cette critique une portée sérieuse; mais malheureusement cette hypothèse demanderait une confirmation qu'il parait bien difficile de lui trouver. »

Digitized by Google

gini di cui abbiamo fatto cenno da ultimo segnano forse il punto culminante del V Libro. Apollonio in seguito dimostra alcune proprietà dei punti interni od appartenenti all'evoluta (prop. 64ª-67ª e 73ª), stabilisce il confronto prima fra le lunghezze delle tangenti guidate da un punto ad una conica (proposizioni 68ª-71ª), poi fra le normali passanti per un punto da cui ne escono due soltanto (prop. 72ª e 74ª) ed in fine fra quelle condotte da un punto attraversato da tre normali (proposizione 75ª). Chiudono il libro due teoremi intorno alla grandezza relativa delle tre normali di un'ellisse uscenti da un punto dell'asse minore.

61. Il libro VI delle *Coniche* è non soltanto per estensione ma eziandio per intrinseco valore e novità incomparabilmente inferiore al precedente; ne è argomento *la congruenza e la similitudine delle coniche.* Prelude ad esso la seguente brevissima lettera, che riferiamo grazie al fine a cui tende e che raggiunge, quello cioè di determinare il posto che spetta al detto libro nella storia della geometria greca:

Apollonio ad Attalo salute. T'invio il sesto libro delle *Coniche* il quale abbraccia delle proposizioni sulla congruenza e la similitudine delle sezioni coniche e dei loro segmenti, nonchè altre cose che non vennero rilevate dai miei predecessori. In particolare troverai ivi indicato come si possa determinare in un dato cono retto una sezione congruente ad una data e come si possa trovare un cono retto simile (1) ad uno dato e contenente una data conica. Tutte queste cose io ho trattate in modo un po' più chiaro e completo di quanto fece chi scrisse prima di me sullo stesso tema. Addio.

Dalla verità di alcune fra le asserzioni in essa contenute possiamo persuaderci ricordando che Archimede nel celebre suo scritto *Su i conoidi e gli sferoidi* diede delle definizioni di similitudine per queste figure fondate su certi criterii per distinguere se due coniche sono o non simili; inoltre non poche fra le proposizioni di Apollonio sono evidenti per chiunque abbia presenti la forma e le proprietà fondamentali delle coniche;

(1) Com'è noto, sono simili due coni circolari retti aventi lo stesso angolo al vertice.

Digitized by Google

onde è estremamente verosimile che per comporre il VI Libro del suo trattato il geometra Pergeo abbia ordinato dei materiali esistenti aggiungendovi delle parziali ricerche per comporre un tutto organico.

Come è agevole immaginare il libro in questione comincia con un gruppo di definizioni relative alla congruenza ed alla similitudine di due coniche o di due loro porzioni, nonchè agli elementi che si sogliono considerare in un segmento di conica; citiamo fra esse soltanto la seguente: " due coniche si dicono simili se due ordinate corrispondenti stanno fra loro come le ascisse relative „, ove per *corrispondenti* s' intendono due ordinate che stiano fra loro come i relativi lati retti; la citiamo per osservare la differenza esistente fra essa e quella presupposta da Archimede, il quale desume la somiglianza delle sezioni fatte in una delle quàdriche rotonde a lui note dal fatto che in tutte ha il medesimo valore il rapporto del quadrato d' un' ordinata al rettangolo dei due segmenti in cui essa divide l'asse su cui cade. — Apollonio trova anzitutto (prop. 1ª e 2ª) le condizioni di congruenza di due parabole, di due ellissi o di due iperbole, esclude (prop. 3ª) la possibilità di coniche eteronime congruenti e di due coniche aventi una porzione comune eppure non congruenti (prop. 6ª e 10ª), e dimostra (prop. 16ª) la congruenza di due sezioni opposte (cfr. la prop. 14ª del I Libro). Dalle prop. 4ª e 5ª si apprende essere congruenti le due parti in cui un' ellisse è divisa da un diametro qualsivoglia, mentre la 7ª e 8ª affermano la congruenza di altri particolari segmenti e la 9ª tratta di archi congruenti di coniche congruenti. Dalla 11ª emerge essere tutte le parabole figure simili, mentre dalle due successive si può desumere la concordanza delle definizioni di similitudine usate da Archimede e da Apollonio. Esclusa la possibilità che due coniche eteronime siano simili (prop. 14ª-15ª), Apollonio esclude eziandio quella che sian simili due porzioni di coniche dissimili (prop. 23ª-25ª) dopo essersi occupato (prop. 17ª-22ª) di alcuni particolari segmenti simili. — Arrivato a questo punto il geometra greco abbandona

Digitized by Google

il piano per dimostrare simili le sezioni prodotte in un cono da piani paralleli (prop. 26ª-27ª) e, riprendendo il filo delle idee che lo dominavano verso il termine del I Libro (v. n. 56), fa conoscere le soluzioni dei problemi seguenti (che evidentemente sono in certo modo inversi l'uno dall'altro): " In un dato cono trovare una sezione che sia congruente ad una data conica (prop. 28ª-30ª); trovare un cono retto che sia simile ad uno dato e contenga una data conica — con una limitazione se questa è iperbolica (prop. 31ª-33ª) (1) „.

62. Il VII Libro è pure diretto ad Attalo; la lettera che lo accompagna dice:

Apollonio ad Attalo salute. Insieme a questa ti mando il libro settimo delle *Coniche*. Sono in esso contenute molte proposizioni che si riferiscono ai diametri delle sezioni coniche ed alle figure descritte su di essi; la utilità di tutte si manifesta in problemi di varie specie ed in particolare nella discussione (διορισμός) di essi. Molti esempi relativi s'incontrano fra i problemi limitati (da condizioni) sulle coniche che ho esposti e dimostrati nel libro ottavo; il qual libro è quasi un'appendice a quello che lo precede e che sarà mia cura di spedirti al più presto possibile. Addio.

Le proposizioni di cui è formato il libro del quale si tratta si ripartiscono naturalmente in due categorie: quelle dell'una insegnano delle particolari espressioni per talune funzioni razionali semplicissime di diametri e parametri, mentre in quelle dell'altra vengono determinati i valori estremi di certe funzioni analoghe alle precedenti. Riguardo al metodo di ricerca prescelto dal geometra greco è da notare che, siccome egli aspira a ragionare in modo uniforme su tutte le coniche a centro, così evita certe argomentazioni più semplici ma applicabili ad una sola di esse, quali ad esempio sarebbero i ragionamenti in cui l'ellisse vien considerata per projezione parallela del cerchio.

Come la maggior parte degli altri libri delle *Coniche*, il settimo si apre con un gruppo di teoremi (prop. 1ª-3ª) destinati a fungere da lemmi per quanto segue; da essi si apprende

(1) Cfr. gli sviluppi che diede lo Zeuthen (l. c. p. 383-373) su questi problemi.

Digitized by Google

— per usare il linguaggio della moderna geometria analitica — qual forma prenda l'equazione di una sezione conica quando si assumano quali coordinate di un suo punto il raggio vettore uscente dal vertice e l'ascissa contata sull'asse a partire da questo; allo stesso ufficio è chiamata la proposizione seguente da cui s'impara un'espressione assai semplice del rapporto del quadrato del segmento di tangente di una conica a centro intercetto fra il punto di contatto e l'asse al quadrato del diametro parallelo alla stessa tangente. — Per esporre concisamente la restante materia del libro in esame designeremo con: a e b gli assi di una conica, a' e b' due diametri conjugati qualisivogliano, p il parametro relativo all'asse a e p' quello che si riferisce al diametro qualunque a'. Potremo dire allora che la proposizione 5ª dà per una parabola l'espressione di p' in funzione di p e le 6ª-7ª insegnano una particolare espressione del rapporto $b'^2 : a'^2$ dalla quale è facile dedurre un modo per determinare i diametri conjugati eguali in un'ellisse. Le proposizioni 8ª - 9ª concernono i quozienti $a^2 : (a' \pm b')^2$ e la 10ª il quoziente $a^2 : a'b'$, mentre dalle 11ª-14ª risultano delle espressioni eleganti pei quozienti $a^2 : (a'^2 \pm b'^2)$ ove si deve prendere il segno + o il — secondochè si tratti d'un'iperbola o d'un'ellisse: finalmente le intermedie prop. 12ª-13ª fan conoscere il cosidetto *primo teorema di Apollonio:* " nell'ellisse è costante la somma e nell'iperbola la differenza dei quadrati di due diametri conjugati „. Essendo $p' = b'^2 : a'$, le citate prop. 6ª-7ª si possono intendere come esprimenti il rapporto $a' : p'$, onde preludono quasi ad altre in cui entrano altre funzioni di queste stesse lunghezze; parliamo di quelle che insegnano i valori di p' (prop. 15ª), di $a' \mp p'$ (16ª-17ª), $a'p'$ (18ª), e di $a'^2 \mp p'^2$ (19ª-20ª). Scopo delle prop. 21ª-22ª è di far vedere che in un'iperbola dall'essere $a \gtreqless b$ segue $a' \gtreqless b'$, proprietà questa che comprende quella caratteristica dell'iperbola equilatera (prop. 23ª) e che si ritrova anche nell'ellisse (prop. 24ª). Detti a'' e b'' una coppia di diametri coniugati più discosti dagli assi di quanto siano a' e b', si hanno poi le relazioni $a + b < a' + b' < a'' + b''$

Digitized by Google

(prop. 25ª-26ª), $a-b > a'-b' > a''-b''$ (prop. 27ª) e $ab < a'b' < a''b''$ (prop. 28ª). La costanza dell'espressione $a'^2 - a'p'$ per l'iperbola e della $a'^2 + a'p'$ per l'ellisse è un semplice corollario del primo teorema di Apollonio, tuttavia è rilevata esplicitamente (prop. 29ª-30ª) dal geometra greco prima di esporre il secondo dei teoremi che recano il suo nome e che, come tutti sanno, dice essere il parallelogrammo costruito su due diametri conjugati qualisivogliano eguale al rettangolo costruito su gli assi (prop. 31ª). — Dopo questa proposizione si incontrano delle verità di un genere un po' differente. Infatti la 32ª fa noto che nella parabola il parametro minimo è quello relativo all'asse; le prop. 33ª-35ª concernono i valori estremi di p' per un'iperbola, le 36ª-37ª il massimo di $a' - p'$ per questa curva e l'ellisse; le 38ª-41ª il massimo di $a' + p'$ e le due seguenti il massimo di $a'p'$; dei valori massimi e minimi di $a'^2 + p'^2$ trattano le prop. 44ª-48ª e di quelli di $a'^2 - p'^2$ i teoremi che chiudono il libro (prop. 49ª-51ª). Tutte queste verità si possono intendere come soluzioni di altrettanti problemi di massimo e minimo, ed è difficile porre in dubbio che il geometra greco le abbia scoperte appunto in questo modo; ma, adottando il costume preferito dai suoi contemporanei, egli, compiuto l'edificio, con ogni cura cancellò ogni traccia delle impalcature che avevano servito ad elevarlo; se con grande verosimiglianza egli trasse partito dal metodo analitico per sciogliere i problemi ai quali aveva fiso lo sguardo, al metodo sintetico si appigliò per esporne le soluzioni.

63. Come già avvertimmo, il settimo è l'ultimo dei libri delle *Coniche* che sia pervenuto sino a noi; dell' VIII conosciamo soltanto quanto ne dice Apollonio nella prefazione generale dell'opera e nella dedica speciale al libro VII e quanto si può desumere dai quattordici lemmi con cui Pappo intese facilitare l'intelligenza dei due ultimi libri delle *Coniche* (1). E poichè,

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 990-1004.

Digitized by Google

come sappiamo, Apollonio afferma essere l'ultima sezione del suo trattato quasi un'appendice della penultima, così è stata formulata (1) ed accolta con favore (2) la congettura che in quella venissero determinati le coppie di diametri conjugati di una data conica soddisfacenti delle condizioni assegnate; ammesso ciò il libro VIII avrebbe racchiuse le soluzioni di problemi di cui il I suggeriva gli enunciati ed il VII insegnava le discussioni, ordinamento questo che corrisponde al costume dei geometri antichi di premettere alla soluzione di un problema la discussione di esso. Questa congettura forma la base di una divinazione del libro perduto (3) la quale, benchè sembri a noi eccellente, pure non impedisce di amaramente rimpiangere la scomparsa, probabilmente definitiva, dell' ultima parte del trattato apolloniano.

Ma per quanto in conseguenza ci si presenti monca la grande trattazione di Apollonio, per quante alterazioni essa abbia sofferte da traduttori poco scrupolosi quali erano gli Arabi, pure essa è degna di ammirazione e di studio anche ai dì nostri; a convincersene è sufficiente riflettere che, se si confronta la totalità dei teoremi e dei problemi che essa insegna con quanto si apprende dalle migliori opere recenti, non si tarderà a riconoscere che la differenza è ben piccola. Infatti Apollonio considera le coniche prima, quasi di passaggio, nello spazio, ma poi di regola nel piano; in generale come luoghi di punti, ma incidentalmente (sebbene non esplicitamente) come inviluppo di rette; determina le proprietà comuni a tutte, ma non manca di additare quelle speciali ad ognuna; dalla sua grande opera si apprendono le relazioni di una conica con le rette secanti, tangenti o normali, con circoli e con altre coniche; ivi sono introdotte e applicate le nozioni di diametri, assi e centro, esposte le teorie dei poli e delle polari, dei fuochi, delle evolute, delle po-

---

(1) Halley, nella pref. alla sua divinazione del libro VIII delle *Coniche*.

(2) Zeuthen, op. cit. p. 404.

(3) Per maggiori particolari si ricorra al n. 8 dell' Appendice.

Digitized by Google

darie e vien sollevato un lembo di quel velo che allora celava la fertile e sconfinata pianura della teoria delle projettività applicata alle curve di second' ordine; si aggiungano quindi all' opera del geometra greco le nozioni di fuoco della parabola e di direttrici, e si avrà una teoria delle coniche che nella sostanza non differisce da una moderna esposizione geometrica della stessa dottrina. — Ma il trattato di Apollonio presenta per converso un assoluto distacco nei metodi di dimostrazione dai moderni trattati di geometria sintetica superiore. Di vero chiunque studia a fondo quel trattato sarà obbligato di constatare l' analogia profonda che esso presenta con un' esposizione delle proprietà delle curve di second' ordine mediante coordinate cartesiane: non soltanto le proprietà fondamentali (*συμπτώματα*) che ad Apollonio servono a discernere l' una dall' altra le tre curve si traducono nelle equazioni canoniche delle medesime nel metodo di Descartes, ma molti dei ragionamenti esposti, quando siano tradotti nell' ordinario linguaggio algebrico, si riscontrano per equivalenti ad eliminazioni, risoluzioni di equazioni, trasformazioni di coordinate e simili (1). Già Chasles (2) avvertì che le anzidette proprietà fondamentali fanno nel metodo di Apollonio l' identico ufficio delle equazioni delle tre curve in quello di Cartesio; ma solo più tardi l' Housel, nel lavoro già più volte citato, sviluppò completamente quest' osservazione, la quale, accolta con molto favore dal Baltzer (3), trovò un oppositore gagliardo nel Günther (4) (che ritenne assai più moderna l' origine del me-

(1) Lo abbiamo già rilevato in due occasioni, cioè nel testo e in una nota del n. 58.

(2) *Aperçu historique*, p. 18, *Discours d' ouverture du Cours de géométrie supérieure* (*Traité de géométrie supérieure*, II ed., 1880, p. 568). Cfr. anche: Cantor, *Vorlesungen* I, p. 291; Brill e Nöther, *Jahresb. d. deutschen Math.-Vereinigung*, III Bol. (1892-93) p. 109.

(3) Berichte d. k. sächs. Gesellschaft, Math.-phys. Klasse, T. XVII, p. 1-6; v. anche Pappo ed. Hultsch p. 1232.

(4) *Die Anfänge und die Entwickelungsstadien des Coordinatenprincips* (Abh. der naturforschenden Gesellschaft, T. VI). Questo lavoro fu tradotto in italiano dal Prof. Garbieri ed inserito del T. X (1877) del *Bull. di Bibl. ecc.* p. 363-406.

Digitized by Google

todo delle coordinate) e più tardi uno strenuo propugnatore nello Zeuthen (1); comunque se ne giudichi la verosimiglianza, essa può servire di scorta e lume a chiunque voglia oggi penetrare nell' intimo del pensiero del Pergeo, e noi stessi (come il lettore si sarà avveduto) ne traemmo profitto per rendere più snello e perspicuo il riassunto dell' opera apolloniana che occupa le pagine precedenti, senza con ciò intendere di esprimere un piena ed incondizionata adesione ad idee che, appunto per essere geniali e seducenti, devono venire accettate con estrema precauzione ed accolte soltanto in seguito ad uno studio pacato fatto sotto l'egida costante di tutti i documenti esistenti.

64. Nella classica esposizione che ci ha lasciata della teoria delle sezioni coniche Apollonio ci si rivela tanto pensatore originale quanto accorto e non volgare organizzatore delle investigazioni da altri condotte a buon termine, come uno scienziato dunque a cui il magnanimo desiderio di accrescere le nostre cognizioni non faceva porre in dimenticanza le esigenze di un proficuo insegnamento; onde è a ragione che il suo grande trattato (o tuttalmeno la prima metà di esso) fu nelle scuole greche e nelle arabe il testo generale per l'insegnamento geometrico superiore. Orbene, questa tendenza a conciliare le modeste esigenze della scuola con le alte aspirazioni della scienza è confermata dall'esistenza di altre sue opere le quali si riferiscono al *luogo resoluto* (*ἀναλυόμενος*) degli antichi, cioè — per dirlo con le parole di Pappo (2), — a " quella certa speciale materia preparata ad uso di coloro che, avendo esauriti gli elementi comuni, vogliono addestrarsi nel risolvere dei problemi proposti mediante costruzioni di linee. „ Questa importante collezione di opere abbracciava i *Luoghi solidi* di Aristeo (v. L. I, 79), i

(1) Oltre all'opera tante volte citata, si vegga la *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument* (Bulletin de l'Acad. danoise des Sciences, 1888, p. 127-144), alla quale replicò il Günther nelle *Neue philologische Rundschau*, Jahrg. 1888, p. 394 e seg.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 634.

Digitized by Google

Dati, i *Porismi* ed i *Luoghi superficiali* di Euclide (v. n. 27-29), l'opera sulle *Proporzioni* (n. 50) di Eratostene, finalmente di Apollonio, oltre le *Coniche,* gli scritti (1) di cui ora ci volgiamo a porgere qualche notizia.

Il primo tratta *Della sezione di ragione* (*περὶ λόγου ἀποτομῆς*); è diviso in due libri ed ha per iscopo di risolvere il problema seguente: " date in un piano due rette con un punto su ognuna, un punto esterno ed una ragione, condurre per questo una retta che determini sulle due date rette a partire dai due dati punti due segmenti aventi una ragione eguale alla data. „ Pappo descrive accuratamente il numero delle questioni, dei casi di figura e dei diorismi contenuti in ciascuno dei due libri di Apollonio; e per questa enumerazione, che potrebbe sembrare pedantesca ed inutile, egli merita la nostra gratitudine perchè essa permise ad Edoardo Bernard (1638-1697) di ravvisare in un manoscritto arabo della Biblioteca Bodleiana di Oxford (scritto nel 1235, ma copia di uno che risale circa all'820 dell'E. v.) la versione dell'opera di Apollonio. Il Bernard ne intraprese una traduzione latina, ma dopo averne compiuta neppur la decima parte rinunciò all'impresa; la quale venne poi condotta felicemente a termine nel 1706 da Edmondo Halley (2) e permette a noi di riassumere l'analisi della soluzione del greco geometra nei termini seguenti:

Siano (fig. 11ª) r e s le rette date, A e B i punti dati in esse, e P il punto esterno; siano poi AA' e BB' due segmenti la cui ragione è eguale a quella che devono avere i segmenti cercati AX e BY. Chiamiamo H l'intersezione delle rette s e PA, ed F la projezione di P fatta su questa retta parallelamente a r; finalmente Z sia l'intersezione della retta PXY con la parallela condotta da H a r. Essendo $HZ : AX = PH : PA$

---

(1) Sono ricordati anche nel passo del *Fihrist* riferito nel n. 52.

(2) *Apollonii Pergaei de Sectione rationis Libri duo ex Arabico Ms.^to Latine versi. Accedunt ejusdem de Sectione spatii Libri duo restituti,* Oxonii MDCCVI.

Digitized by Google

il rapporto di HZ ad AX è conosciuto; essendo dato d' altronde il rapporto di AX a BY (perchè è per ipotesi $= AA' : BB'$), è pure conosciuto quello di HZ a BY. Si potrà quindi determinare un segmento BC tale che sia $PF : BC = HZ : BY$; volendo effettivamente costruirlo si determini l' intersezione K di HZ con la retta PA' e si noti che in conseguenza $HZ : AX = HK : AA'$; ma $AX : BY = AA' : BB'$ dunque $HZ : BY = HK : BB'$ epperò per determinare il segmento BC mediante la costruzione di una quarta proporzionale servirà la relazione $PF : BC = HK : BB'$. Trovato BC, si osservi che, essendo $HZ : PF = BY : BC$ e $HZ : PF = HY : FY$ si avrà $BY : BC = HY : FY$ e $BY - BC : BC = HY - FY : FY$ cioè $CY : BC = HF : FY$. Dunque $CY \cdot FY = BC \cdot HF$; d' altronde $FY - CY = FC$; dunque per trovare il punto Y basta determinare sul prolungamento del segmento FC un punto Y tale che il rettangolo delle sue distanze dagli estremi del segmento sia eguale al rettangolo dato $BC \cdot HF$. Il problema della sezione di ragione è dunque ridotto ad uno di applicazione di area; e di tale riduzione è suscettibile comunque siano collocati i punti dati — soltanto potrà accadere che invece d' un *ellisse* si abbia un' *iperbola* (cfr. L. I, n. 24) — ma ad ogni modo esso è virtualmente risoluto.

Altre due opere di Apollonio hanno per iscopo la risoluzione di problemi analoghi a quello testè considerato; esse però andarono perdute nell' originale ed ancor non ne venne scoperta alcuna traduzione; la loro esistenza è affermata ed il loro contenuto delineato da Pappo in uno squarcio (1) che crediamo opportuno riportare quì se non altro nella speranza che cadendo sotto gli occhi di qualche orientalista lo spinga e lo ajuti a collocarsi allo stesso livello di Enrico Bernard:

Sulla Sezione di spazio (περὶ χωρίου ἀποτομῆς) esistono a vero dire due libri, ma anche in questi si trova un problema unico suddiviso in due. E quest' unica

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 640-644.

Digitized by Google

proposizione è simile assai a quella trattata nei libri precedenti (cioè in quelli *Sulla sezione di ragione*) e ne differisce per ciò che mentre in quelli era necessario trovare due segmenti rettilinei di dato rapporto, in questa essi devono comprendere un dato rettangolo. Il problema in questione enunciasi dunque così: Per un punto dato condurre una retta che tagli da due rette date due segmenti, contati da due punti dati su queste rette, i quali comprendono un rettangolo eguale ad un dato. Questa proposizione pure abbraccia molte figure. Il I Libro della *Sezione di spazio* comprende 24 casi di figure, 7 luoghi, 7 diorismi di cui 4 sono relativi a massimi e 3 a minimi: massimo si ha nel secondo caso del primo luogo, nel primo del secondo, nel secondo del quarto e nel terzo del sesto, minimo nel terzo caso del terzo luogo, nel quarto del quarto e nel primo del sesto. Invece il II Libro della *Sezione di spazio* comprende 13 luoghi, 60 casi e tanti diorismi quanto il primo. Il I Libro contiene 48 teoremi ed il secondo 76.

Si trovano in seguito due libri *Sulla Sezione determinata* (περὶ διωρισμένης τομῆς) ove, a somiglianza dei precedenti, si trova una proposizione unica, ma divisa in due parti e che si può enunciare come segue: Secare in un punto una data retta indefinita per modo che dei segmenti compresi fra questo punto e alcuni punti dati sulla retta il quadrato di uno oppure il rettangolo di due abbia un rapporto conosciuto o col quadrato di un altro di quei segmenti o col rettangolo di un altro e di un segmento esterno o finalmente col rettangolo di due fra quei segmenti. Anche per trattare questa proposizione fa mestieri adoperare un grande numero di parole perchè essa si suddivide in molte ed ha diorismi complicatissimi. Il I Libro abbraccia 6 problemi, 16 epitagmi (disposizioni di punti), 5 diorismi, quattro de' quali si riferiscono a massimi ed uno a minimo: massimo si ha nel secondo epitagma del secondo problema, nel terzo del quarto, nel terzo del quinto e nel terzo del sesto; minimo nel terzo epitagma del 3° problema. Il II Libro della *Sezione determinata* contiene 3 problemi, 9 epitagmi e 3 diorismi di cui sono di minimo quelli che s'incontrano nel terzo epitagma del primo problema e nel terzo del secondo e di massimo nel terzo del terzo. Nel I Libro si trovano 27 lemmi e 24 nel secondo. Nei due libri della *Sezione determinata* si hanno in tutto 83 teoremi.

A queste scolorite indicazioni Pappo unisce molte proposizioni che egli destinava a facilitare l'intelligenza del testo (1), ma che invece prestarono un inestimabile aiuto ai numerosi geometri che si accinsero a divinare quegli scritti di Apollonio (2).

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 684-704 lemmi utili per l'intelligenza della *Sezione di ragione* e della *Sezione di spazio*; p. 704-774 per la *Sezione determinata*.

(2) Per la sezione di spazio si vegga, oltre all'opuscolo dianzi citato di Halley: A. Diesterweg, *Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione spatii* (Elberfeld,

Digitized by Google

65. Ora fa mestieri che ci occupiamo di altre tre opere del medesimo autore che, al dire di Pappo, facevano parte, come quelle di cui parlammo nel n. prec., dell'antico *luogo resoluto*, ma di cui, come della maggior parte delle anzidette, è perduta ogni traccia. E forse perfino il ricordo ne sarebbe stato completamente cancellato ove il prelodato commentatore non avesse lasciato una descrizione del loro contenuto nonchè un certo numero di proposizioni destinate ad agevolarne lo studio. A noi dunque non rimane che a lasciare a lui la parola, aggiungendovi del nostro soltanto quale chiarimento:

Vengono poi due libri *Sui contatti* (περὶ ἐπαφῶν), nei quali sembrano trovarsi parecchie proposizioni; noi però le compendieremo in una unica come segue: « data di posizione una terna qualunque composta di punti, rette e circonferenze, condurre una circonferenza che passi pei punti dati (supposto che fra i dati ci siano dei punti) e tocchi tutte le linee date. » Siccome nell'ipotesi di essa entrano parecchi dati simili e dissimili fra loro, così è necessario de-

---

1827) e A. Richter, *Des Apollonius von Perga zwei Bücher vom Raumschnitt* (Halberstadt, 1828). E per la sezione determinata: A. Anderson, *Supplementum Apollonii redivivi* (Parigi, 1612); W. Snellius, *Apollonius Batavus seu exsuscitata Apollonii Geometria* (Lugd. Bat. 1698), cfr. *The two Books of Apollonius Pergaeus concerning determinate section as they have been restored by Willebrodus Snellius by* J. Lawson, *to which are added the same two Books by William Wales* (London, MDCCLXXII); R. Simson, *Opera quaedam reliqua* (Glasgow, 1776) p. 59-313; A. Diesterweg, *Die Bücher des Apollonius von Perga de Sectione determinata* (Mainz, 1822). Lo scritto dello Snellio, il quale abbraccia tutte tre le sezioni, fu riassunto dall'Hérigone nel T. I (Parigi, 1634) del suo celebre *Cursus mathematicus*.

Delle varie soluzioni che ricevettero i problemi di Apollonio trattarono poi assai bene L. F. Ofterdiger nella memoria *Ueber die fünf Aufgaben des Apollonius* (Jahrsheft des Vereins f. Math. und Naturwiss. in Ulm, 1888, p. 21-38) e F. von Lühmann nel lavoro intitolato: *Die sectio rationis, sectio spatii und sectio determinata des Apollonius nebst einigen verwandten geometrischen Aufgaben* (Königsberg, 1882); cfr. anche Zeuthen op. cit. Cap. V. — Chasles ha poi notato che i problemi stessi sono suscettibili di soluzioni semplici ed uniformi quando ad essi si applichino i concetti ed i metodi della moderna geometria; e tale osservazione fu sviluppata poi da questo grande geometra (*Traité de géom. sup.*, II ed., 1880, p. 187) e da Hankel (*Die Elemente der proj. Geometrie*, Leipzig, 1875, p. 128 e seg.) — Riguardo al legame che si può stabilire fra il problema della sezione determinata e la moderna teoria dell'involuzione, si vegga Zeuthen op. cit., p. 197-99.

Digitized by Google

durre separatamente dieci proposizioni differenti, tante essendo le terne che si possono formare con tre generi dissimili. Possono infatti essere dati: I. o tre punti, II. o tre rette, III. o due punti ed una retta, IV. o due rette ed un punto, V. o due punti ed un circolo, VI. o due circoli ed un punto, VII. o due rette ed un circolo, VIII. o due circoli ed una retta, IX. o un punto, una retta ed un circolo, X. o tre circoli. Di questi i primi due sono dimostrati nel IV libro degli *Elementi*, perciò ci esoneriamo dal descriverli; infatti quando sono *dati tre punti* non posti in linea retta il problema non differisce da quello di circoscrivere un circolo ad un dato triangolo e quando sono *date tre rette non parallele nè concorrenti in uno stesso punto* il problema è lo stesso di inscrivere un cerchio in un dato triangolo, che se poi sono date *due rette parallele tagliate da una terza* si ha un problema incluso nel II e che vien trattato prima d'ogni altro. Nel primo libro s'incontrano sei problemi; i due rimanenti, cioè quelli in cui sono dati *due rette ed un circolo* oppure *tre circoli*, sono trattati da soli nel secondo libro, molte essendo le posizioni rispettive che possono presentare i circoli e le rette, ed inoltre essi problemi esigono molti diorismi.... Nei due libri di Apollonio si leggono 21 lemmi e 60 teoremi (1).

I 16 + 7 lemmi che Pappo ci lasciò intorno ai due libri *Sui contatti* (2) resero possibile la divinazione dell'opera perduta a cui si accinsero dei geometri insigni (3); d'altronde il problema principale risolto (per primo?) da Apollonio, quello cioè del circolo tangente a tre altri, ha un importanza intrinseca e permanente, onde ricevette delle soluzioni anche da persone che non eransi proposti di penetrare nell'intimo del pensiero dell'antico geometra — basti ricordare i nomi gloriosi di Eulero

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 644-648.

(2) Ivi p. 820-852.

(3) Vieta, *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *geometria* (Parigi 1600), lavoro che fu lucidamente compendiato dal Cantor (*Vorlesungen* II, p. 543); Marino Ghetaldi, *Supplementum Apollonii Galli seu exsuscitata Apollonii Pergaei tactionium geometricarum pars reliqua* (Venezia, 1607), cfr. *The two Books of Apollonius Pergaeus concerning Tangencies as they have restored by Franciscus Viete and Marinus Ghetaldus, by* J Lawson (II ed. London MDCCLXXI). Inoltre J. W. Camerer, *Apollonius de tactionibus quae supersunt* (Gotha, 1796), P. Gruson, *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen* in appendice a *Geometrische Analysis von John Leslie aus dem Engl. übersetzt* (Berlin, 1822) e Zeuthen op. cit., pag. 380-383. Finalmente si possono citare i lavori della scuola napolitana di cui ho parlato a pag. 61-66 del mio lavoro dianzi ricordato relativo a Nicola Fergola.

Digitized by Google

(1707-1783), di Fuss (1755-1816) e di Gergonne (1771-1859) — e da molti anni venne ritenuto degno di venir esteso allo spazio (1).

66. Più interessante dei precedenti è il passo (probabilmente estratto dai *Luoghi piani* di Apollonio) della *Collezione* dedicato alla penultima delle opere di Apollonio di cui resta da parlare (2). Ivi infatti si legge (3):

I luoghi in generale sono: in parte ἐφεκτικοί (fissi), conformemente a quanto dice Apollonio nell'introduzione dei suoi elementi, che cioè un punto è luogo (posizione) di un punto, una linea di una linea, una superficie di una superficie e un solido di un solido; in parte διεξοδικοί (progredienti) dimodochè egli dice che una linea è luogo di punti, una superficie di linee e un solido di superficie; in parte finalmente ἀναστροφικοί (avvolgentesi), cosicchè egli dice che una superficie è un luogo di punti ed un solido di linee.... *Piani* si chiamano i luoghi di cui ora trattiamo ed in generale quelli che risultano da linee rette e circolari, *solidi* le sezioni coniche cioè o parabole o ellissi od iperbole, finalmente *lineari* tutte le linee che non sono rette, nè circolari, nè di quelle che ora chiamammo sezioni coniche... Certi antichi nel comporre gli elementi ebbero riguardo all'ordine dei luoghi piani; i più recenti non ne tennero conto ed aggiunsero altri luoghi piani come se il loro numero non fosse infinito; orbene io porrò dopo quelli che furono aggiunti poi, prima gli altri con ordine compendiandoli in quest'unica proposizione: I. Si conducano due rette o da un punto dato o da due punti differenti, le quali o coincidano o siano parallele o formino un dato angolo, e di più o abbiano un dato rapporto o comprendano un dato rettangolo; allora, se l'estremo di una di quelle rette descrive un luogo piano dato di posizione, l'estremo dell'altro descriverà pure un luogo piano dato di posizione, dello stesso genere o non dell'altro, e disposto allo stesso modo od in modo differente rispetto alla retta (?) (4). Queste varie cose si verificano a norma delle diversità delle ipotesi. Con questi (teoremi locali) si accordano i tre aggiunti da principio da Carmandro: II. Se di una retta di grandezza data (5) è dato un

---

(1) Fermat, *De conctactibus sphaericis*, 1679 (Oeuvres, T. I, Paris 1891, p. 52-69).

(2) Si ricordi che in tali investigazioni Apollonio venne forse preceduto da Ermotimo da Colofona (L. I, n. 64).

(3) Pappo ed. Hultsch, p. 660-670.

(4) Il lettore moderno ravviserà indubbiamente in questo teorema delle traccie sicure di metodi di trasformazioni geometriche; altrettanto può ripetersi riguardo ad alcuni dei seguenti.

(5) Nella traduzione di Commandino sta scritto *una retta di posizione data*; l'errore fu rilevato e corretto da Fermat, *Oeuvres* (ed. Tannery et Henry, Paris 1891) T. I, p. 19.

Digitized by Google

estremo, l'altro estremo descriverà una circonferenza concava data di posizione. III. Se da due punti dati si spiccano due rette facienti fra loro un dato angolo, il punto ad esse comune toccherà una circonferenza data di posizione. IV. Se di un triangolo dato di grandezza la base è data in grandezza e posizione, il suo vertice descriverà una retta data di posizione. Si hanno poi altri di questo genere: V. Se un estremo di una retta data di grandezza è parallela ad una retta data di posizione descrive una retta pure data di posizione, l'altro estremo percorrerà pure una retta data di posizione. VI. Se si conducono da un certo punto a due rette di posizione date delle rette parallele o concorrenti su una stessa retta o sotto angoli dati, ed o esse hanno fra loro un dato rapporto oppure è data la somma di una di esse con quella che coll'altra ha un dato rapporto: quel punto descriverà una retta data di posizione (1). VII. Se sono date di posizione quantesivogliano rette ed a esse si conducono da un certo punto delle rette sotto dati angoli, e la somma dei due rettangoli di cui uno ha per lati una retta data e una di quelle condotte e l'altro un'altra retta data e un'altra di quelle condotte, è eguale al rettangolo di una terza retta data e di una terza delle condotte *et sic in cateris* (2): quel punto sta su una retta data di posizione. VIII. Se da un punto si conducono delle rette sotto angoli dati a delle parallele date di posizione, e se esse intercettano su questo dei segmenti da punti dati i quali o abbiano un dato rapporto o comprendano un dato spazio siano oppure tali che la somma o la differenza di figure di data specie costruite sulle rette condotte sia eguale ad un dato spazio: quel punto descriverà una retta data di posizione.

Il secondo libro contiene questi teoremi: I. Se da due punti dati si conducono delle rette concorrenti i cui quadrati differiscano per un dato spazio, il punto di concorso di queste rette descriverà una retta data di posizione. II. Se invece quelle rette stanno in un dato rapporto, il punto di concorso descriverà una retta od una circonferenza data di posizione (3). III. Data di posizione una retta ed un punto su di essa dal quale sia condotta una retta limitata, dall'estremo della quale sia condotta una retta perpendicolare alla retta data di posizione: allora se il quadrato della retta che si è condotta eguaglia il rettan-

---

(1) Come nota lo Zeuthen (loc. cit., p. 207) questa proposizione equivale all'equazione di una retta in coordinate cartesiane.

(2) Con queste parole l'Hultsch (op. cit., p. 667) tentò esprimere il concetto espresso dalle parole καί τῶν λοιπῶν ὁμοίως, il cui senso è vago e non permette di formarsi un concetto completamente esatto dell'estensione delle ricerche di Apollonio: cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 24,

(3) Questa proposizione doveva essere almeno in parte nota prima di Apollonio; lo dimostra un passo della *Meteorologia* d'Aristotele (Lib. III, Cap. I, §§ 6-11), passo che, anche se interpolato, è però d'origine assai più antica di Apollonio. Cfr. Tannery, *Géom. grecque*, p. 134-5 e *Revue de Philologie*, 1886.

Digitized by Google

golo di una data retta e del segmento intercetto o fra la perpendicolare ed il punto dato o fra la stessa ed un punto dato sulla retta data di posizione: l'estremità della prima retta che si è condotta toccherà una circonferenza data di posizione. IV. Se da due punti dati si conducono due rette concorrenti e se il quadrato dell'una è rispetto al quadrato dell'altra maggiore che in ragione per un dato spazio (1), il punto di concorso di queste rette toccherà una circonferenza data di posizione. V. Se da quantisivogliano punti si conducono delle rette ad uno stesso punto, e se delle figure di date specie descritte su tutte sono eguali ad un dato spazio, quel punto descriverà la periferia di un circolo dato di posizione. VI. Se da due punti dati si conducono delle rette, e dal loro punto di concorso si conduce una parallela ad una retta data di posizione la quale tagli da un'altra retta data di posizione un segmento di cui un estremo è dato, se la somma delle figure date di specie costruite sulle rette convergenti eguaglia il rettangolo di una retta e del segmento predetto: il punto di concorso delle rette convergenti percorrerà la periferia d'un circolo dato di posizione. VII. In un circolo dato di posizione sia dato un punto, e per questo si conduca una retta su cui si prenda un secondo punto esterno al circolo, e sia il quadrato del segmento compreso da questo punto e dal punto interno al circolo eguale al rettangolo di tutta questa retta e della parte di essa esterna al circolo o soltanto il quadrato o la somma di questo e del rettangolo compreso fra i due segmenti interni: allora il punto esterno descriverà una retta data di posizione. VIII. Se questo punto descrive una retta data di posizione, mentre il circolo non si suppone dato, i punti dalle due parti del punto dato, descriveranno la periferia di un medesimo circolo dato di posizione.

I due libri *Dei luoghi piani* contengono 147 teoremi ossia diagrammi e 8 lemmi.

Coll' ajuto degli otto lemmi che Pappo ci ha lasciati (2) intorno all' opera di Apollonio testè discorsa, tre celebri geometri, Fermat (1608-1665), F. Schooten (1615 circa-1661) e Simson ne recarono a buon fine delle divinazioni le quali, se non valgono a farci dimenticare la lacuna che la scomparsa di essa dalla letteratura geometrica, rappresentano senza dubbio un notevole acquisto fatto dalla matematica (3).

67. L' ultima delle opere di Apollonio ricordata da Pappo s' intitola Περὶ σνεύεων (*Inclinationum libri duo*): essa ha un tema

(1) Riguardo al significato di questa frase si vegga una nota al n. 25.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 852-864.

(3) V. Appendice n. 12-14.

Digitized by Google

che già vedemmo toccato da Ippocrate da Chio (L. I, n. 45) ed Archimede (n. 41), avendo essa per oggetto l'effettuazione mediante retta e circolo di speciali inserzioni. Il contenuto di essa è schizzato da Pappo come segue:

Si dice che s'inclina o si dirige una retta verso un punto se essa prolungata raggiunge questo punto. Ora essendo il problema generale questo: I. Date di posizione due linee collocare fra esse una retta di grandezza data che passi per un punto dato, ed avendo i particolari che si riferiscono a quella retta delle ipotesi differenti, parte piane, parte solide e parte anche lineari, fra le piane vennero scelte quelle di più vasta utilità e furono risoluti questi problemi: II. Dati un semicerchio ed una retta perpendicolare alla sua base, oppure due semicerchii con le basi sulla stessa retta, collocare fra queste due linee una retta di grandezza data diretta verso un angolo del semicerchio. III. Dato un rombo ed un suo lato prolungato, inserire nell'angolo esterno una retta di data grandezza che tenda all'angolo opposto. IV. Dato di posizione un circolo, inserire in esso una corda di data grandezza che tenda ad un punto dato. Dei quali problemi la ripartizione (nei due libri di Apollonio) è la seguente: nel I libro è trattato quello sul semicircolo e la retta, il quale presenta 4 casi, poi quello sul semicircolo, che ha 2 casi, infine quello sul rombo che ne ha pure 2; invece nel II il solo problema dei due semicircoli, la cui ipotesi presenta 10 casi; e vi sono parecchie suddivisioni dioristiche in base alla grandezza data della retta. I due libri *Delle inserzioni* contengono 125 diagrammi o teoremi e 28 lemmi (1).

I $10 + 24$ lemmi lasciati da Pappo (2) intorno all'opera testè descritta abilitarono a restituirla (3).

68. Ma con ciò non abbiamo ancora finito di delineare il quadro dell'opera geometrica di Apollonio.

Per completare il nostro disegno fa mestieri anzitutto ricordare come Simplicio (v. L. I, n. 45) attribuisca al geometra

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 670-672.

(2) Ivi p. 770-820.

(3) Le principali divinazioni sono dovute a Marino Ghetaldi, A. Anderson, C. Huygens e S. Horseley; di esse trattano i n. 9-11 dell'Appendice. Per altri particolari si ricorra a: V. Flauti, *Su due libri di Apollonio Pergeo detti delle inclinazioni e sulle diverse restituzioni di essi* (Mem della Soc. ital. delle Scienze, T. XXV, Parte I, p. 223-236); e riguardo alle generalizzazioni che i problemi di Apollonio ricevettero nella scuola napolitana, si vegga il mio precitato lavoro su Nicola Fergola (p. 38-42).

Digitized by Google

di Perga una quadratura del cerchio col mezzo di una curva speciale denominata *compagna della concoide,* e come Ipsicle (v. n. 20) nella prefazione al preteso *XIV Libro degli Elementi di Euclide* parli di un lavoro del Pergeo avente per tema il confronto fra il dodecaedro e l'icosaedro regolari inscritti nella medesima sfera.

Aggiungiamo ora come Pappo e Proclo (1) nelle loro scritture tante volte da noi sfruttate alludano ad una sua opera Περὶ τοῦ κοχλίου il cui argomento sembra fosse una teoria geometrica dell'elica cilindrica (2), mentre un frammento di Antemio di Tralle recentemente pubblicato (3) ricorda un lavoro del Pergeo *Sopra gli specchii ustorii* (Περὶ πυρίων) il quale forse, ove si ritrovasse, permetterebbe di decidere se gli antichi del periodo greco-alessandrino conoscevano il fuoco della parabola (cfr. n. 58).

Inoltre Proclo stesso a più riprese tiene parola di modificazioni che il Pergeo avrebbe arrecato al metodo didattico di Euclide (4); e precisamente egli avrebbe alterate le definizioni di linea e di angolo (*Proclo-Taylor* I, p. 125 e 142), tentato di dimostrare taluni assiomi (Ib. II, p. 5 e 13) e risolti diversamente i problemi (che nel I Libro degli *Elementi* portano i numeri 10, 11 e 23) di bisecare una retta, di condurre da un punto di una retta la perpendicolare alla retta stessa e di costruire un angolo eguale ad un dato (Ib. II, p. 79, 82 e 128). L'analisi accurata di questi passi dell'antico commentatore condusse il Tannery (5) a congetturare che il geometra di Perga

---

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 1110; Proclo-Taylor I, 129. Cfr. Apollonio ed. Heiberg II, p. 117-8.

(2) P. Tannery, *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bull. des sc. math. et astr., 2e Série, T. V. 1881, I Partie, p. 124-136); *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2e Série, T. IV, 1832, p. 352); *La Géométrie grecque*, p. 166.

(3) Dal Belger in *Hermes*, Vol. XXI, p. 261-284.

(4) Apollonio ed. Heiberg T. II, p. 133-137.

(5) Cfr. i lavori citati nella nota (2).

Digitized by Google

avesse intrapresa una nuova edizione degli *Elementi* di Euclide, nella quale l' ordine preferito dal vecchio Alessandrino sarebbe stato surrogato con altro meno artificioso, ed alla quale egli avrebbe premesso dei prolegomeni per spiegare e discutere postulati ed assiomi; ove nuovi documenti potessero venir citati a sostegno di questa ipotesi (1), Apollonio avrebbe la gloria di avere (per primo?) coraggiosamente battuta una strada che, dopo essere stata abbandonata dopo di lui e per molti secoli, fu percorsa di nuovo dai moderni coll' illusione di essere innovatori; ad ogni modo, anche se le citazioni di Proclo si riducessero alle modeste proporzioni di estratti delle lezioni orali di Apollonio, rimarrebbe indiscutibilmente assodato che, fin dai tempi che immediatamente seguono Euclide, il sistema da lui seguito nell' esporre i principii della geometria non era ritenuto come d' indiscutibile perfezione (2).

Da ultimo, fra le soluzioni del problema di Delo che Eutocio ha conservate nel suo prezioso commento al II dei libri di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* havvi la seguente che viene attribuita ad Apollonio: (3)

Le due rette fra le quali bisogna inserire due medie proporzionali siano (fig. 12ª) BA e AΓ facienti in A un angolo retto. Centro B e raggio (eguale a) AΓ si descriva una circonferenza KΘΛ e poi centro Γ e raggio (eguale a) AB si descriva una seconda circonferenza MΘN la quale seghi in Θ la circonferenza KΘΛ,

---

(1) Che tale conclusione sia ancora lontana dal momento di perdere il carattere ipotetico è opinione che noi avevamo anche prima che vedessimo la medesima espressa da l' Heiberg (*Philologus*, T. XLIII, p. 488-9).

(2) A questo proposito mi piace riferire la seguente osservazione giustissima del Tannery: « Nous sommes très-tentés en thèse générale de les (*cioè* les courants intellectuels auquels ont dû obéir les mathématiciens de l' antiquité) considérer comme ayant, à très peu près, suivi un sentier unique, une seule direction, celle d' Euclide. Il y a là une illusion produite par ce qui c' est passé seulement à l' époque de la décadence, sous l' empire romain. » (*L' arithmétique des Grecs dans Héron d' Alexandrie.* Mem. de la Soc. de Bordeaux, 2ᵉ Série, T. IV, 1882, p. 164).

(3) Archimede ed. Heiberg III, p. 76-78, Apollonio ed. Heiberg II, p. 104-5. Cfr. anche Reimer, *Historia* citata, p. 124 e Montucla, *Histoire des recherches* ecc., p. 236. Cfr. Zeuthen op. cit., p. 259.

Digitized by Google

e si conducano ΘA, ΘB, ΘΓ. BΓ sarà allora un parallelogramma e AΘ ne sarà una diagonale. Si bisechi AΘ in Ξ e col centro in Ξ si descriva una circonferenza che seghi AB e AΓ prolungate in Δ e E per modo che questi punti siano (allineati con Θ ed) equidistanti da Ξ (1).

69. Di un altro lavoro semi-aritmetico di Apollonio abbiamo già (n. 20) incidentalmente annunziata l'esistenza; ne è scopo una generalizzazione o meglio un ulteriore sviluppo di quella teoria che, fondata da Pitagora, coltivata da Teeteto e perfezionata da Euclide, si può oggi agevolmente studiare nel X libro degli *Elementi*. Per qual cammino il geometra di Perga abbia raggiunto tale intento ci è ignoto, perchè, malgrado una rapida citazione di Proclo (2), lo scritto apolloniano era caduto in completo oblio, allorquando verso la metà del secolo attuale il Woepcke credè ravvisare in un antico manoscritto arabo delle indicazioni del contenuto di esso, anzi egli le ritenne sufficienti per ricostruire il lavoro perduto (3). Ma prima di ammettere l'identità di materia fra l'originale e la divinazione sarebbe indispensabile togliere un dubbio che si affaccia, quello cioè di sapere se nel manoscritto citato sia indicato soltanto *una maniera* per accrescere i risultati ottenuti da Euclide oppure proprio *la maniera* preferita da Apollonio (4).

---

(1) Le medie cercate sono i segmenti BΔ e ΓE; lo si dimostra facilmente considerando dei triangoli simili mediante ragionamento che Eutocio espone a proposito della soluzione del problema di Delo data da Erone d'Alessandria e Filone da Bisanzio e che noi faremo conoscere trattando di questi geometri.

(2) Proclo-Taylor I, p. 106. Da Proclo si apprende che il lavoro di Apollonio era così elevato che doveva escludersi da quelle cose che fanno parte degli elementi. Si aggiunga che mentre, al dire di Proclo, gl'irrazionali euclidei si chiamavano *ordinati* (τεταγμένος), quelli di Apollonio si dicevano *non ordinati* (ἄταχτος).

(3) Woepcke, *Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles d'après les indications d'un manuscrit arabe* (Comptes-rendus, T. XXXVI, 1853, pag. 298 e Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, T. XIV, 1856, p. 553-568). V. anche Apollonio ed. Heiberg, T. II, p. 119-124.

(4) A chiarir meglio il nostro dubbio aggiungiamo che le ricerche di Euclide si prestano a due generalizzazioni immediate: essendosi infatti l'autore degli *Elementi* occupato di *binomii* i cui termini sono irrazionali quadratici, per seguire le

Digitized by Google

Che d'altronde Apollonio, benchè ritenuto *geometra per eccellenza,* non abbia trascurata la scienza dei numeri, avremo occasione di vedere nell' ultimo libro della presente storia, come altrove vedremo che egli non sdegnò far servire il proprio possente ingegno alla spiegazione matematica dei fenomeni naturali. Questi fatti confermeranno l' opinione che il nostro geometra possedesse quella versatilità d'ingegno, quella poliedricità d' intelligenza che non a torto vengono ritenute come doti caratteristiche del genio; niuna meraviglia adunque se, allorquando il nostro secolo assistette attonito al rinnovellarsi di tutta la geometria pura grazie alle idee fecondissime emesse da Steiner, per trovare chi potesse venire a lui paragonato per originalità di vedute e vastità di concezioni, si dovette ricorrere a colui che diede rinomanza imperitura e mondiale alla piccola città di Perga e segnò l'apogeo della geometria greca.

VI.

I Geometri minori del periodo Greco-Alessandrino.

70. In un' èra quale è quella in cui vissero ed insegnarono Euclide, Archimede ed Apollonio, il campo della ricerca geometrica doveva rivelarsi così ubertoso in frutti succulenti e gustosi che — date anche le condizioni intellettuali e politiche dell' epoca — dovevano pullulare attorno a quei sommi scienziati dei pensatori più modesti prefiggentisi di arricchire con una pietra od almeno di abbellire con un fregio o assodare con una colonna il grandioso edificio che giganteggiava dinanzi ai loro

---

sue orme o si possono considerare dei *polinomii* di analoga composizione, oppure si può ampliare il campo dell' aritmetica coll' introdurvi dei radicali con indici superiori al secondo; quali delle due cose abbia preferito fare Apollonio o se altre estensioni abbia immaginate, sono questioni tuttora aperte.

Digitized by Google

occhi. Ed infatti (anche prescindendo da Eratostene ed Ipsicle dei quali già trattammo) le lettere che accompagnano le produzioni superstiti di Archimede ed Apollonio ci tramandarono i nomi di Conone di Samo e Dositeo, amici del Siracusano, di Eudemo di Pergamo (1) amico del Pergeo, di Naucrate, (che la fantasia degli Arabi trasformò nel padre di Euclide; v. n. 5), di Nicotele, di Trasideo, di Carmandro, uomini tutti che dovevano essere infiammati di nobile ardore per le investigazioni geometriche. Ma dei risultati a cui essi arrivarono non ci è giunta alcuna notizia; e di quanti altri neppure il nome si sarà sottratto all' ingiuria del tempo, all' obliosa indifferenza dei posteri! Havvi però un piccolo gruppo di investigatori di cui alcuni lavori geometrici ci pervennero per via più o meno indiretta e che l'odierna critica storica assegna appunto al periodo che andiamo studiando: di tali lavori raccoglieremo ora con religiosa cura i residui che appajono siccome le reliquie di un immenso naufragio.

Nicomede.

71. Nicomede, il geometra di cui anzitutto ci occuperemo, visse probabilmente fra il 250 ed il 150 a. C. (2), e deve la sua celebrità all' invenzione di una curva che si suole chiamare *concoide* (o anche, secondo alcuni, *cocloide*) e che i Greci chiamarono *κογχοειδὴς γραμμή* (da *κόγχη conchiglia*), e di cui ge-

(1) P. Tannery pensa (v. *Bulletin des sciences math.*, 2e Série, T. XV, 1891, p. 222 nota) che il re Attalo I (cfr. n. 59, nota) lo avesse legato alla propria persona in modo analogo a quello usato dai Tolomei per gli scienziati del Museo d'Alessandria.

(2) Bretschneider loc. cit. p. 180, Cantor *Vorlesungen* I, p. 302, Tannery, *Notes pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité*, § IX (Bull. des sc. math. et astr., T. VIII, 1e Partie, 1884). Dall' opinione da noi adottata non discordano il Reimer (loc. cit., p. 161), che fa vivere Nicomede nel II sec. a C., e Montucla (*Histoire des recherches* ecc., p. 180) che dice avere egli fiorito 180 anni a. C.

Digitized by Google

nesi, costruzione e proprietà vengono descritte da Pappo nel modo seguente:

Si consideri una retta $\alpha\beta$ (fig. 13ª) e ad essa una perpendicolare $\gamma\delta\zeta$; si prenda su questa ad arbitrio un punto ε; e tenendo fisso questo punto si faccia scorrere la retta $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ sulla retta $\alpha\delta\beta$ attorno al punto ε per modo che il punto δ si muova sempre sulla $\alpha\beta$. Eseguendo il movimento dalle due parti della perpendicolare, si vedrà il punto γ descrivere una certa linea $\lambda\gamma\mu$ dotata delle seguenti proprietà. Condotta una retta qualunque $\eta\vartheta$ dal punto ε alla linea, la porzione di essa intercetta fra questa e la retta $\alpha\beta$ è eguale alla retta $\gamma\delta$; essendo infatti immobili il punto ε e la retta $\alpha\beta$, se il punto δ viene in η, la retta $\gamma\delta$ coinciderà con $\eta\vartheta$ e il punto γ cadrà sul punto ϑ; sono dunque eguali $\gamma\delta$ e $\eta\vartheta$. Similmente se si conduce un altra retta dal punto ε, la parte di essa intercetta fra la linea e la retta $\alpha\beta$ riuscirà eguale alla retta $\gamma\delta$. Perciò $\alpha\beta$ si chiama *base* ($\kappa\alpha\nu\acute{\omega}\nu$), il punto ε *polo* ($\pi\acute{o}\lambda o\varsigma$), e la retta $\gamma\delta$ *intervallo* ($\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$), perchè a questa retta sono eguali tutte le rette condotte alla linea $\lambda\gamma\mu$ nel modo anzidetto: questa linea si chiama linea *concoide prima* perchè ne esistono una *seconda,* una *terza* ed una *quarta* che sono di uso in altri teoremi.

Questa linea si può descrivere col mezzo di uno strumento; essa si accosta sempre più alla base, vale a dire: di tutte le perpendicolari che si possono condurre da un punto qualunque della linea $\lambda\gamma\vartheta\mu$ alla retta $\alpha\beta$ la massima è $\gamma\delta$ e una perpendicolare più vicina a $\gamma\delta$ è maggiore di una più lontana; che una retta qualunque cadente fra la retta fissa e la concoide prolungata sechi la concoide dimostrò Nicomede stesso, mentre noi nel commento all'*Analemma* di Diodoro esponemmo l'applicazione di quella curva alla trisezione dell'angolo. Ora da quanto abbiamo già detto è evidente che dato un angolo qualunque $\mu\alpha\beta$ (fig. 14ª) ed un punto esterno, per esempio γ, è possibile condurre una retta $\gamma\mu$ per modo che la parte $\kappa\eta$ di essa intercetta fra i lati dell'angolo sia eguale ad una data retta. Si conduca infatti dal punto γ alla retta $\alpha\beta$ la perpendicolare $\gamma\vartheta$ e la si prolunghi finchè $\vartheta\delta$ riesca eguale alla retta data e preso γ come polo, il dato intervallo, cioè $\delta\vartheta$, e $\alpha\beta$ per base si descriva la prima concoide $\varepsilon\delta\mu$; essa, per quanto già dicemmo, incontrerà la retta $\alpha\mu$. La incontri in μ e si conduca la retta $\gamma\mu$: sarà in conseguenza la parte di essa $\kappa\mu$ eguale alla retta data (1).

Le proposizioni surriferite sembrano desunte da una esposizione completa delle proprietà della concoide che avrebbe fatta Nicomede, alla quale sembra alludere Proclo (2), ma che non è giunta fino a noi. Che cosa siano le altre tre concoidi di cui fa menzione Pappo nel brano trascritto non è detto esplicitamente

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 242-6.

(2) Proclo-Taylor II, 146.

Digitized by Google

da alcuno, ma ci sembra estremamente verosimile la congettura che il commentatore pensasse alla curva che nasce con una costruzione analoga a quella che serve per la prima concoide coll'unica differenza di portare l'intervallo *dalla base verso il polo:* tal curva è infatti suscettibile di tre forme differenti (può cioè avere un punto doppio, una cuspide o essere apparentemente priva di punti multipli) secondochè l'intervallo è maggiore, eguale o minore della distanza del polo dalla base (1). Più facile è riempire la lacuna lasciata dalle troppo vaghe indicazioni che si leggono nello squarcio riferito intorno all'uso della prima concoide nel problema della trisezione dell'angolo (quest'applicazione è da Proclo (2) attribuita a Nicomede stesso, mentre Pappo sembra vantarla (3) come opera propria); giacchè in un altro passo della *Collezione* si trova il seguente procedimento per trisecare un angolo:

Sia dato (fig. 15ª) anzitutto un angolo acuto $\alpha\beta\gamma$ e da un punto qualunque α della retta $\alpha\beta$ si conduca la perpendicolare ad $\alpha\gamma$; completato il rettangolo $\alpha\gamma\beta\zeta$ si prolunghi $\zeta\alpha$ fino in ε per modo che, condotta $\beta\varepsilon$, il segmento di questa retta compreso fra $\varepsilon\alpha$ e $\alpha\gamma$ sia eguale al doppio di $\alpha\beta$; fatto ciò, dico che l'angolo $\varepsilon\beta\gamma$ è la terza parte dell'angolo $\alpha\beta\gamma$. Bisechiamo infatti la retta $\delta\varepsilon$ in η e conduciamo $\alpha\eta$. Riusciranno fra loro eguali le rette $\delta\eta, \eta\alpha, \varepsilon\eta$ onde $\delta\varepsilon = 2\alpha\eta$. Ma per costruzione è $\delta\varepsilon = 2\alpha\beta$, dunque $\alpha\beta = \alpha\eta$ e ang. $\alpha\beta\delta$ = ang. $\alpha\eta\beta$. Ora ang. $\alpha\eta\beta$ = 2 ang. $\alpha\varepsilon\beta$ = 2 ang. $\delta\beta\gamma$; dunque è pure ang. $\alpha\beta\delta$ = 2 ang. $\delta\beta\gamma$. Se quindi bisecheremo l'angolo $\alpha\beta\vartheta$, l'angolo $\alpha\beta\gamma$ riuscirà diviso in tre parti eguali. — Se l'angolo dato $\alpha\beta\gamma$ è retto (fig. 16ª) (4), prenderemo sulla retta $\beta\gamma$ un punto qualunque γ e descriveremo su $\beta\gamma$ come base un triangolo equilatero $\beta\vartheta\gamma$: diviso per metà l'angolo $\delta\beta\gamma$ avremo diviso l'angolo $\alpha\beta\gamma$ in tre punti eguali. — Se

(1) Cfr. Cantor *Vorlesungen* I, 302 e Tannery citate *Notes*, ove è ritenuta vera l'ipotesi del testo. Come è noto, i moderni considerano in ogni caso i due rami di curva come formanti una curva unica; la quale è di quarto ordine, passa per i punti ciclici del piano ed ha per punti doppii il polo ed il punto all'infinito della base. Una costruzione de' suoi flessi fu indicata nel 1654 da Huygens in fine del lavoro *De circuli magnitudine inventa* (cfr. Christiani Hugenii *Opera Varia*, Vol. II, 1724).

(2) Proclo-Taylor II, 73.

(3) A torto secondo il Cantor (*Vorl.* I, p. 305).

(4) Tale trisezione era probabilmente nota già ai Babilonesi; v. Cantor *Vorlesungen* I, pag. 90.

Digitized by Google

finalmente l'angolo $\alpha\beta\gamma$ è ottuso (fig. 17ª), conduremo $\beta\delta$ perpendicolare a $\beta\gamma$ e dall'angolo $\delta\beta\gamma$ separeremo la terza parte $\delta\beta\zeta$ e similmente dall'angolo acuto $\alpha\beta\delta$ separeremo la terza parte $\delta\beta\varepsilon$ (come fu dimostrato prima); allora $\varepsilon\beta\zeta$ sarà eguale alla terza parte dell'angolo $\alpha\beta\gamma$ (1).

È chiaro pertanto come il problema sia così ricondotto ad un problema d'inserzione, il quale si risolve immediatamente costruendo (fig. 15ª) una concoide avente β per polo, $\alpha\gamma$ per base e il doppio di $\alpha\beta$ per intervallo.

72. Assai più riposta è l'applicazione della concoide alla inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, della quale porgono notizie, in sostanza concordanti, Pappo in due brani della *Collezione* (2) ed Eutocio. Nel commento di questo al II Libro di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* si legge infatti, in seguito ad un sommario della genesi e delle proprietà di quella curva (3), quanto segue:

.... siano date due rette fra loro perpendicolari $\Gamma\Lambda$, ΛA (fig. 18ª) fra le quali si debbano inserire due medie proporzionali. Si completi il rettangolo $AB\Gamma\Lambda$ e si bisechino in Δ, E le due rette AB, $B\Gamma$ e condotta $\Delta\Lambda$ la si prolunghi sinchè incontri in H la retta $B\Gamma$; si conduca da E la perpendicolare EZ a $B\Gamma$ e sia la retta ΓZ eguale ad $A\Delta$, poi si tracci ZH e a questa la parallela $\Gamma\Theta$. Nell'angolo dato $K\Gamma\Theta$ si conduca dal punto dato Z la retta $Z\Theta K$ per modo che si abbia $\Theta K = A\Delta = \Gamma Z$. Che ciò si possa eseguire mediante la concoide fu già dimostrato. Condotta la retta $K\Lambda$ la si prolunghi ed il prolungamento incontri in M il prolungamento di AB. Dico essere $\Gamma\Lambda : K\Gamma = K\Gamma : MA = MA : M\Lambda$. Essendo infatti $B\Gamma$ bisecata in E ed a essa aggiunta ΓK, sarà (Eucl. II, 6) $\overline{BK \times K\Gamma} + \overline{\Gamma E}^2 = \overline{EK}^2$. Si addizioni ai due membri $\overline{EZ}^2$. Verrà $\overline{BK \times K\Gamma} + \overline{\Gamma E}^2 + \overline{EZ}^2$, cioè $\overline{BK \times K\Gamma} + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{KZ}^2$. Ed essendo $MA : AB = M\Lambda : \Lambda K$, $M\Lambda : \Lambda K = B\Gamma : \Gamma K$ sarà pure $MA : AB = B\Gamma : \Gamma K$. È poi $A\Delta = \frac{1}{2} AB$ e $\Gamma H = 2B\Gamma$ [perchè $\Lambda\Gamma = 2\Delta B$]. Sarà quindi anche $MA : A\Delta = \Gamma H : \Gamma K$. Ma $H\Gamma : \Gamma K = Z\Theta : \Theta K$, perchè HZ, $\Gamma\Theta$ sono parallele. [Perciò $MA : A\Delta = Z\Theta : \Theta K$]. Dunque componendo $M\Delta : \Delta A = ZK : K\Theta$. Ma essendosi supposto $A\Delta = \Theta K$, è $\Gamma Z = A\Delta$. E così pure $M\Delta = ZK$ e $\overline{M\Delta}^2 = \overline{ZK}^2$. Ora è $\overline{M\Delta}^2 = \overline{BM \times MA} + \overline{\Delta A}^2$ (Eucl. II, 6) e si è dimostrato che $\overline{ZK}^2 = \overline{BK \times K\Gamma} + \overline{\Gamma Z}^2$, è poi $\overline{A\Delta}^2 = \overline{\Gamma Z}^2$ essendo per ipotesi $A\Lambda = \Gamma Z$. Dunque è pure $\overline{BM \times MA} = \overline{BK \times K\Gamma}$. Perciò

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 274-276.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 58-64, 246-50.

(3) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 114-122.

Digitized by Google

MB : BK = KΓ : AM. Ma BM : ΛBK = Γ : ΓK; ed anche ΓΛ : ΓK = ΓK : AM. Ma è pure ΛΓ : ΓK = MA : AΔ (Eucl. VI, 4). Dunque ΛΓ : ΓK = ΓK : AM = AM : AΛ. (1)

Questi pochi frammenti dei lavori geometrici di Nicomede inducono a lamentare che null'altro ci sia noto della sua vita intellettuale; a provare infatti quanto sia utile la linea che egli ha scoperta ricorderemo come Newton (2) abbia dimostrato che non soltanto i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, ma in generale qualunque questione geometrica di terzo o quarto grado si possa risolvere coll'ajuto della concoide; questa importante scoperta, unita all'osservazione intorno alla facilità di descriverla meccanicamente, consigliò al celebre autore dei *Principia* di proporre di ascrivere questa curva, insieme alla retta ed alla circonferenza, fra gli ausiliari costantemente a disposizione del geometra: ciò valga a convincere il lettore che la concoide non ha perduto agli occhi dei moderni tutti quei pregi che di tanta considerazione la rendevano degna nell'antichità (3).

Diocle.

73. Un altro dei geometri di second'ordine che è costume ascrivere al periodo storico che ora ci occupa è Diocle. Siccome il suo nome non è ricordato da Pappo, così il Montucla (4) credette fosse a questo posteriore; ma questa opinione fu (a parer nostro vittoriosamente) combattuta dal Reimer (5) e poi dal

(1) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 122-126.

(2) Newton, *Arithmétique universelle, trad.* Beaudeux (Paris, An. X, 1802) T. II, p. 52 e seg.; cfr. Montucla *Hist. des recherches* etc. p. 236 e 262.

(3) La definizione della concoide è suscettibile di immediata generalizzazione; per giungervi basta sostituire alla retta base una linea qualsiasi. Era ciò stato osservato dagli antichi, almeno per il caso di una base circolare e del polo posto su di essa, come inclina ad ammettere M. Curtze? (v. *Reliquiae Copernicanae* in Zeit. f. Math. u. Phys. T. XX, 1875, p. 221-248).

(4) *Hist. des math.*, T. I, 2ᵉ ed., p. 339, *Histoire des recherches* etc. p. 236.

(5) *Historia* citata p. 174-180.

Digitized by Google

Tannery (1), i quali ritengono Diocle per anteriore a Gemino, nonchè dal Bretschneider (2), che lo ascrive ad una categoria di scrittori sulle matematiche applicate che vissero e studiarono in Alessandria fra il 250 ed il 100 a. C.

Che egli sia posteriore ad Archimede, sembra dimostrato dal fatto che Eutocio estrae (3) da un' opera di Diocle intitolata *περὶ πυρείων* una soluzione del quinto fra i problemi del II de' libri del Siracusano *Su la sfera ed il cilindro,* soluzione che consiste nel risolvere coll' ajuto di due coniche quel problema al quale Archimede stesso aveva ridotto (v. n. 39) la divisione di una sfera in due parti aventi fra loro un dato rapporto: se ci dispensiamo dal riferire per esteso tale non ispregevole complemento a quell' opera archimedea, è che la questione a cui si riferisce non ci sembra dotata di capitale importanza (4).

Ma Eutocio toglie dalla medesima opera di Diocle un procedimento nuovo ed assai notevole per inserire due medie proporzionali fra due rette date, al quale (se non altro per essere desso fondato sulla considerazione di una nuova curva) val la pena di accordare quì un posto onorevole:

In un circolo si traccino due diametri AB , ΓΔ fra loro perpendicolari (fig. 19ª), dalle due parti di B si taglino due archi eguali BE e BZ, e per Z si conduca ZH parallela ad AB. Si congiunga poi Δ a E. Dico che fra le linee ΓH , HΘ sono medie proporzionali ZH , HΔ. Per dimostrarlo si conduca per E la EK parallela ad AB. Sarà in conseguenza EK = ZH e ΓK = HΔ: conduciamo infatti le rette che uniscono il centro Λ a E e Z; essendo ang. ΓΛE = ang. ZΛΔ, gli angoli in K e H retto e ΛE = ΛZ, i lati e gli angoli dei due triangoli KΛE e ΛHZ saranno tutti eguali, epperò eguali saranno pure i residui ΓK e HΔ. Essendo poi ΔK : KE = ΛH : HΘ e ΔK : KE = KE : KΓ (perchè KE è media proporzionale fra ΔK e KΓ) sarà ΔK : KE = KE : KΓ = ΔH : HΘ. Ora ΔK = ΓH , KE = HZ , KΓ = HΔ, dunque è pure ΓH : HZ = ZH : HΔ = ΔH : HΘ, come si era enunciato. — Se quindi dalle due parti di B prendiamo due archi eguali

(1) *Notes* citate, § IX e *Géom. grecque*, p. 60.

(2) Op. cit., p. 181.

(3) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 189 e seg.

(4) Il lettore lo troverà esposto e commentato nell' opera di Zeuthen, p. 256-8.

Digitized by Google

BM e BN, per N guidiamo la NΞ parallela ad AB e poi uniamo Δ ad M, riusciranno NΞ e ΞΔ medie proporzionali fra ΓΞ e ΞO. Perciò se in modo analogo condurremo delle parallele fra B e Δ, e porteremo da B verso Γ degli archi eguali agli archi che queste intercettano sulla circonferenza dall'altra parte a partire da B, e congiungeremo Δ ai punti ottenuti mediante rette analoghe a ΔE, ΔM, le parallele condotte fra B e Δ le secheranno in certi punti (analoghi ai Θ, O della figura), i quali formeranno entro il circolo una certa linea, tale che preso su di essa un punto arbitrario e condotto per questo la parallela a ΛB, la linea condotta e la porzione che essa taglia dal diametro a partire dal punto Δ saranno medie proporzionali fra il segmento che quella taglia sul diametro a partire da Γ ed il segmento di parallela compreso fra la linea anzidetta ed il diametro ΓΔ.

Siano or date (fig. 20ª) due rette A, B fra cui si debbono inserire due medie proporzionali. Si segni un circolo del quale ΓΔ e EZ siano due diametri fra loro perpendicolari, ed in esso si tracci la linea ΔΘZ dianzi costruita come luogo continuo di punti, e sia A : B = ΓH : HK. Condotta la retta ΓK, il suo prolungamento seghi quella linea in Θ. Per Θ si segni la ΛM parallela a EZ. Allora in forza di quanto precede MΛ e ΛΔ saranno medie proporzionali fra ΓΛ e ΛΘ. Ora, essendo ΓΛ : ΛΘ = ΓH : HK e ΓH : HK = A : B, se fra A e B troviamo due rette N e Ξ che con queste e fra loro stiano nei rapporti di ΓΛ, ΛΔ, ΛΘ, si arriverà a due medie proporzionali N e Ξ fra A e B: le quali appunto bisognava trovare. (1)

I due rami di curva simmetrici rispetto al diametro ΔΓ esistenti entro il cerchio considerato erano le uniche porzioni della curva note agli antichi geometri; essi assieme all'arco circolare EΓZ limitano un'area piana che ha una forma non molto dissimile da quella di una foglia d'edera (v. la parte tratteggiata della fig. 20ª); da questo fatto si trasse l'illazione che la curva sfruttata da Diocle fosse la medesima che Pappo due volte (2) ascrive fra i luoghi lineari, cioè (n. 66) fra le linee che non sono rette, nè circolari, nè ottenibili secando con un

---

(1) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 78-82. Cfr. ib. p. 152.

Notiamo che se (fig. 19ª) si conduce in Γ la tangente al circolo dato e se ne determina la intersezione Φ con la retta ΔE, risulterà ΔΘ = EΦ e si arriverà quindi subito alla più nota generazione della curva di Diocle, generazione che permette di trovare con estrema facilità l'equazione della curva e di dedurne che essa è una curva di terzo ordine passante pei punti ciclici del piano e pel punto all'infinito del diametro ΔΓ.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 54 e 270.

Digitized by Google

piano un cono circolare retto, curva che egli designa col nome di *cissoide* (*κισσοειδὴς γραμμή* da *κισσός edera*). Della stessa curva parla anche parecchie volte Proclo (1), il quale la chiama pure con quel nome ed inoltre ne rileva le più salienti proprietà (quali sarebbero il formare essa un angolo con sè medesima, l'essere priva di centro, il non poter venire prolungata, ecc.). Siccome però nessun antico scrittore associa il nome di cissoide a quello di Diocle (2), così, se si può considerare per estremamente probabile che la curva che i Greci chiamavano cissoide fosse quella stessa di cui Diocle additò l'applicabilità al problema di Delo, è innegabile che tale identificazione manca di certezza matematica (3): agli storici dell'avvenire è forse riserbato di chiarire questo punto e di gettare qualche sprazzo di luce sulla vita di Diocle.

Intanto giova notare quì che tredici anni or sono si credette di essere giunti in possesso di un nuovo documento intorno al geometra di cui ci stiamo occupando. Infatti nel *Cod. Ambrosianus L. 99*, che deriva dal monastero di Bobbio, esistono dei frammenti di un'opera greca appartenente al Sec. VIII; una parte di essi venne da tempo fatta conoscere dal Mai (4), ma altre due pagine di contenuto matematico furono pubblicate soltanto nel 1881 da C. Belger (5), il quale le ritenne opera di un bizantino vissuto nel secolo VI, cioè poco prima o poco dopo Antemio di Tralle, il celebre meccanico della cui eccezionale abilità è monumento imperituro la chiesa di Santa Sofia a Costantinopoli. Invece C. Wachsmuth ed M. Cantor (6) — al

---

(1) Proclo-Taylor T. I, p. 133, 144, 162, 171 e 180, T. II, p. 8.

(2) Infatti Pappo e Proclo parlano della cissoide e non del suo inventore, mentre Eutocio, come vedemmo, non dà alcun nome alla curva di Diocle.

(3) Cfr. P. Tannery, nell'ultimo § delle precitate *Notes*.

(4) *Ulphilae partis ineditae specimen.* (Mediol. 1819).

(5) *Ein neues Fragmentum mathematicum Bobiense* (Hermes, Vol. XVI, 1881, p. 271-384).

(6) *Ueber das neue Fragm. math. Bob.* (ib. p. 637-642).

Digitized by Google

quale si deve una spiegazione soddisfacente del senso matematico di quello squarcio — si schierarono fra i propensi ad ammettere che questo fosse un estratto dell'opera di Diocle *περὶ πυρείων*. A tale ipotesi si dichiarò favorevole lo Zeuthen (1), malgrado gli argomenti fatti valere contro di essa da un celebre ellenista suo compatriotta: infatti l'Heiberg (2), dopo avere messo in piena luce il significato matematico di quel frammento e rilevato il valore che ad esso deriva dall'essere l'unico scritto greco in cui si parli del fuoco di una parabola (3), confermò l'osservazione del Belger, che lo stile in cui è scritto appartiene all'epoca bizantina, e giunse a congetturare che ne fosse autore lo stesso Antemio: supposizione questa che sembra avere più tardi ottenuto il consenso dello stesso Cantor (4). Il brano considerato non può pertanto, a parere dei più, essere di alcun sussidio nell'assegnare la parte che ebbe Diocle nella storia della matematica, può soltanto venire utilizzato — come noi facemmo nel n. 68 — per ottenere un dato nuovo e non ispregevole sopra Apollonio, la notizia cioè che questi si è occupato anche di specchii ustorii.

Perseo.

74. La concoide e la cissoide ripetono l'origine loro dai problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo che esse abilitano a risolvere; altrettanto non può ripetersi di altre curve notevoli di cui ora ci occuperemo e che probabilmente furono immaginate generalizzando il concetto che guidò all'invenzione delle sezioni coniche. Mentre di tali curve parla

---

(1) Op. cit. p. 374-377.

(2) *Zum Fragm. math. Bob.* (Zeit. f. Math. u. Phys., T. XXVIII, 1883. Hist.-lit. Abth., p. 121-129).

(3) È ivi dimostrato il teorema: una tangente ad una parabola fa angoli eguali col raggio vettore che va al punto di contatto e coll'asse.

(4) *Vorlesungen*, 2ª Aufl. (Leipzig 1894) I Band, p. 458.

Digitized by Google

più d'un antico scrittore, il nome di Perseo che primo le considerò è noto soltanto per merito di Proclo; ma le notizie da questo somministrate sono così scarse che, non soltanto riguardo alla personalità di Perseo, ma perfino riguardo all'epoca in cui egli visse i dati sicuri sono estremamente deficienti ed in conseguenza le opinioni discordi; infatti Chasles (1) colloca Perseo avanti Euclide, e precisamente tra Aristeo e Menecmo (2), Bretschneider (3) e Cantor (4) lo fanno fiorire circa 130 anni a. C., mentre Tannery (5) propende a porlo vicino ad Euclide prima di Apollonio; quanto a noi, crediamo di accostarci ai modi di pensare di questi tre ultimi, e, non trovando ragioni per accordare la preferenza ad alcuno, ci limitiamo a ritenere che Perseo appartenga al periodo greco-alessandrino (6), e passiamo a dir qualche parola intorno alle curve di cui gli viene attribuita la scoperta.

Da Proclo ed Erone (7) si apprende che gli antichi designavano col nome di *spira* (*σπεῖρα*) o *anello* (*κρίκος*) la superficie generata dalla completa rotazione di un circolo attorno ad una retta tracciata nel suo piano (8), ossia, come essi preferivano esprimersi, dalla rivoluzione completa di un cerchio avente il centro su un secondo cerchio e il piano perpendicolare al piano di questo. Una spira dicevasi *aperta* (*διεχής*) se presentava un

---

(1) *Aperçu historique*, 2ª éd., p. 8 e 272.

(2) Con Chasles sembra accordarsi il Dilling il quale cita Perseo fra Ermotimo e Menecmo (l. c. p, 26).

(3) Op. cit. p. 175.

(4) *Vorlesungen* I, p. 307.

(5) *Notes* citate §. VI.

(6) Di quest'avviso è pure Felix Müller (*Hist.-etymologische Studien über math. Terminologie*, Berlin 1887, p. 27), che fa Perseo contemporaneo di Diocle e Nicomede,

(7) *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae* (ed. Hultsch, Berlin 1864), p. 98.

(8) Sono dunque le superficie oggi chiamate *tori*.

Digitized by Google

vuoto, *chiusa* (*συνεχής*) se presentava un contatto interno (1), *rientrante* (*ἐπαλλάττουσα*) quando l'asse di rotazione tagliava il cerchio generatore. Segando una spira con piani paralleli all'asse di rotazione si ottengono le *linee spiriche;* esse furono ottenute per la prima volta da Perseo, il quale commemorò in poesia il suo ritrovato scrivendo:

> Per avere trovate mediante sezioni cinque e tre linee
> Perseo rese grazie agli Dei (2).

Questa lezione pei versi di Perseo è stata proposta da P. Tannery nelle citate sue *Notes*: avendola noi accettata (3), ammettiamo con questo storico eminente che gli antichi conoscessero *otto* linee spiriche. A fine di determinarne le scambievoli differenze ricordiamo anzitutto come Proclo affermi che " delle tre linee spiriche una è intrecciata a somiglianza della pista pei cavalli (ippopeda), la seconda si allarga verso il mezzo e si restringe agli estremi, la terza invece è del mezzo più ristretta e si allarga dalle due parti (4) „. Indichiamo poi con: r il raggio del cerchio generatore della spira su cui sta la linea, a la distanza del suo centro dall'asse di rotazione e d la distanza dell'asse stesso dal piano segante (che è ad esso paral-

---

(1) Questa spira, come già sappiamo (L. I, n. 51), era già stata (e forse per la prima volta) considerata ed adoperata da Archita di Taranto.

(2) Proclo-Taylor I, p. 134. Le curve di Perseo sono quindi curve di 4° ordine aventi per punti doppii i punti ciclici del piano.

(3) Il modo insolito di dire *tre e cinque* invece di *otto* è riguardato dal Tannery come una forma poetica; a sostegno di questa opinione si possono citare i seguenti versi di Dante:

> « Furo iterate tre e quattro volte » — Purg. VII, 2,
> « Che gli assegnò sette e cinque per dieci » — Parad. VI, 138.

D'altronde lo spezzamento del numero 8 in 5 + 3 può essere stato consigliato al poeta dal fatto (v. il testo) che nella spira aperta si trovano 5 delle curve spiriche e le altre 3 nella spira rientrante.

(4) Proclo-Taylor I, p. 139.

Digitized by Google

lelo). Allora, supposto anzitutto la spira aperta, cioè $r < a$, si ottiene:

quando $a < d < a + r$ una ovale rigonfia nel mezzo epperò avente i caratteri della seconda delle spiriche di Proclo,

„ $a = d$ una curva che segna il passaggio fra la seconda e la terza delle spiriche di Proclo,

„ $a - r < d < a$ una curva chiusa restringentesi verso il mezzo epperò avente la forma della terza di quelle di Proclo,

„ $d = a - r$ una curva da assimilarsi alla prima di quelle di Proclo,

„ $a < d < a - r$ due curve distinte fra loro simmetriche;

supposta invece la spira chiusa ($r = a$), si ottengono similmente le prime tre delle cinque spiriche ora descritte; se finalmente la superficie è rientrante ($r > a$), si possono ottenere tre nuove spiriche, ognuna delle quali risulta da una delle tre anzidette a cui si associ un'ovale interna.

Perseo ha, per attestazione di Proclo (1), determinata la proprietà caratteristica delle sue curve (cioè il *sintomo*, se si vuole usare il linguaggio degli antichi), ma ne ha egli costruita od almeno schizzata una teoria completa? in particolare ha egli avvertito, che nel caso in cui le sue curve siano ovali di Cassini per tutti i punti della curva è costante il prodotto delle distanze da due poli fissi? Sono questi altri problemi storici ai quali oggi non si è in grado di rispondere.

---

(1) Proclo-Taylor I, 146.

Digitized by Google

Zenodoro.

75. Nicomede, Diocle e Perseo lavorarono in una direzione comune, in quella cioè che, partendo dallo studio di speciali linee piane, doveva finalmente condurre in un avvenire lontano al concetto e alla teoria generale delle curve algebriche. Un indirizzo totalmente diverso ha l'ultimo geometra di cui vogliamo occuparci: è Zenodoro, autore di uno scritto *Sugli isoperimetri* (*περὶ ἰσομέτρων σχημάτων*) che Teone Alessandrino ci ha serbato (1); l'epoca in cui egli visse non è nota con precisione assoluta, però sembra indiscutibile che egli appartenga al periodo di cui ci stiamo occupando (2).

La scrittura che ha assicurato a Zenodoro una posizione non ispregevole nella storia del pensiero matematico greco (3) comincia col teorema: " di due poligoni regolari isoperimetri ha maggiore area quello che ha un maggior numero di lati „ (4). Se ne deduce che " se un poligono regolare ed un circolo hanno

---

(1) Essa si trova nelle edizioni fatte a Basilea (1538) e a Parigi (1821) del *Commento all'Almagesto* composto da Teone (v. i Libri seg.); ed inoltre nell'ed. di Pappo curata da Hultsch (p. 1189-1211).

(2) In ciò siamo d'accordo coll'Hultsch che fa Zenodoro di poco posteriore ad Archimede (l. c. p. 1188); col Cantor che lo pone fra il 200 a. C. ed il 90 dell'E. v. propendendo però a ritenerlo posteriore di poco ad Euclide; e col Susemihl (Op. cit., T. I, p. 761) che ritiene appartenga al principio del II Sec. o forse al III a. C.

(3) Notisi anche che un Zenodoro è citato anche da Proclo (Proclo-Taylor I, 173) come inventore dell'appellativo κοιλογώνια pei quadrangoli aventi un angolo concavo, per quelli cioè che Leonardo Pisano (cfr. *Scritti* ed. Boncompagni, II, Roma 1862, p. 83) chiamò *figure barbate*.

(4) Un poligono regolare di n lati e avente per perimetro $2p$ ha per area

$$A_n = p^2 \cot \frac{\pi}{n};$$

tenendo fisso p e facendo crescere n, $\cot \frac{\pi}{n}$ cresce pure, epperò anche A_n: il teorema enunciato è dunque equivalente all'affermazione che la cotangente è funzione decrescente dell'arco.

Digitized by Google

eguali i contorni, la superficie del circolo sarà maggiore di quella del poligono „. Col mezzo poi dell' altro teorema: " se due figure piane sono isoperimetre ed una di esse è regolare, questa avrà l' area maggiore „ e di alcune proposizioni secondarie che fungono da lemmi, si arriva finalmente a concludere che " il circolo è la massima fra le figure piane isoperimetre „. Una proprietà analoga ha luogo per le superficie solide, giacchè " se la superficie d' una sfera è eguale a quella d' un altro solido, il volume di questo è minore del volume della sfera „. Ma la dimostrazione di questo importante teorema ha raggiunto la massima perfezione soltanto in tempi a noi vicinissimi, mentre nel frammento pervenutoci del lavoro di Zenodoro non ne sono esposti che dei preliminari remoti; tuttavia non v' ha dubbio che in esso esistano i fondamenti dell' importante teoria sintetica dei massimi e minimi alla quale era riserbato a Steiner di dare delle basi solide e forse un assetto definitivo.

---

76. Lo scritto di cui ci siamo testè brevemente occupati è l' ultimo documento che si riferisca alle vicende della geometria durante il periodo greco-alessandrino, periodo del quale ci sforzammo ora di tessere una storia fedele. Se ora poniamo la parola *fine* alla nostra narrazione, gli è più per avere esauriti i materiali che oggi stanno a nostra disposizione, che per il convincimento di avere delineato e colorito un quadro prossimo al vero delle condizioni della geometria in quel tempo, perchè (già lo avvertimmo) oltre ai pochi personaggi che spiccano nella nostra pittura, oltre alle altre non numerose figure che si trovano nella penombra, s' intravvede nello sfondo della tela una coorte di pensatori di cui riusciamo a male pena ad avvertire l' esistenza e non arriviamo a discernere le fattezze ed il contegno.

Tuttavia quanto si è esposto nelle pagine precedenti a parer nostro dimostra ad esuberanza come le rosee speranze con cui aprivasi il periodo discorso non siano state deluse. Il pensiero geometrico, risvegliato negli Ellèni da Talete all' albeggiare

Digitized by Google

della civiltà, trapassa da Mileto nella Magna Grecia, ove si occulta e feconda nei conciliaboli dei Pitagorici, risorge alla libera luce in Atene con la scuola di Platone, si propaga al di fuori per opera di Eudosso e de' suoi discepoli, si associa e corrobora con lo sviluppo della filosofia, e giunge finalmente alla sua massima grandezza con gli scienziati che vissero all' ombra del trono dei Faraoni o con coloro che da questi scienziati ricevettero l' istruzione od almeno lo stimolo all' investigazione delle verità matematiche.

Al modo istesso che la filosofia greca nel suo periodo di più abbagliante splendore trovò in Socrate, Platone ed Aristotele i suoi più eminenti rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano giganteggiando Euclide, Archimede ed Apollonio. Per opera del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso di una raccolta sapientemente ordinata dalle proprietà più essenziali dell' estensione figurata, raccolta che per lungo volger di secoli fu giudicata come un codice d' insuperabile valore e che tuttora impone l' ammirazione ed il rispetto anche a coloro che non ne accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capo-stipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di Leibniz e Newton — si palesa di così meravigliosa fecondità nell' immaginare degli espedienti per risolvere, evitando qualunque applicazione del concetto d' infinito, una pleiade di questioni che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore e induce melanconicamente a domandarsi se l' invenzione dei metodi generali che tanto affaticò gli scienziati moderni non abbia per avventura inaridito la fonte naturale degli espedienti ingegnosi. Meno spontanea sorge forse l' ammirazione in chi oggidì mediti sulle opere di Apollonio, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d' indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il misurare quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l' ajuto; e con fatica riusciamo a schermirci da un senso

Digitized by Google

di sorpresa che indugia gli entusiasmi; ma ove si pervenga a ciò, si è indotti a giustificare pienamente coloro che giudicano Apollonio la più grande mente geometrica che il mondo abbia prodotto prima di Steiner.

Gli sforzi coordinati di questi tre celebri matematici e dei loro immediati discepoli assicurarono delle basi incrollabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono il terreno al calcolo infinitesimale, aumentarono a dismisura la sfera di influenza della geometria col condurre sotto il suo dominio delle nuove ed interessantissime forme geometriche; essi guidarono a svariate soluzioni dei famosi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo ed insegnarono a contemplare la questione della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che — date le cognizioni algebriche dell'epoca — allora ne permettesse una soluzione; e gettarono i fondamenti tanto dello studio geometrico dei massimi e minimi, quanto della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo gli scienziati prelodati, col somministrare i più importanti elementi della collezione conosciuta sotto il nome di *luogo analitico* (cfr. n. 64), cercarono di spianare la via agli investigatori avvenire e di fare in modo che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi. Ciò non ostante, scomparsi questi illustri campioni, per un complesso di ragioni intrinseche ed estrinseche che ci sforzeremo di mettere in chiaro più innanzi, la geometria greca decade poi definitivamente scompare.

Errerebbe però chi credesse che con quanto dicemmo nel presente Libro noi abbiamo redatto un bilancio completo delle cognizioni geometriche del periodo greco-alessandrino, giacchè i pensatori di cui ci occupammo mal si adattavano a quella specializzazione che è caratteristica e vanto della scienza moderna; essi, se collaboravano all'avanzamento della matematica pura, non ispregiavano, epperò non trascuravano, le applicazioni importantissime che essa riceve nella spiegazione dei fenomeni naturali, e mentre si occupavano di tali applicazioni incidentalmente raffinavano gli strumenti per compierle: ond'è che i

Digitized by Google

nomi di molti fra gli studiosi a cui sono dedicati i primi due Libri della nostra storia ci si ripresenteranno nel successivo, nel quale ci proponiamo di render conto delle indagini geometriche che i Greci condussero a termine mentre fondavano o svolgevano l'astronomia e la geodesia. Ma nel corso di tale studio ci imbatteremo in nuove personalità degne di altissima stima, fra le quali basti fin d'ora citare: Erone d'Alessandria e Claudio Tolomeo.

Digitized by Google

APPENDICE

Divinazioni di scritti perduti dovuti a geometri del periodo greco-alessandrino.

Nello stesso modo che al termine del I Libro abbiamo esaminata la restituzione che venne tentata dell'unico importante scritto perduto appartenente al periodo pre euclideo, faremo ora un breve cenno delle più importanti divinazioni di scritti scomparsi appartenenti al periodo aureo della geometria greca; per tal modo, non soltanto daremo un utile complemento a quanto si espose nel testo, ma c'industrieremo di colmare una lacuna esistente nella storia generale delle matematiche, nella quale quelle divinazioni non riescono ad occupare il posto che meriterebbero, venendo escluse dall'evo antico perchè vennero scritte in tempi moderni, escluse dall'evo moderno perchè recarono contributo assai esiguo al movimento intellettuale dei nostri tempi. Tuttavia passeremo sotto silenzio quei lavori in cui sono fatte conoscere delle soluzioni di questioni speciali (quali il problema delle tre o quattro rette, i problemi delle sezioni, i problemi dei contatti e simili) perchè essi di regola gettano luce assai scarsa sulla geometria antica.

L'algebra geometrica degli antichi secondo H. G. Zeuthen.

1. L'opera dello Zeuthen destinata a dichiarare *quello* che i Greci sapevano sulle coniche, *in qual modo* lo dimostravano e *a che cosa* lo applicavano (1) — ed alla quale largamente attingemmo — supera per

(1) *Die Lehre der Kegelschnitte etc.*, p. 456.

Digitized by Google

originalità e genialità tutte le opere congeneri a noi conosciute; è la guida migliore per chiunque aspiri ad acquistare famigliarità con le opere vetuste. Come fu a ragione osservato essa " est moins un livre d'histoire qu'un véritable traité exposant une ancienne méthode qu'il (Zeuthen) a retrouvé „ (1). Però l'autore, non riuscendo a tenere sempre in freno la sua possente fantasia di geometra, non esita a riempire del suo le troppo numerose e considerevoli lacune che si notano nel complesso delle antiche produzioni; e nello sforzarsi di ricostruire quei metodi di ricerca di cui è difficile negare il possesso ai geometri greci, è così convinto di parlare in loro nome che non si cura di rintracciare (o non arriva a trovare?) quegli argomenti storici d'inoppugnabile saldezza che solo potrebbero trasfondere nel freddo lettore il convincimento che ha l'autore di ragionare come ragionavano Apollonio ed i suoi contemporanei. Donde la spiegazione dell'avere l'opera dello Zeuthen trovato degli ammiratori in coloro che ravvisavano in lui il geniale geometra discepolo di Chasles, e dei giudici severi in coloro che cercarono nel suo scritto dei contributi sicuri alla conoscenza della geometria presso i Greci, e trovarono invece trattate da lui le questioni storiche, con acume d'ingegno e arditezza, ma non sempre con quel copioso corredo di fatti accertati e quel forte e vivo sentimento della realtà che danno sangue e midollo alle speculazioni, le tolgono dal vago e le rendono fruttuose. Chi scrive non esita a schierarsi fra gli estimatori del matematico danese, ma non può dissimulare che agli oppositori non difettano i validi argomenti per criticarlo: onde (il lettore lo avrà certamente osservato) egli in moltissime circostanze si è deciso ad invitare il lettore, con una muta citazione, a giudicare da sè se le induzioni dello Zeuthen fossero sorrette o non da indiscutibili dati di fatto. Quì però crede prezzo dell'opera somministrare qualche ulteriore notizia intorno ad un procedimento per scoprire ed esporre le verità geometriche, che molti avevano supposto

---

(2) P. Tannery. Bulletin des Sc. math., T. X, 2e Série, 1886, Ie Partie, p. 270.

Digitized by Google

posseduto dagli antichi (1), e che per primo lo Zeuthen, a parer nostro felicemente, è riuscito a dissotterrare od a ricostruire.

La teoria delle coniche, come è insegnata da Apollonio, poggia esclusivamente sugli *Elementi* di Euclide, onde riesce intelligibile a chiunque conosca i rudimenti della geometria; ma per penetrare nello spirito delle argomentazioni, per orientarsi nell' intricato labirinto che esse formano, fa mestieri una non comune famigliarità con i procedimenti sussidiarii di cui regolarmente si giova il geometra Pergeo. Orbene, questi procedimenti — come a più riprese si accennò nel testo — possono riguardarsi in sostanza per applicazioni svariate del metodo cartesiano, applicazioni di natura differente da quelle che Cartesio ha insegnate per ciò solo che in esse non si ha come in queste un sistema d' assi fisso, dato una volta per tutte, ma per converso se ne ha uno speciale ad ogni singolo caso, rivelato dallo studio della figura che si ha per le mani. Però nelle applicazioni citate è indispensabile avere a propria disposizione qualche cosa che surroghi ed in sostanza equivalga all' algebra odierna; questo *quid* si trova nella teoria delle proporzioni. Orbene, tale disciplina è fondata sulla definizione di eguaglianza di due rapporti fra numeri (razionali) o fra quantità qualunque e permette di eseguire su gli uni e le altre qualunque operazione aritmetica, ma è incapace di suggerire pei risultati ottenuti degli enunciati così semplici da adattarsi facilmente ad ulteriori trasformazioni. Per ovviare questo inconveniente s' invoca la rappresentazione geometrica dei numeri mediante segmenti rettilinei e dei loro prodotti mediante rettangoli; allora tutte le operazioni aritmetiche si mutano in altrettante operazioni geometriche, epperò l' aritmetica si muta in una nuova disciplina a cui con piena ragione venne dato (2) il nome di *algebra geometrica*. Questo speciale ramo di matematica ai tempi di Euclide era giunto ad un grado di sviluppo tale da sostituire tutta la nostra algebra sino alla teoria delle equazioni quadratiche inclusivamente;

---

(1) Cfr. p. es. Marie, *Hist. des sciences math. et phys*, T. I, p. 5, 7-8, 48, 118-9; Tannery, Bulletin des Sciences math., T. IX, 2e Série, 1885, Ie Partie, p. 86-7.

(2) Cantor, *Vorlesungen*, T. I, p. 645.

Digitized by Google

un solo inconveniente presentava l'uso di esso, cioè la necessità di distinguere un gran numero di casi in ogni figura; tale inconveniente, per quanto grave, non impedì però agli antichi di studiare completamente *nel piano* tutte le curve di second'ordine, ma la complicazione e l'assenza di rappresentazioni geometriche convenienti vietò ad essi di oltrepassare questi limiti e studiare metodicamente le curve di ordine superiore al secondo. Il II libro degli *Elementi* contiene appunto i fondamenti dell'algebra geometrica; ma esso è ben lungi dal rappresentare la totalità delle cognizioni possedute dai Greci in questo campo; per completare il quadro non v'ha di meglio che adunare le innumerevoli relazioni segmentarie che i commentatori (specialmente Pappo) dimostrarono per sopperire al laconismo dei grandi geometri, i quali ne sottintendevano la giustificazione al modo istesso che un provetto analista moderno si dispensa dall'esporre certi piccoli calcoli ausiliarii credendosi autorizzato a citarne soltanto i risultati.

Sull'opera di Euclide relativa alla Divisione delle figure.

2. Lo scritto pubblicato dal Dee e da noi citato nel testo (v. n. 26) fu scelto da L. F. Ofterdinger quale principale fondamento per una divinazione dell'opera di Euclide *Della divisione delle figure* (1). In questo lavoro le proposizioni esposte dal dotto inglese sono presentate in ordine migliore e munite di rigorose dimostrazioni; a ciascuna vengono poi collegate le proposizioni analoghe esistenti nel ms. fatto conoscere dal Woepcke. Si ottengono in totale 22 proposizioni, due delle quali (10^a e 21^a) sono lemmi, sei (1^a-6^a) si riferiscono alla divisione in due parti di un triangolo, quattro (7^a, 8^a, 12^a e 13^a) a quella d'un trapezio, quattro (9^a, 14^a-16^a) a quella d'un quadrangolo qualunque e cinque (17^a-22^a) a quella di un pentagono.

Nella divinazione in discorso non riuscirono a trovare sede conveniente ben sedici delle proposizioni fatte conoscere dal Woepcke (cioè le

---

(1) *Beiträge zur Widerherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren* (Ulm, 1853).

Digitized by Google

10ª-13ª e 18ª-29ª), sicchè non si può ritenere che il problema di ricostruire lo scritto di Euclide abbia ottenuto una soluzione definitiva soddisfacente (1): per raggiungere la quale il Woepcke consiglia di tenere conto di un lavoro di Abûl-Wafâ che egli fece conoscere nelle sue *Recherches sur l'histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux* (2). Quel problema d'altronde cesserebbe di esistere ove venisse studiata e tradotta la versione araba completa della memoria d'Euclide che sembra essere tutta conservata nella Biblioteca dell'Escuriale (3).

I Porismi *di Fermat, di Simson e di Chasles.*

3. Ecco gli enunciati dei cinque porismi di Fermat la cui esistenza fu annunciata nel testo (n. 28) (4): " I. Sono date di posizione (fig. 21ª) due rette ON, OC secantisi nel punto O ed inoltre due punti A e B; si conducano da A e B le parallele a OC e se ne determinino le intersezioni F, E con ON; si conducano pure AE, BF e si trovino i punti D, C in cui esse tagliano OC; finalmente da un punto qualunque V di ON si projettino A e B su OC in R e S. Sarà $CR \cdot DS = CO \cdot DO$. II. Sia data (fig. 22ª) una parabola qualunque NAB ed un suo diametro BEO; se da due punti qualunque A, N della curva si projettano altri due punti D, D' di essa su quel diametro, sarà $OB : BE = QB : GB$. III. Dato (fig. 23ª) un cerchio di diametro AD ed una corda MN parallela a questo diametro, si projetti da

---

(1) Il Favaro si è occupato di questo problema, anzi annunziò di possedere tutti gli elementi della soluzione di esso (*Atti del R. Ist. Ven.*, Serie VI, T. I, p. 293-7), ma (per quanto ci consta) non pubblicò i risultati delle sue indagini.

(2) *Journal asiatique*, V Série, T. V (1855) p. 220-221, 338 e seg.

(3) Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis* etc. (Halae 1823) p. 5.

(4) Per abbreviarli li abbiamo lievemente rammodernati. Il primo e l'ultimo di essi si leggono anche nel frammento *Porismata duo* in *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 74-76.

Riguardo agli stessi si vegga l'articolo *Porismata Euclidea, immo Fermatiana, demonstrata. Auctore Archid.* Io. Francisco de Tuschis a Fagnano (Nova Acta Eruditorum publicata Lipsiae 1772, p. 431-506).

Digitized by Google

M e N su AD in O e V un punto qualunque B della periferia del cerchio dato: dico che $AO.DV:AV.DO$ è indipendente dalla posizione del punto B. IV. È dato un circolo ICH (fig. 24ª) di centro D ed un suo diametro IH; sia CD il raggio del cerchio perpendicolare a questo diametro. Sul prolungamento di questo si prendono ad arbitrio due punti A, B equidistanti dal centro e sul diametro due punti L, R pure equidistanti dal centro e tali che $DI:AI = DL:LI$. Da A e B si conducono AF e BG perpendicolari al diametro AB ed eguali alla distanza di A da C. Fatto ciò, se si projetta da F e G un punto qualunque E della circonferenza sul diametro suddetto in M e N, dico che $\overline{RM}^2 + \overline{LN}^2$ è indipendente alla posizione del punto E. V. Dato un cerchio RAC (fig. 25ª) di centro D e un suo diametro RDC ed il raggio a questo perpendicolare, si prendono sul diametro prolungato due punti Z, B equidistanti dal centro. Condotte ZM e BO perpendicolari al diametro considerato ed eguali alla distanza del punto A dal punto Z, se si projettano da M e O un punto qualunque H della circonferenza data sul diametro CR in E e N, sarà $\overline{EH}^2 + \overline{HN}^2$: area triang. $EHN = AZ:\frac{1}{4}ZD$ „. Di queste proposizioni la prima, la quarta e la quinta si possono dimostrare facilmente col calcolo, somministrano anzi degli istruttivi esercizii di geometria analitica elementare; le altre due sono casi speciali del noto teorema di Desargues sul quadrangolo inscritto in una conica e segato da una trasversale; si avverta che di questi ultimi il primo non può avere fatto parte dell'opera di Euclide perchè i primi due libri di essa trattavano di figure rettilinee ed il terzo di circoli e semicircoli, e nell'altro è superflua la condizione di parallelismo della corda e del diametro, ed inoltre (come notò Fermat) esso può estendersi a tutte le coniche.

4. Assai più diffuso del lavoro sui porismi di Fermat è l'analogo di Simson, il quale abbraccia ben novantatrè proposizioni. Le prime sei di esse non sono che esempii atti a chiarire la definizione proposta pel vocabolo porisma; una di esse fu riferita nel testo (v. n. 28, in nota), le altre sono relazioni segmentarie di mediocre valore. Simson rileva poi che anche nell'aritmetica si possono rintracciare delle proposizioni porismatiche, e lo prova adducendo come esempio la proposizione seguente: " dati due numeri a e $b < a$, saranno pure dati due

Digitized by Google

numeri x e y tali che, per qualunque numero c, si abbia identicamente $(a - b)(b + c) = cx + ay + cy$ „. Nelle proposizioni 7ª-16ª Simson dimostra quel teorema sul quadrilatero deformantesi con una certa legge che Euclide suddivise in dieci e che Pappo compendiò in un solo (v. n. 27) e poi generalizzò notevolmente; quelle proposizioni si riferiscono dunque ad una classe speciale di porismi, cioè ai luoghi: altrettanto può ripetersi della prop. 19ª. Le rimanenti si possono distribuire in quattro categorie; nella prima entrano quelle che si trovano già nella collezione di Pappo e a cui Simson pone i numeri 17-18, 21, 22, 26-33, 39, 42-45, 49-51, 63-65, 68-77 e 79; nella seconda delle nuove proposizioni ausiliarie (24, 35-37, 46, 52, 54-56, 59-60, 78, 82, 86, 89); nell'ultima quei problemi in cui spicca chiaramente l'utilità dei porismi (prop. 20 e 25). La terza categoria poi abbraccia 29 porismi, di cui alcuni vengono presentati come corrispondenti ai generi II, VII, XVI, XXVIII, XXIX e XXX enumerati da Pappo, altri (prop. 80-81, 83-85) coincidono con i porismi di Fermat (il secondo eccettuato) oppure li comprendono od estendono, altri quattro finalmente (sono gli ultimi per ordine, ma fra i più notevoli) furono suggeriti dall'autore da Matthew Stewart (1717-1786). Di queste proposizioni non riferiamo quì gli enunciati perchè ciò esigerebbe uno spazio assai maggiore di quello che si trova a nostra disposizione; osserviamo però che esse somministrerebbero un materiale assai interessante, ricco e variopinto per comporre una collezione di esercizii di geometria elementare (1).

5. Mentre Fermat e Simson si limitarono a raccogliere dei materiali per ricostruire l'opera perduta di Euclide, Chasles con la sua più estesa scrittura sopra i porismi intese di presentarne una divinazione completa (2). Da quali criterii egli si sia lasciato guidare emerge da

---

(1) Nella *Geometrical Analysis* del Leslie si trovano pure dimostrati dei porismi: si veggano le prop. 18ª-25ª del III Libro di detta opera.

(2) Un lavoro analogo venne prima tentato dal Klingenstierna (1678-1765), come fa sapere l'Eneström (*Bibliotheca mathematica*, 1889, p. 1). Ma, secondo il Wilkinson (*Proc. of the phil. Society of Manchester*, T. VII, p. 68), il primo che vi si accinse sarebbe stato il Wildboe (1775), che in Inghilterra venne tosto seguito dal Lawson e dal Playfair.

Digitized by Google

quanto dicemmo nel testo (n. 28), quale plauso abbia riscosso il suo scritto non fa mestieri di quì ricordare. Occorre però avvertire che l'approvazione che questo scritto ottenne è l'espressione più del valore che tutti vi trovarono come opera originale, che del convincimento che esso rispecchiasse fedelmente l'originale scomparso. Per persuadersi che tale identità non si possa in verun modo ammettere si osservi che: 1.° l'opera di Euclide comprendeva 171 proposizioni, mentre la restituzione proposta ne contiene 221; 2.° nello scritto di Chasles non esiste alcuna proposizione riferentesi al decimo dei generi descritti da Pappo, perchè le parole di questo che vi si riferiscono riuscirono inintelligibili a Chasles essendo monca la versione del Commandino su cui il geometra francese lavorava; 3.° Chasles in ogni libro riunisce in un solo gruppo i porismi d'un medesimo genere nell'intento di " porre un po' d'ordine in tante e così svariate proposizioni „; di più nei libri II e III egli di suo arbitrio pone prima le proposizioni che appartengono ai generi che Pappo esplicitamente afferma esservi contenute e poi altre relative agli altri generi; ora (come riconobbe lo stesso Chasles) nulla abilita ad asserire che Euclide abbia adottato questi criterii di distribuzione, anzi si sarebbe indotti a negare che questo grande metodista abbia adottato delle norme seguendo le quali si devono collocare a distanza delle proprietà affini della medesima figura; sembra quindi probabilissimo che riguardo all'ordinamento l'opera moderna non somigli affatto all'antica (1); 4.° (2) Chasles (a differenza di Simson) nell'enunciare i suoi porismi si è attenuto assai da vicino ai lemmi suggeriti da Pappo (3) per agevolare l'intel-

---

(1) Si osservi a questo proposito che il determinare l'ordine delle proposizioni è questione preliminare che s'impone a chiunque voglia divinare un'opera perduta; ed è vano sperare di ottenere un buon risultato se la si risolve in modo così superficiale come fece Chasles, giacchè in un'opera di matematica, in cui le varie parti hanno una salda concatenazione logica, l'ordine in cui esse si succedono è elemento essenziale.

(2) Cfr. Zeuthen, op. cit., Cap. VIII.

(3) Pappo ed. Hultsch, p. 866-918.

Digitized by Google

ligenza del trattato euclideo (1), tanto che non pochi fra essi non ne sono che trasformazioni pressochè immediate; orbene, se si fa il confronto dei lemmi di Pappo relativi ad opere superstiti con le opere stesse, si scorge che essi di regola non avevano che il modesto intento di dimostrare certe proposizioni secondarie che l'autore invocava lasciando al lettore di convincersi della loro verità; per analogia si è trascinati ad ammettere che Pappo non abbia abbandonato questo sistema nel commentare i *Porismi*, e che quindi l'opera di Euclide contenesse una materia assai più elevata dei lemmi anzidetti e quindi dell'opera di Chasles. Tutte queste ragioni concorrono a far nascere l'idea che quest'ultima porga del trattato euclideo un concetto inferiore al vero; essa ci si presenta come una *propedeutica alla geometria projettiva*, ove le nozioni di punteggiate e di fasci, di rapporto anarmonico e di projettività, entrano, negli enunciati e nelle dimostrazioni, unicamente in casi particolari e vengono svolti col solo sussidio degli *Elementi* di Euclide; ora chi assicura che questi non abbia oltrepassati questi confini e non sia risolutamente entrato nel campo della geometria superiore? Sino a che questi dubbii non siano dissipati (e lo saranno essi mai?), sino a che anche alle altre questioni dianzi enunciate non siasi dato risposta soddisfacente, il problema dei porismi rimarrà fra quelli che esigono e meritano l'attenzione e lo studio degli storici e dei geometri.

Divinazioni tentate da Maurolico e da Viviani dei Libri V *e* VI *delle* Coniche *di Apollonio.*

6. La restituzione di Maurolico della quale fu fatto cenno nel n. 53 fa seguito all'edizione che egli curò dei primi quattro libri delle

(1) È interessante notare che i pericoli di questo sistema erano stati segnalati da M. Cantor tre anni prima che fosse pubblicata la divinazione di Chasles: si vegga l'articolo *Ueber die Porismen des Euclids und deren Divinatoren* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. II, 1857) p. 25.

Digitized by Google

Coniche di Apollonio (1), ed è il più antico lavoro avente lo scopo di divinare antiche opere perdute. Per quanto concerne il V Libro, rileveremo che nelle trenta proposizioni esposte da Maurolico sono fatte conoscere le relazioni di posizione che intercedono fra due sezioni coniche fra loro tangenti e sono discusse alcune condizioni pel contatto di due tali curve: in qual modo il geometra messinese potesse illudersi che esse riproducessero la materia del V Libro delle *Coniche* — il quale per esplicita attestazione del suo autore (cfr. n. 53) trattava diffusamente di massimi e minimi — è impossibile concepire. Meno infelice è la pretesa divinazione del VI Libro; ivi però Maurolico si è occupato quasi esclusivamente della similitudine, trascurando la congruenza di due sezioni coniche; inoltre egli non ha confrontate fra loro delle porzioni di curva, della qual cosa non gli si deve far colpa non avendo il Pergeo parlato di tali ricerche nella prefazione generale della sua opera. A giustificare in parte questo nostro favorevole giudizio, rileveremo alcuni punti di contatto fra l'originale e la divinazione: la 11ª di quello coincide con la seconda di questa, le 26ª-27ª di quello con le V-VI di questa, ed i problemi che Maurolico risolve nelle proposizioni X-XI, XXVI-XXVIII non differiscono dalle proposizioni 28ª e 30ª di Apollonio.

7. Assai più importante, e degna della grande celebrità di cui gode, è la divinazione fatta del solo V libro da Vincenzo Viviani (2); comparsa nel tempo in cui si stava compiendo la versione latina degli ultimi libri della grande opera di Apollonio, fu poi detto che essa sarebbe stata bastante a compensare della perdita del primo dei libri che erano allora stati rinvenuti in Arabo (3). Ma noi non possiamo accet-

---

(1) Francisci Maurolyci Messanensis *Emendatio et Restitutio Conicorum Apollonii Pergaei* (Messanae MDLIV). La divinazione è datata: Castello Bono Die 25 Octobris Hora 4, Noctis Indictione VI, 1547.

(2) *De Maximis et Minimis geometrica Divinatio in Quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum*, Florentiae MDCLIX.

(3) Così Fontenelle nel suo *Éloge de M. Viviani* disse: « l'on trouva qu'il avait plus que deviné, c'est-à-dire qu'il avait été beaucoup plus loin qu'Apollonius sur la même matière. » (*Éloges académiques*, T. I, 1740, p. 35).

Digitized by Google

tare questa affermazione senza molte riserve; giacchè, secondo noi, la *Geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei* contiene *più* e *meno* dell'originale: *più* per la vastità del campo di ricerche, *meno* per la profondità delle indagini; *più* perchè vaga pel piano e poi assurge allo spazio, tratta non soltanto di coniche ma anche di conoidi e sferoidi, e considera eziandio le grandezze relative di speciali segmenti determinati in quelle da rette e da piani in questi; *meno* perchè sfiora soltanto quelle capitali questioni che, come vedemmo, formano del V libro di Apollonio un preliminare importantissimo della teoria delle evolute. Essa pertanto si può considerare come un'eccellente aggiunta alle nostre cognizioni geometriche e anche per la forma in cui è redatta, quasi come un'appendice alle dottrine esposte da Apollonio ed Archimede; ma è impossibile considerarla siccome una divinazione riuscita (1), troppo pochi essendo i punti di contatto di essa coll'originale. Di tale divergenza — è forza e dovere convenirne — non si può fare soverchio addebito al celebre discepolo di Galileo, perchè il sapere che " il quinto libro tratta diffusamente di massimi e minimi (2) „ ed il conoscere i pochi lemmi (quasi tutti concernenti relazioni di punti in linea retta) che Pappo ci lasciò a migliore intelligenza del testo, sono materiali insufficienti per rievocare l'immagine dell'opera perduta. E poichè questo scritto del Viviani, al pari di quello con cui egli s'industriò di sopperire alla perdita dei *Luoghi solidi* di Aristeo (v. l'Appendice II al Lib. I) attestano come egli fosse riccamente dotato di facoltà inventive in matematica, sorge spontaneamente il rimpianto che egli non le abbia applicate ad elaborare dei prodotti spontanei della propria fantasia geometrica, piuttosto che sforzarsi a ricostruire degli edifici di cui a' suoi tempi non rimaneva che un pugno di cenere.

---

(1) Noi pertanto siamo forzati a dissentire dal Cantor il quale a proposito della *Divinatio* scrive: « Für Viviani war die Veröffentlichung ein wahrer Triumph, da sie zeigte wie nahe er dem Gedankengang des Apollonius gekommen war ». *Vorlesungen*, II, p. 608.

(2) V. la prefazione generale alle *Coniche* riferita nel n. 55.

Digitized by Google

La restituzione di Halley dell'ultimo libro delle Coniche *di Apollonio.*

8. Il concetto fondamentale di questa restituzione, della quale abbiamo fatto soltanto un rapido cenno nel n. 63, è esplicitamente dichiarato da Halley (1656-1742) nella lettera in cui il grande astronomo dedica il proprio lavoro al dotto Enrico Aldrich (1674-1710) e che dice:

Occupandomi con te dell'edizione di Apollonio, entrambi fummo assai spiacenti che nel manoscritto arabo mancasse l'ottavo libro. Tu però coll'ordinario tuo acume osservasti subito che a tale perdita si poteva in certa misura sopperire, perchè nella *Collezione* di Pappo i lemmi relativi ai libri settimo ed ottavo sono presentati insieme, mentre quelli concernenti gli altri libri sono offerti a parte per ogni libro. Questo fatto sembrò a te significare che i detti due libri dovessero avere dei contenuti somiglianti l'uno all'altro, e che i problemi i quali, per dichiarazione di Apollonio stesso, eran contenuti nel libro ottavo dovessero ricevere le loro determinazioni dai teoremi del libro settimo. Avendo io profondamente meditato su ciò, mi parve che la tua congettura fosse verosimile e fosse anzi confermata da parecchii fatti, e mi decisi in conseguenza di riempire, per quanto fosse in mio potere, quella lacuna seguendo le tracce da te suggerite. Ora ti prego di accettare benignamente questo mio saggio.

La restituzione proposta dall'eminente editore di Apollonio si compone di trentatrè problemi. I primi due insegnano a determinare il parametro principale di una parabola conoscendo quello relativo ad un diametro dato ad arbitrio o viceversa, e i due seguenti trattano le questioni analoghe per le coniche a centro. Tutte le altre proposizioni insegnano a trovare una coppia di diametri conjugati di una conica assegnata quando si conosca uno di essi (prop. 5^a-6^a), o il loro rapporto (prop. 7^a-8^a), o la loro somma (prop. 9^a-10^a), o la loro differenza (prop. 11^a-12^a), o il loro rettangolo (prop. 13^a-14^a), o la somma o differenza dei loro quadrati (prop. 15^a-16^a), o l'angolo che essi comprendono (prop. 17^a-18^a), o il parametro relativo ad uno di essi (prop. 19^a-20^a), oppure di uno dei diametri cercati e del parametro relativo il rapporto (prop. 21^a-22^a), o la differenza (prop. 23^a-24^a), o la somma (prop. 25^a-26^a), o il prodotto (prop. 27^a-28^a), o la somma dei quadrati (prop. 29^a-31^a) o finalmente la differenza dei quadrati (prop. 32^a-33^a). Come conclusione Halley osserva:

Digitized by Google

Fin qui noi, seguendo l'ordine nel quale sono esposti i diorismi, abbiamo trattato la soluzione dei problemi i cui limiti di risolubilità sono assegnati immediatamente dalle proposizioni dioristiche del VII libro; e noi siamo convinti che la materia dell'ottavo libro non fosse essenzialmente differente da quanto esponemmo. Ad ogni modo speriamo che, anche se non abbiamo indovinate sempre le analisi e le costruzioni di Apollonio, pure quanto noi vi abbiamo sostituito non apparirà fuori di luogo ad un equanime lettore. D'altronde il numero dei problemi sulle coniche le cui analisi si possono desumere senza gran fatica da questi elementi è estremamente grande, ma nostro unico scopo fu di seguire le tracce di Apollonio il più da presso fosse possibile. Ora ancorchè fortuna volesse che in avvenire venisse ritrovato il libro perduto, pure a noi non rincrescerà di avere speso in questo lavoro tempo e fatica.

Se la restituzione proposta da Halley sia un' immagine fedele dell'originale, è questione che forse rimarrà sempre priva di una soluzione universalmente accettabile; infatti, spenta ormai ogni speranza di ritrovare l' VIII libro delle *Coniche,* l' unico autore antico che possa venir citato a sostegno di un qualsia giudizio è Pappo; orbene, i quattordici lemmi che egli espone per agevolare l'intelligenza dei due ultimi libri di Apollonio possono bensì addattarsi alla divinazione di Halley, ma potrebbero esserlo egualmente ad innumerevoli altre, dal momento che esprimono delle semplici relazioni metriche derivanti dal considerare dei punti in linea retta o dei rettangoli tagliati da trasversali. Tuttavia è fuor di questione che i problemi trattati da Halley, non solo non eccedono le forze di cui disponeva il geometra di Perga, ma hanno eziandio i lineamenti che questi notò in essi problemi nella prefazione generale dell' opera (v. n. 55) ed in quella speciale al settimo libro (v. n. 62); di più l'andamento generale delle dimostrazioni congegnate dall' astronomo inglese è fedelmente modellato su quello comune a tutte le argomentazioni apolloniane. Se a queste osservazioni si aggiunge quella che Halley è a nessuno secondo nel conoscere l'essenza più recondita della geometria greca, si vedrà di leggeri la ragione per cui noi non esitiamo a dichiarare la divinazione di Halley più verosimile di tutti i lavori congeneri (1) e la consiglie-

(1) Non discorda dal nostro il giudizio dello Zeuthen (op. cit., p. 355 nota e p. 403-407); invece il Cantor si esprime a questo riguardo con molto maggiore riserva (*Vorlesungen*, I, p. 296).

Digitized by Google

remmo come esemplare a chiunque volesse accingersi a tentativi dello stesso genere, ove non pensassimo essere definitivamente tramontata l'èra in cui tali sforzi si giudicavano degni di assorbire l'attività intellettuale d'un geometra.

Divinazioni dei due libri di Apollonio Sulle inserzioni.

9. La divinazione di Marino Ghetaldi (1) consiste nella soluzione dei problemi da noi notati coi numeri II, III, IV nel riferire il riassunto di Pappo dell'opera di Apollonio (v. n. 67), e ancora dei due seguenti, il primo dei quali è una generalizzazione del II, mentre il secondo è analogo al III: " Dato un segmento circolare qualunque ed una retta faciente con la base un angolo eguale all'angolo del segmento, inserire fra questa retta e l'arco del segmento una retta di data lunghezza il cui prolungamento passi per un estremo della base del segmento stesso. — Dato un rombo e prolungati due suoi lati adiacenti, adattare fra questi prolungamenti una retta di data lunghezza che passi pel vertice opposto del rombo „. Esso adunque tratta soltanto di quei problemi che, per attestazione di Pappo, si trovavano nel primo dei due libri del Pergeo.

10. Di alcuni soltanto fra questi problemi si è occupato Huygens, il quale, studiando alcune questioni che nell'antichità ebbero grande rinomanza (2) (quali la divisione di una sfera in un dato rapporto, la duplicazione del cubo e l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette date), fu condotto a trattare i due problemi sul rombo considerati dal Ghetaldi e ad indicarne delle soluzioni tanto pel caso generale quanto pel caso in cui il rombo divenga un quadrato.

11. Assai più completa è pertanto la posteriore divinazione del-

---

(1) Che io conosco dietro la riproduzione fattane dall' Hérigone, *Cursus mathematicus*, T. I (Parigi 1634) p. 305-914.

(2) *De circuli magnitudine iuventa; accedunt problematum quorundam illustrium constructiones* (Lugd. Bat. 1654). Trovasi anche nel T. II, p. 351-404, di Christiani Hugenii *Opera varia* (Lugd. Bat., 1724).

Digitized by Google

l'Horseley (1), nella quale, dopo un primo libro destinato a trattare le medesime questioni che aveva studiato il Ghetaldi, se ne legge un secondo, ove sono risolti i due seguenti problemi (i quali sono naturalmente suggeriti da un'attenta lettura di Pappo): " Dati due semicerchi concentrici aventi le basi sulla stessa retta, inserire fra essi una retta di data lunghezza diretta ad un punto dato nella base comune. Dati due semicircoli aventi le basi sulla medesima retta, inserire fra essa un segmento di data lunghezza diretto ad un estremo di una delle basi „. Aggiungiamo che la minuziosa distinzione de' varii casi che presentano le proposizioni considerate, la determinazione dei limiti di risolvibilità dei problemi e lo stile in cui è scritta l'opera dell'Horseley ne rendono probabile la rassomiglianza coll'originale, epperò la fanno ascrivere fra i più riusciti tentativi di restituzione di opere perdute.

Restituzione dei Luoghi piani *di Apollonio.*

12. Tre eminenti scienziati si sono accinti e riuscirono in parte a divinare l'opera di Apollonio sopra i *Luoghi piani,* impresa questa che, paragonata con altre analoghe, presentava minori difficoltà, perchè meno monche sono le notizie su di essa lasciate da Pappo, e maggiore interesse, perchè molti dei teoremi che questi ci tramandò possiedon un valore permanente.

Il primo in ordine di tempo, dei divinatori in questione è Fermat (2), il quale non pretese di comporre un'esatta riproduzione del

---

(1) *Apollonii Pergaei Inclinationum Libri duo. Restituebat* Samuel Horsley (Oxonii, MDCCLXX).

Per comporre quest'opera l'Horseley si è giovato di un opera dell'Omerique, geometra spagnuolo del Secolo XVII, cioè dell'*Analysis geometrica sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones* (Gadibus 1698), la quale, al dire del Montucla (*Hist. des Math.*, 2e éd., T. II, p. 167) riscosse anche il plauso di Newton.

(2) *Apollonii Pergaei Libri duo de locis planis restituti* (Oeuvres de Fermat, T. I, 1891, p. 3-51). Cfr. anche *Ad locos planos et solidos isagoge* (ib. p. 91-110); inoltre Oeuvres, T. II, p. 5, 30, 56, 74 e 100.

Digitized by Google

lavoro di Apollonio (1), ma soltanto di risarcire in certo qual modo la geometria del danno subito dalla scomparsa di esso col suggerire dei ragionamenti atti a giustificare gli enunciati riferiti nella *Collezione*.

In un primo libro egli dimostra tutte quelle proposizioni che Pappo espone *a proposito* del primo dei libri di Apollonio e che non tutte erano ivi contenute. La prima di esse come sappiamo (v. n. 66) dice che se **T** è una trasformazione geometrica piana di una certa categoria, ad un luogo piano corrisponde un altro luogo piano; orbene, Fermat per dimostrarla la suddivide in otto. Per esporne succintamente le ipotesi designeremo con: O un'omotetia, I una trasformazione per raggi vettori reciproci, R una rotazione, S una trasformazione per similitudine e T una traslazione; intenderemo poi che un prodotto del tipo $PQ...$ rappresenti la successione delle trasformazioni P, Q,..., e che se ivi interviene una R assieme ad una O o una I essa abbia lo stesso centro di queste. Posto ciò, i casi considerati da Fermat corrispondono a supporre che **T** sia una delle trasformazioni seguenti: O, I, OR, IR, S, IT, ORT, IRT. A ragione Fermat osserva poi, che la seconda delle proposizioni registrate da Pappo è di per sè evidente, mentre le due successive sono semplici corollarii di teoremi di Euclide (2). La successiva proposizione viene dimostrata in un modo da cui emerge che è vera non soltanto per una retta ma anche per una circonferenza; la sesta è dimostrata soltanto per rette concorrenti; la settima lo è in base ad un'interpretazione speciale delle parole di Pappo, e l'ultima, dopo avere modificate radicalmente le parole di Commandino.

Più agevole compito è la divinazione del II Libro dei *Luoghi piani*, avendo Pappo enunciati tutti i teoremi che esso contiene, Fermat quindi non ebbe altro che a provvederli di dimostrazioni convincenti dopo averne afferrato il significato, cosa questa non sempre facile servendosi delle edizioni di cui egli disponeva, tanto vero che il senso

---

(1) *Oeuvres de Fermat*. T. I, p. 29 nota.

(2) Per l'onore di Apollonio importa ricordare che tutte tre furono aggiunte da un tal Carmandro.

Digitized by Google

da lui attribuito alla sesta proposizione sembra essere più ristretto del dovere (1). Ma questo piccolo nèo non impedisce che il lavoro di Fermat sia degno di recare il di lui nome.

13. Seguendo l'ordine cronologico incontriamo fra i divinatori dei *Luoghi piani* Francesco Schooten, il quale in un lavoro (2) diviso in due libri si propose di giustificare le asserzioni di Apollonio che leggonsi nella *Collezione*. E precisamente nelle otto proposizioni del I Libro il geometra olandese dimostra quei teoremi che, al dire di Pappo, si trovavano nel I Libro di Apollonio, servendosi a tale scopo di un certo numero di problemi di cui egli suggerisce delle soluzioni, ottenute in parte mediante calcoli algebrici. A questi problemi tengono dietro dei problemi locali che, seguendo lo Schooten, si riferiscono al II Libro dei *Luoghi piani* e che egli espone per desumerne le proposizioni in questo racchiuse: così dai problemi 1°-3° egli fa scaturire la prima delle proposizioni riferite da Pappo, dai problemi 4°-8° la seconda, dal 9° la terza, dal 10° la quarta, dai problemi 11°-16° la quinta e dai 17°-18° l'ultima. Anche in questa seconda parte del suo lavoro lo Schooten usò di preferenza i metodi classici nell'antichità, ricorse però all'aiuto del calcolo quando lo reputò conveniente: il che dimostra non potersi il lavoro medesimo ritenersi una fedele riproduzione dell'antico.

14. Assai maggiori pretese di assomigliare all'opera perduta di Apollonio ha la restituzione che Roberto Simson (1687-1768) (3) compì, tenendo il debito conto di quanto tentarono e fecero i due geometri che, come or ora dicemmo, prima di lui si accinsero alla stessa impresa.

Nel I libro egli, dopo avere dimostrati i tre semplici teoremi che portano il nome di Carmandro, con sedici proposizioni mette in luce la verità di quelle importanti proprietà che Pappo ha riassunto nella

---

(1) Cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 48 nota.

(2) Francisci à Schooten, *Exercitationum mathematicarum. Liber III Continens Apollonii Pergaei Loca plana restituta* (Lugd. Batav. 1656).

(3) *Apollonii Pergaei Locorum planorum libri II, restituti a* Roberto Simson (Glasguae MDCCXLIX).

Digitized by Google

prima delle proposizioni da lui conservate; si volge poi alla quinta di esse estendendola (come già aveva fatto Fermat) a tutti i luoghi piani: finalmente le proposizioni da lui distinte con i numeri 22-25 preludono a quelle (26^a-29^a e 30^a-34^a) nelle quali sono distese le due ultime proposizioni ricordate da Pappo.

Nel II Libro egli, invocando i lemmi lasciati dal commentatore alessandrino per agevolare l'intelligenza di Apollonio, dimostra le proposizioni di cui sappiamo composto il II Libro sui *Luoghi piani* e, condotto dall'analogia, ne aggiunge del suo altre sei.

Quantunque non si possa ammettere una perfetta identità fra la divinazione ora discorsa e l'originale (basterebbe ad escluderlo il computo del numero delle proposizioni che contiene, numero che non raggiunge, come in questo, il 147), pure è certo che essa può compensare in parte della perdita del lavoro di Apollonio: a confermarlo osserveremo che in questo per ognuno dei luoghi considerati doveva trovarsi una speciale costruzione; orbene il geometra inglese non ha mancato di ricostruirle e si può asserire che in generale vi è riuscito.

Notiamo finalmente che le principali fra le proposizioni riferite da Pappo si trovano eziandio dimostrate nella seconda parte dell'opera *Elements of geometry, geometrical analysis and plane trigonometry* (1) del celebre fisico John Leslie (1766-1832).

---

(1) London 1809 e 1821. Si vegga il III libro della seconda parte, prop. 1^a-17^a. Di quest'opera, oltre la traduzione tedesca del Gruson che già citammo, ne esiste una francese del Comte inserita nel *Second supplément de la géométrie déscriptive par M. Hachette* (Paris 1822).

Prof. Gino Loria.

Digitized by Google

INDICE

Proemio.

1. Caratteri generali del periodo greco-alessandrino. 2. Il centro della coltura si fissa allora in Alessandria. 3. Il Museo.

I. **Euclide.**

4. Notizie intorno ad Euclide somministrate da' Greci. 5. Notizie provenienti da fonti arabe. 6. Riassunto. Euclide da Megara. 7. Gli *Elementi* di Euclide: loro contenuto. 8. Vicende subite dal testo degli *Elementi*. 9. I preliminari agli *Elementi*. 10. Le proposizioni del I Libro: come furono scelte e come sono dimostrate. 11. Il II Libro: fondamenti dell'algebra geometrica. 12. Il III Libro: prime linee di una teoria della circonferenza. 13. Il IV Libro: i poligoni inscritti in una circonferenza ed i poligoni ad essa circoscritti. 14. Il V Libro: teoria generale delle proporzioni. 15. Il VI Libro: similitudine delle figure piane rettilinee. 16. I tre libri aritmetici di Euclide. Il Libro VII: proporzioni fra numeri e divisibilità. 17-18. I Libri VIII e IX: ulteriore sviluppo dell'aritmetica razionale. 19. Il Libro X: irrazionalità biquadratiche. 20. Osservazioni intorno all'importanza ed all'originalità del Libro X degli *Elementi*. 21. Il Libro XI: fondamenti della geometria dello spazio, 22. Il Libro XII: metodo di esaustione in Euclide. 23. Il Libro XIII: poliedri regolari. 24. Osservazioni relative all'originalità degli *Elementi* di Euclide. 25. Il Libro dei *Dati*. 26. Il Libro *Della divisione delle figure*. 27-28. Le opere perdute di Euclide: *a)* I *Porismi*. 29. *b)* I *Luoghi superficiali*: *c)* Le *Coniche*; ecc.

II. **I pretesi continuatori degli ELEMENTI di Euclide.**

30. Il così detto XIV Libro degli *Elementi*: Ipsicle d'Alessandria. 31. Il così detto XV Libro degli *Elementi*.

III. **Archimede.**

32. Vita d'Archimede. 33. Enumerazione delle opere di Archimede tuttora esistenti. 34. Il I Libro sull'*Equilibrio dei piani*. 35. *Quadratura della parabola*. 36. Il II Libro sull'*Equilibrio dei piani*. 37. L'opera *Sui galeggianti*. 38-39. I due libri *Su la sfera ed il cilindro*. 40-41. Il trattato *Delle Spirali*. 42. *Conoidi e Sferoidi*. 43. *Misura del circolo*. 44. Caratteri comuni ai lavori archimedei. 45. Il Libro dei *Lemmi*. 46. I poliedri semiregolari. 47. Opere attribuite a Archimede, due opere oggi perdute. Conclusione.

Digitized by Google

IV. Eratostene.

48. Biografia di Eratostene. 49. Sua soluzione del problema di Delo. 50. Sua opera perduta *Sulle proporzioni*. 51. Lo « staccio di Eratostene ».

V. Apollonio.

52. Notizie greche ed arabe sulla vita di Apollonio Pergeo. Apollonio ε. 53. Notizia bibliografica su le *Coniche* di Apollonio. 54. Sul grado di originalità di quest'opera. 55. La prefazione generale di essa. 56. Il I Libro: fondamenti della teoria delle sezioni coniche. 57. Il II Libro: asintoti, diametri conjugati ed assi. 58. Il III Libro: alcuni teoremi generali sulle curve di second'ordine e loro applicazione al problema delle tre e quattro rette; poli e polari; germi della projettività applicata alle coniche e del concetto di curve inviluppi; fuochi. 59. Il IV Libro: intersezione e contatto di due coniche. 60. Il V Libro: problemi di massimo e minimo; normali ed evolute. 61. Il VI Libro: eguaglianza e similitudine di due sezioni coniche. 62. Il VII Libro: i due « teoremi di Apollonio » e le proposizioni che ad essi si collegano. 63. Osservazioni generali sopra le *Coniche* di Apollonio. 64. I tre problemi *Su le sezioni*. 65-67. Le opere di Apollonio *Su i contatti*, *Sui luoghi piani* e *Sulle inserzioni*. 68. Altri lavori di Apollonio. 69. Estensione data da Apollonio alla teoria degli irrazionali euclidei. Conclusione.

VI. I geometri minori del periodo greco-alessandrino.

70. Preliminari. — *Nicomede*. 71. La concoide: genesi, proprietà ed applicazione di questa curva alla trisezione dell'angolo. 72. Applicazione della medesima alla duplicazione del cubo. — *Diocle*. 73. Soluzione suggerita da Diocle pel problema di Delo; la cissoide. *Perseo*. Le linee spiriche. — *Zenodoro*. 75. Primo stadio di sviluppo della teoria degli isoperimetri.

76. Riassunto generale.

Appendice.

Esordio. — *L'algebra geometrica degli antichi secondo H. G. Zeuthen* (n. 1). *Sull'opera di Euclide relativa alla* Divisione delle figure (n. 2). — I Porismi *di Fermat, di Simson e di Chasles:* Fermat (n. 3). Simson (n. 4). Chasles (n. 5). — *Divinazioni tentate da Maurolico e da Viviani dei libri V e VI delle* Coniche *di Apollonio:* Maurolico (n. 6), Viviani (n. 7). — *La restituzione di Halley dell'ultimo libro delle* Coniche *di Apollonio* (n. 8). — *Divinazioni dei due libri di Apollonio* Sulle inserzioni: M. Ghetaldi (n. 9), Huygens (n. 10), Horsley (n. 11). — *Restituzione dei* Luoghi piani *di Apollonio:* Fermat (n. 12), Schooten (n. 13), Simson (n. 14).

Digitized by Google

ERRATA DEL LIBRO I.

Pag.	3	linea	4.ª: invece di *regge* si legga *regga*
»	8	»	6.ª } si cancelli la , annessa al segno —
»	9	»	8.ª }
»	11	»	5.ª: si tolga il primo *che*
»	»	»	9.ª dal basso: invece di *greque* leggasi *grecque*
»	23	»	6.ª: si aggiunga il richiamo alla fig. 3.ª
»	24	»	13.ª: invece di *parlare Talete* si legga *parlare a Talete*
»	34	»	18.ª: invece di *a* si legga *da*
»	41	»	2.ª dal basso: invece di *pentaedro* si legga *tetraedro*
»	47		in principio del n. 26 si scambino fra loro i nomi di *Proclo* e *Pitagora*
»	»	»	ultima: invece di *sottopone* si legga *sottopongano*
»	50	»	14.ª dal basso: invece di *parallele* si legga *parallela*
»	»	»	17.ª: si aggiunga in principio 28.
»	57	»	15.ª: invece di *sosteneva* si legga *sostenne*
»	61		14.ª dal basso: invece *egli sarebbe* si legga *egli vi sarebbe*
»	»	»	penultima: *nel Müller* si legga *Müller nel*
»	70	»	4.ª: si tolga la ,
»	77	»	2.ª: *assumerla, dimostrarla* si legga *assumerlo, dimostrarlo*
»	117	»	11.ª: si cancelli il *che*
»	»	»	3.ª dal basso: invece di *Herfod* si legga *Herford*
»	119	»	ultima: invece di *tetraede* si legga *tetrade*
»	122	»	1.ª: si aggiunga in principio 67.
»	133	»	2.ª: invece di *viene* si legga *ci viene*
»	»	»	5.ª dal basso: invece di *1699 e Jaequet* si legga *1669 e Tacquet*
»	139	»	6.ª dal basso: invece di *Littergeschichtliche* si legga *Litterargeschitliche*
»	147	»	4.ª dal basso: invece di *grécque* si legga *grecque*
»	157	»	13.ª dal basso: invece di *calcolare* si legga *calcolarne*
»	176	»	7.ª: invece di *Diodoro* si legga *Democrito*

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig.ª 1.ª

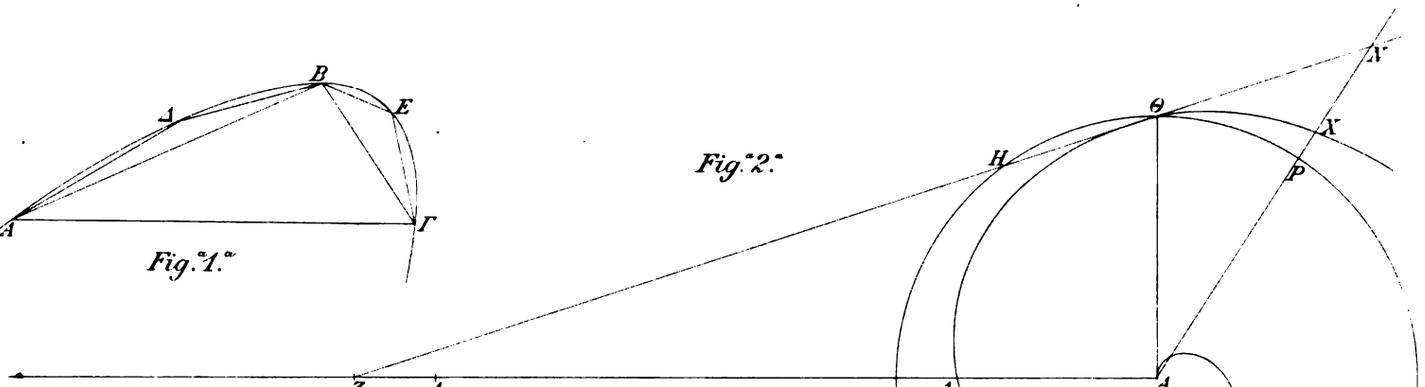


Fig.ª 2.ª

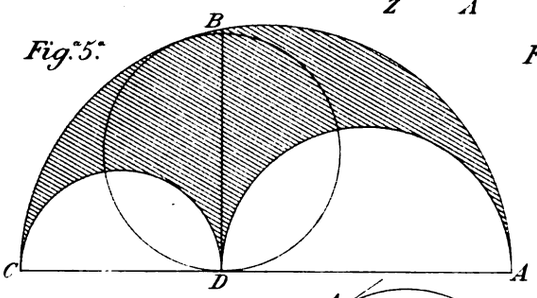


Fig.ª 5.ª

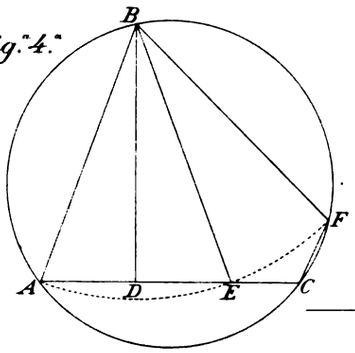


Fig.ª 4.ª

Fig.ª 6.ª

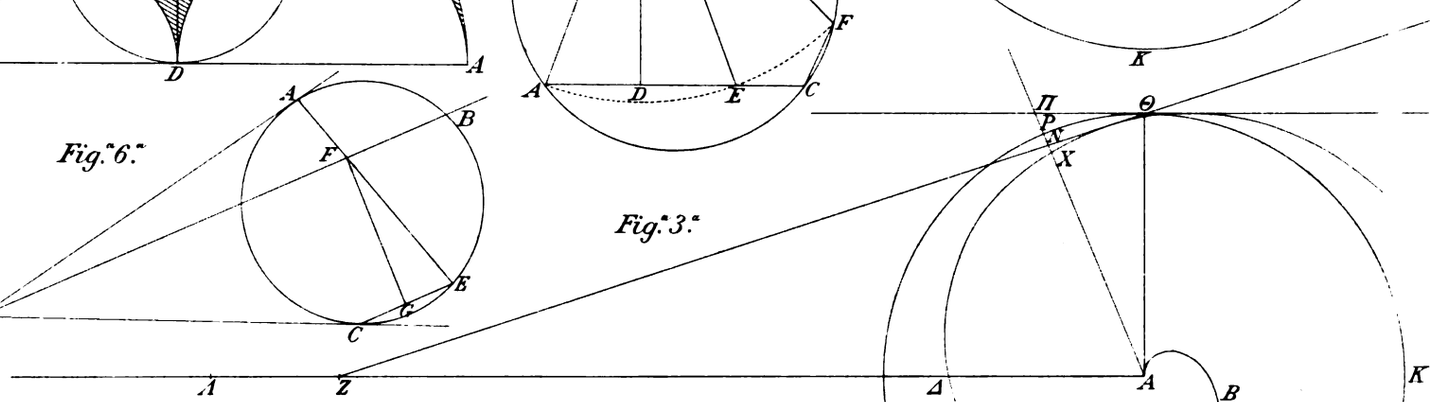


Fig.ª 3.ª

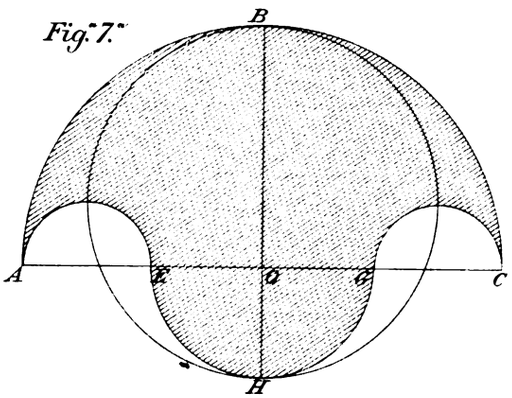


Fig.ª 7.ª

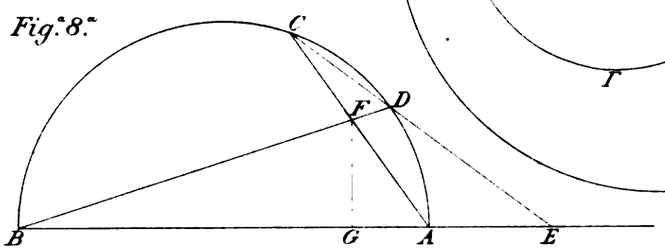


Fig.ª 8.ª

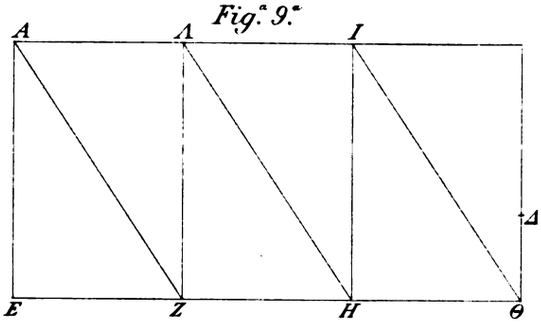


Fig.ª 9.ª

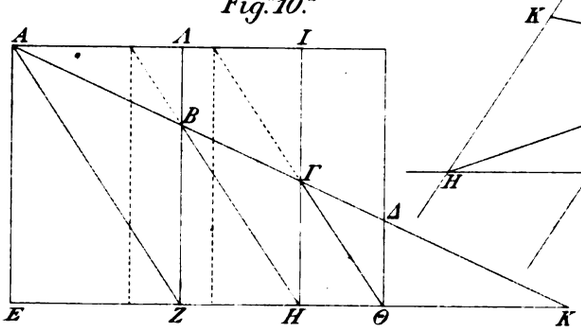


Fig.ª 10.ª

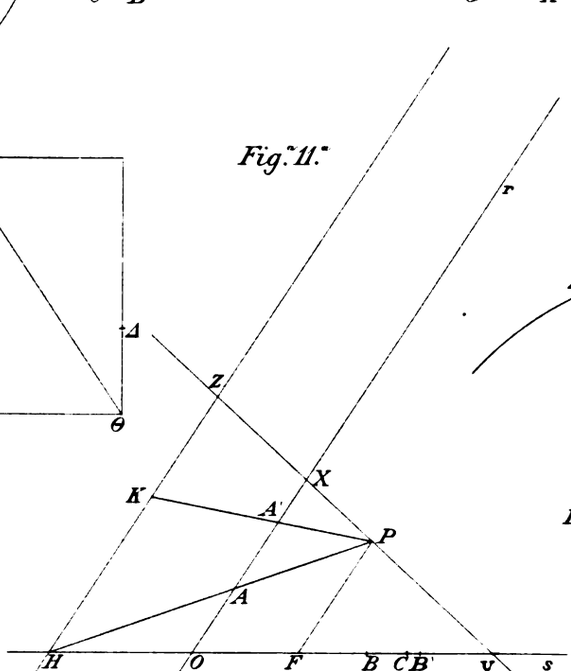


Fig.ª 11.ª

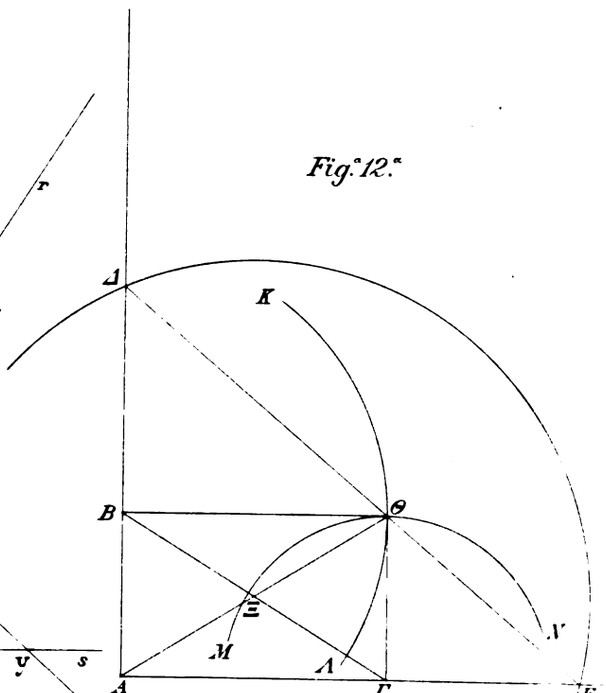


Fig.ª 12.ª

Digitized by Google

G. Pizzolotti K. lens.

Digitized by Google

Fig.° 13.°

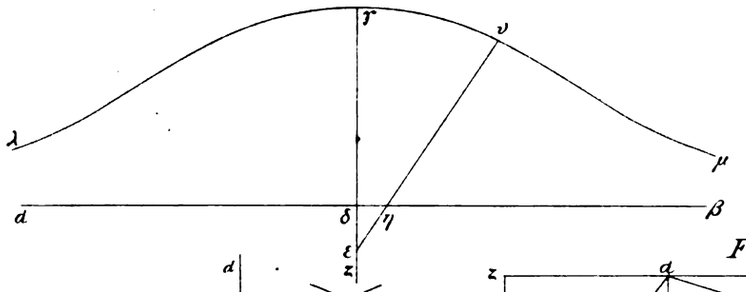


Fig.° 14.°

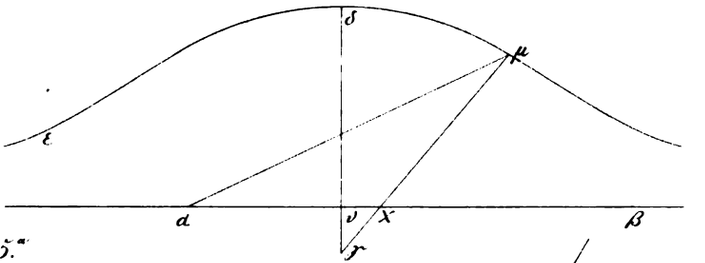


Fig.° 15.°

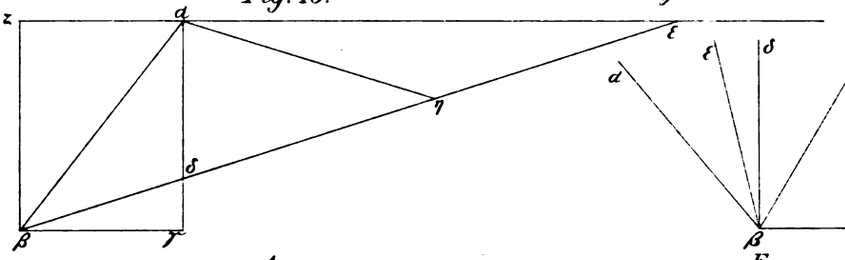


Fig.° 16.°

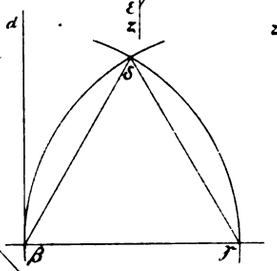


Fig.° 17.°

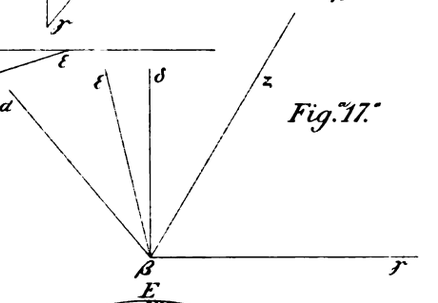


Fig.° 18.°

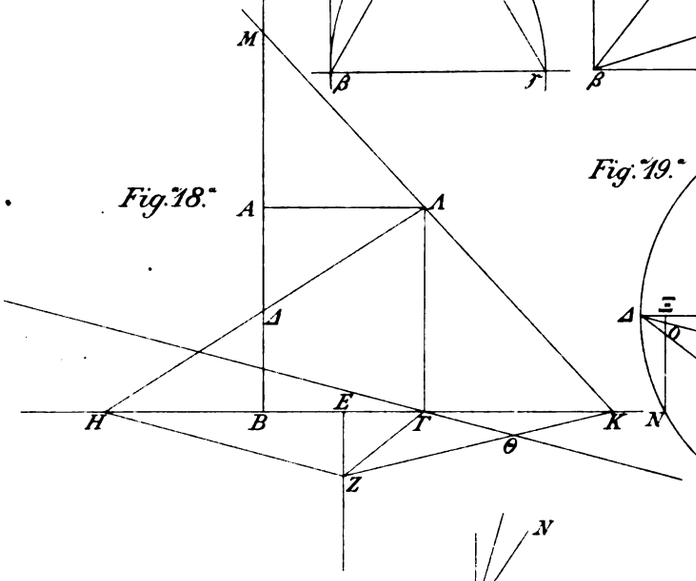


Fig.° 19.°

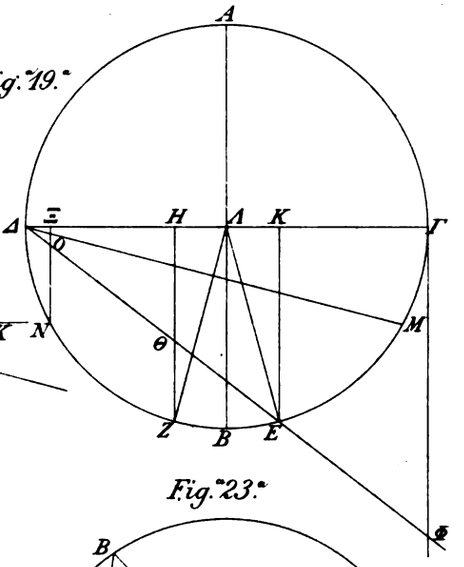


Fig.° 20.°

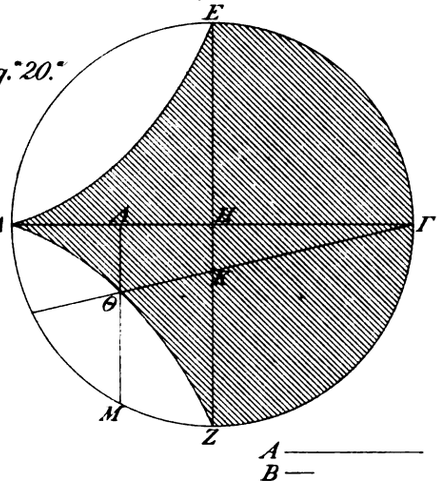


Fig.° 21.°

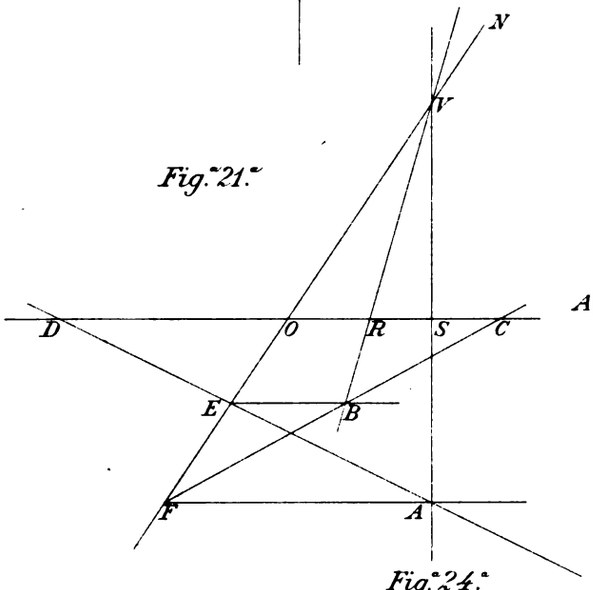


Fig.° 23.°

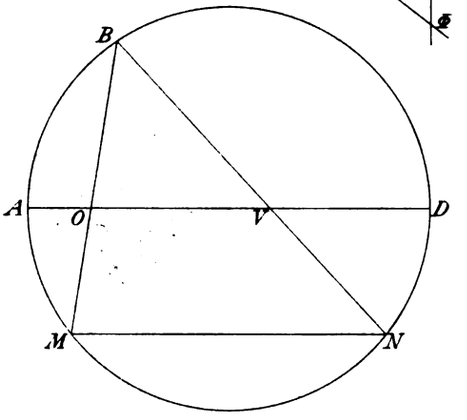


Fig.° 22.°

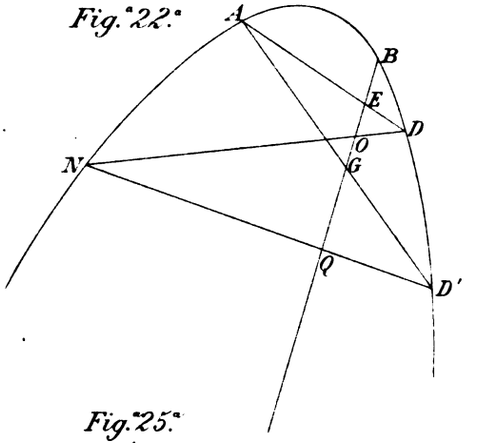


Fig.° 24.°

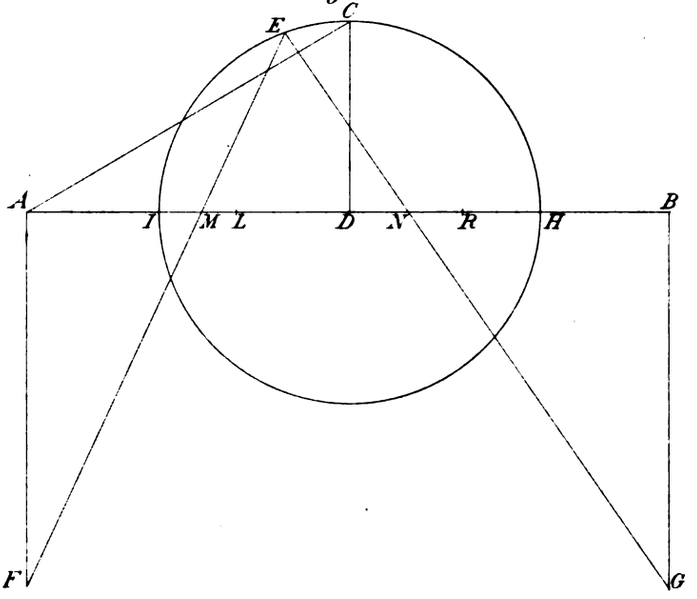
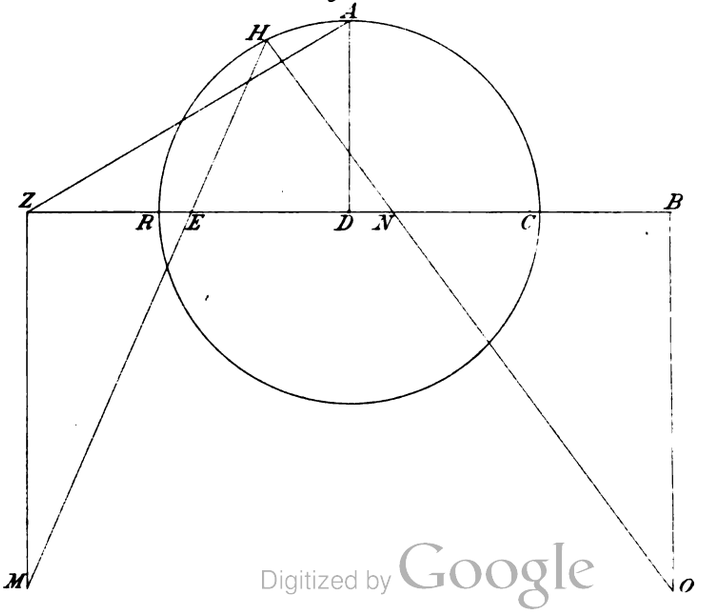


Fig.° 25.°



Digitized by Google

Digitized by Google

INTORNO AGLI SPAZI LINEARI

A TRE DIMENSIONI

CONSIDERATI NEL NOSTRO SPAZIO

PARTE SECONDA (*)

Rette, piani e spazi perpendicolari (**)

59. Sieno $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ due punteggiate passanti per il punto A_a.

Dai punti A, B, C si conducano i segmenti $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$ perpendicolari al piano ABC (alla retta AB e in un piano passante per essa, se le punteggiate (A_a, B_b), (A_a, C_c) sono sovrapposte) e in modo, che due qualunque di questi segmenti sieno diretti da una stessa banda del piano ABC (della retta AB) o da bande opposte, secondo che gli indici ad essi corrispondenti hanno lo stesso segno o segni contrari. Si descrivono le rette $A'B', A'C'$.

Assumo come *angolo delle due punteggiate* $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ l'angolo $B'A'C'$.

(*) La Parte I è inserita nel vol. X delle *Memorie* di questa R. Accademia.

(**) VERONESE. Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee. Padova 1891, pag. 468 e seg.

Digitized by Google

Se le due punteggiate $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ sono omogenee, cioè se $a = b = c$, l'angolo da esse formato è eguale all'angolo BAC.

Se l'angolo $B'A'C'$ è retto, dirò che le due punteggiate sono tra loro *perpendicolari*.

60. Da un punto qualunque appartenente ad una delle punteggiate $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$, p. e. dal punto D_d appartenente alla (A_a, B_b), si conduca (n.° 12) la punteggiata (D_d, E_e) parallela alla (A_a, C_c); la punteggiata (D_d, E_e) appartiene al piano punteggiato (A_a, B_b, C_c), epperciò l'angolo che essa fa colla (A_a, B_b) è eguale all'angolo delle due punteggiate (A_a, B_b), (A_a, C_c).

Per *angolo di due punteggiate che non s'incontrano* s'intende l'angolo che una di esse fa colla parallela condotta da un suo punto qualunque all'altra.

61. *Se due punteggiate* $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ *sono tra loro perpendicolari, sussiste la relazione*

$$a) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2(a-b)(a-c).$$

Viceversa, *se sussiste questa relazione, le due punteggiate* $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ *sono tra loro perpendicolari.*

62. *Se due punteggiate, non sovrapposte, sono tra loro perpendicolari e se almeno una di esse è omogenea, i loro sostegni sono perpendicolari. E se i sostegni di due punteggiate sono perpendicolari, queste punteggiate sono fra loro perpendicolari, se una almeno di esse è omogenea.*

63. Data una punteggiata non omogenea (A_a, B_b), per il punto A si conduca una retta qualunque r, che può anche coincidere colla retta AB, e, preso su di essa un punto arbitrario C, si assegni a questo punto come indice il valore di c ricavato dalla eguaglianza a), cioè

$$c = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 + 2a(a-b)}{2(a-b)}.$$

Digitized by Google

La punteggiata (A_a, C_c) è perpendicolare alla (A_a, B_b). Sulla retta r si prenda un altro punto D, al quale si assegni come indice il numero

$$d = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 + 2a(a-b)}{2(a-b)}.$$

La punteggiata (A_a, D_d) coincide colla (A_a, C_c).

Infatti, si ha

$$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2\,AB\,.\,AC} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2\,AB\,.\,AD},$$

ossia

$$\frac{a-c}{AC} = \frac{a-d}{AD},$$

epperciò i punti A_a, C_c, D_d appartengono ad una stessa punpunteggiata (n.° 10).

Dunque:

Data una punteggiata non omogenea (A_a, B_b) e dato un punto qualunque M_m, ogni retta condotta per M è il sostegno di una determinata punteggiata che passa per il punto M_m e che è perpendicolare alla (A_a, B_b).

Se la punteggiata (A_a, B_b) è omogenea, una retta qualunque condotta per M non è, in generale, il sostegno di una punteggiata perpendicolare alla (A_a, B_b), ma ogni retta condotta per M perpendicolarmente alla retta AB è il sostegno di infinite punteggiate che passano per il punto M_m e che sono perpendicolari alla (A_a, B_b) (n.° 62).

64. È chiaro che fra tutte le punteggiate appartenenti a un dato piano punteggiato e passanti per uno stesso punto, una sola è perpendicolare ad una punteggiata data appartenente al piano medesimo. Laonde:

Digitized by Google

Per un punto dato, non appartenente ad una data punteggiata, passa una sola punteggiata perpendicolare alla data e che la incontra.

65. Data una punteggiata non omogenea (A_a, B_b), si conduca per il punto A un piano qualunque α.

Se il piano α è perpendicolare alla retta AB, assegnando a ciascun punto di α come indice uno stesso numero, si ottiene un piano omogeneo: la punteggiata (A_a, B_b) è perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti a questo piano (n.° 62).

Il piano α non sia perpendicolare alla retta AB.

Si trovi su α la projezione C di un punto B della retta AB, e al punto C si assegni come indice il numero

$$c = a + \frac{\overline{AC}^2}{a - b}.$$

La punteggiata (A_a, C_c) è perpendicolare alla (A_a, B_b), (n.° 61).

Per il punto C si conduca, nel piano α, la retta r perpendicolare alla AC, e si consideri r come sostegno di una punteggiata omogenea $(C_c, M_\bullet)$ avente per indice il numero c; questa punteggiata è perpendicolare alla (A_a, B_b) e determina colla (A_a, C_c) un piano punteggiato (A_a, C_c, M_c).

Sulla (C_c, M_c) si prenda un punto qualunque M_c e si consideri la punteggiata (A_a, M_c); questa punteggiata è perpendicolare alla (A_a, B_b).

Infatti, descritta la retta BM, si ha

$$\overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2\,\overline{AC}^2.$$

Dunque:

$$\overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 + 2\,(a - b)\,(a - c).$$

La punteggiata (A_a, B_b) è manifestamente perpendicolare anche alla punteggiata omogenea appartenente al piano punteggiato (A_a, C_c, M_c) e passante per il punto A_a.

Digitized by Google

Dunque la punteggiata (A_a, B_b) è perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti al piano (A_a, C_c, M_c).

Il ragionamento che ha servito a dimostrare questa proposizione è applicabile anche al caso in cui il piano α passi per la retta AB.

Una punteggiata ed un piano punteggiato diconsi fra loro *perpendicolari* quando la punteggiata è perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti al piano.

Si può quindi stabilire il teorema seguente:

Data una punteggiata non omogenea e dato un punto qualunque P_p, ogni piano che passi per P è il sostegno di un determinato piano punteggiato, che passa per il punto P_p ed è perpendicolare alla data punteggiata.

Data una punteggiata omogenea e dato un punto P_p, un piano qualunque condotto per P non è, in generale, il sostegno di un piano punteggiato perpendicolare alla punteggiata, ma il piano condotto per P normalmente al sostegno della punteggiata è il sostegno di infiniti piani punteggiati perpendicolari a questa punteggiata.

66. *Il sostegno di una punteggiata perpendicolare ad un piano punteggiato non omogeneo è perpendicolare ai sostegni delle punteggiate omogenee di questo piano*, (n.° 62).

67. Abbiasi una punteggiata (M_m, N_n), la quale sia perpendicolare a due punteggiate (A_a, B_b), (A_a, C_c) segantisi nel punto A_a.

Se la (M_m, N_n) è omogenea, allora la retta MN essendo perpendicolare alle rette AB, AC (n.° 67), è perpendicolare a qualunque retta del piano ABC e per conseguenza la (M_m, N_n) è perpendicolare ad ogni punteggiata appartenente al piano (A_a, B_b, C_c).

La punteggiata (M_m, N_n) non sia omogenea. Il piano ABC è il sostegno di un determinato piano punteggiato che passa per il punto A_a ed è perpendicolare alla (M_m, N_n) (n.° 65). A questo piano appartengono le punteggiate (A_a, B_b), (A_a, C_c), epperciò esso coincide col piano (A_a, B_b, C_c) (n.° 19).

Digitized by Google

Dunque:

Una punteggiata perpendicolare a due punteggiate non parallele appartenenti ad uno stesso piano punteggiato è perpendicolare a questo piano.

68. Si dimostra facilmente che per un punto qualunque appartenente ad un dato spazio passa una sola punteggiata appartenente a questo spazio e perpendicolare a un dato piano punteggiato appartenente allo spazio medesimo. Laonde:

Per un punto dato, non appartenente ad un dato piano punteggiato, passa una sola punteggiata perpendicolare a questo piano e che lo incontra.

69. Per trovare una punteggiata che passi per un punto dato M_m e sia perpendicolare ad un dato piano non omogeneo (α), basta condurre per M una retta r perpendicolare ai sostegni delle punteggiate omogenee di (α), e assegnare ad un punto qualunque N di r un indice n tale, che la punteggiata (M_m, N_n) risulti perpendicolare ad una punteggiata non omogenea di (α). La punteggiata (M_m, N_n) essendo perpendicolare a due punteggiate non parallele di (α) è perpendicolare a questo piano.

70. Sieno $(M_m, N_n), (M_m, P_p)$ due punteggiate passanti per il punto M_m e perpendicolari ad un dato piano non omogeneo (α): esse determinano il piano $(M_m, N_n, P_p) \equiv (\beta)$. Il piano β è perpendicolare al piano α, (n.° 66). Ogni punteggiata appartenente al piano (α) è perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti al piano (β), (n.° 67) e viceversa.

Ogni perpendicolare al piano (α) condotta per M_m ha il suo sostegno situato nel piano β e deve appartenere a (β), perchè se così non fosse passerebbero per M_m due perpendicolari ad (α) aventi lo stesso sostegno, il che è impossibile (n.° 63). Dunque:

Il luogo delle punteggiate che passano per un punto dato M_m e che sono perpendicolari ad un piano dato (α) non omogeneo è un piano (β).

Il piano (β) dicesi *perpendicolare di 1.ª specie* al piano (α).

Digitized by Google

Per un punto dato passano infinite punteggiate perpendicolari ad un dato piano omogeneo, ma tutte queste perpendicolari hanno per sostegno una stessa retta.

71. Sono evidenti le proposizioni seguenti:

1.ª *Se un piano* (β) *è perpendicolare di 1.ª specie ad un piano* (α), *viceversa* (α) *è perpendicolare di 1.ª specie a* (β).

2.ª *I sostegni di due piani perpendicolari di 1.ª specie sono tra loro perpendicolari.*

3.ª *Se due piani sono perpendicolari di 1.ª specie, tutte le punteggiate di ciascuno di essi sono perpendicolari all'altro.*

4.ª *Per un punto dato passa un solo piano punteggiato perpendicolare di 1.ª specie ad un piano punteggiato dato non omogeneo.*

72. Le due punteggiate che hanno per sostegno l'intersezione dei sostegni di due piani perpendicolari di 1.ª specie essendo tra loro perpendicolari, hanno un solo punto unito che non può trovarsi all'infinito. Dunque:

Due piani punteggiati perpendicolari di 1.ª specie hanno un solo punto unito, che è situato a distanza finita.

73. Chiamasi *piede* di un piano perpendicolare di 1.ª specie ad un altro piano il punto comune a questi due piani.

È manifesto che *il piede del piano punteggiato che passa per un punto dato ed è perpendicolore di 1.ª specie ad un piano dato è il piede della perpendicolare condotta da quel punto a questo piano* (n.° 68).

74. Sieno $(\alpha), (\beta)$ due piani perpendicolari di 1.ª specie ad un piano (γ), e sia B_b il piede di (β).

Si considerino due punteggiate non parallele appartenenti al piano (α), e ad esse per il punto B_b si conducano le parallele $(B_b, C_c), (B_b, D_d)$. Queste due punteggiate determinano un piano punteggiato, che è parallelo ad (α): ma esse sono perpendicolari al piano (γ), dunque il piano (B_b, C_c, D_d) è perpendicolare a (γ), e siccome il suo sostegno è il piano β, così coincide con (β). Dunque:

Due piani perpendicolari di 1.ª specie ad uno stesso piano punteggiato sono paralleli. Ossia:

Digitized by Google

Tutti i piani perpendicolari di 1.ª specie ad uno stesso piano passano per una stessa punteggiata all'infinito: a questa punteggiata si appoggiano tutte le punteggiate perpendicolari al piano dato.

75. Un piano punteggiato dicesi *perpendicolare di 2.ª specie* ad un altro, se passa per un punto all'infinito appartenente a questo piano e per un punto appartenente alla punteggiata comune ai piani perpendicolari di 1.ª specie al piano medesimo.

Si vede facilmente che:

1.° *Se un piano* (β) *è perpendicolare di 2.ª ad un piano* (α), *questo piano* (α) *è perpendicolare di 2.ª specie a* (β).

2.° *Se un piano* (β) *è perpendicolare di 2.ª specie ad un piano* (α), *per ogni punto di* (β) *passa una (una sola) punteggiata appartenente a questo piano e perpendicolare ad* (α): *tutte queste punteggiate sono fra loro parallele.*

3.° *Per una punteggiata parallela o perpendicolare ad un dato piano punteggiato non omogeneo passano infiniti piani perpendicolari di 2.ª specie al piano dato.*

4.° *Un piano perpendicolare di 2.ª specie ad un altro è perpendicolare di 2.ª specie ad ogni piano parallelo o perpendicolare di 1.ª specie al secondo.*

76. Data una punteggiata non omogenea (A_a, B_b), per il punto A si conducano tre rette non situate in uno stesso piano, e si considerano le punteggiate $(A_a, C_c), (A_a, D_d), (A_a, E_e)$ che hanno per sostegni quelle tre rette e sono perpendicolari alla (A_a, B_b). Questa punteggiata è perpendicolare a ciascuno dei piani $(A_a, C_c, D_d), (A_a, C_c, E_e), (A_a, D_d, E_e)$ (n.° 67). Per A si conduca una retta r non situata in alcuno dei piani ACD, ACE, ADE. La retta r è il sostegno di una determinata punteggiata (A_a, M_m) appartenente allo spazio (A_a, C_c, D_d, E_e). Il piano (A_a, C_c, M_m) sega il piano (A_a, D_d, E_e) secondo una punteggiata (A_a, N_n). La (A_a, B_b), essendo perpendicolare alle due punteggiate $(A_a, C_c), (A_a, N_n)$, è perpendicolare ancora alla punteggiata (A_a, M_m). Dunque la punteggiata (A_a, B_b) è

Digitized by Google

perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti allo spazio (A_a, C_c, D_d, E_e).

Uno spazio ed una punteggiata diconsi fra loro perpendicolari quando la punteggiata è perpendicolare a tutte le punteggiate e quindi a tutti i piani punteggiati appartenenti allo spazio.

77. Da ciò che precede si deduce:

Una punteggiata perpendicolare a tre punteggiate passanti per uno stesso punto e determinanti uno spazio è perpendicolare a questo spazio.

E si vede anche come si debba procedere per *condurre per un punto dato uno spazio perpendicolare ad una data punteggiata non omogenea.*

78. *Per un punto dato M_m passa un solo spazio perpendicolare ad una data punteggiata non omogenea (A_a, B_b)*, perchè se per M_m passassero due spazi perpendicolari alla (A_a, B_b), conducendo per M una retta r fuori del sostegno del piano d'intersezione dei due spazi, la retta r sarebbe il sostegno di due punteggiate passanti per M_m e perpendicolari alla (A_a, B_b), il che è impossibile (n.° 63).

Data una punteggiata omogenea (A_a, B_b) e dato un punto M_m, tutte le punteggiate che passano per questo punto e sono perpendicolari alla (A_a, B_b) hanno i loro sostegni situati nel piano condotto per M perpendicolarmente alla retta AB.

79. *Il sostegno di una punteggiata perpendicolare ad uno spazio è perpendicolare ai sostegni dei piani omogenei di questo spazio.*

80. Dato uno spazio non omogeneo e dato un punto M_m, si conduca per M una retta r perpendicolare ai sostegni dei piani omogenei dello spazio, e ad un punto qualunque N di r si assegni un indice n tale, che la punteggiata (M_m, N_n) risulti perpendicolare ad una punteggiata non omogenea appartenente allo spazio dato: la punteggiata (M_m, N_n) è perpendicolare a questo spazio.

Se per il punto M_m passassero due punteggiate perpendicolari allo spazio dato, considerando la punteggiata determinata

Digitized by Google

daid ue punti in cui esse incontrerebbero lo spazio, questa punteggiata sarebbe incontrata da due perpendicolari ad essa condotte dallo stesso punto M_m, il che è impossibile (n.° 64). Dunque:

Per un punto dato passa una ed una sola punteggiata perpendicolare ad uno spazio dato non omogeneo.

81. Non vi è alcuna punteggiata la quale sia perpendicolare ad uno spazio omogeneo.

82. Chiamasi *piede* di una punteggiata perpendicolare ad uno spazio il punto in cui essa incontra questo spazio.

Il piede della perpendicolare condotta da un punto dato ad uno spazio dato non omogeneo, e, in generale, il punto d'incontro di una punteggiata non omogenea e di uno spazio non omogeneo dati, si può trovare nel seguente modo:

Si conducano due piani omogenei dello spazio dato, e per i due punti della punteggiata che hanno gli stessi indici dei due piani, si conducano due rette parallele fra loro ma non ai sostegni di questi piani, e si considerino come i sostegni di due punteggiate omogenee passanti per i due punti suddetti. Queste due punteggiate incontreranno i due piani omogenei in due punti: si descriva la retta che passa per questi due punti, la quale segherà la data punteggiata nel punto domandato.

83. Abbiansi due punteggiate parallele: se una di esse è perpendicolare ad un dato spazio, essa è perpendicolare a tutte le punteggiate appartenenti a questo spazio, epperciò anche l'altra gode la stessa proprietà. Dunque:

Se due punteggiate sono parallele e se una di esse è perpendicolare ad un dato spazio, anche l'altra è perpendicolare a questo spazio.

84. Se due punteggiate perpendicolari ad un dato spazio non fossero parallele, per un punto qualunque a distanza finita dell'una si potrebbe condurre una punteggiata parallela all'altra, e allora per quel punto passerebbero due punteggiate perpendicolari ad uno stesso spazio, il che è impossibile. Dunque:

Due punteggiate perpendicolari ad uno stesso spazio sono parallele.

Digitized by Google

85. Se due spazi perpendicolari ad una stessa punteggiata avessero un punto comune a distanza finita, le punteggiate determinate da questo punto e dai due punti in cui gli spazi segano la punteggiata sarebbero a questa perpendicolari; ma ciò non è possibile; dunque:

Due spazi perpendicolari ad una stessa punteggiata sono paralleli.

86. Un piano punteggiato dicesi *perpendicolare ad uno spazio non omogeneo* quando passa per una punteggiata perpendicolare a questo spazio.

Da questa definizione si deduce immediatamente:

Per una punteggiata, non perpendicolare ad un dato spazio non omogeneo, passa un solo piano punteggiato perpendicolare a questo spazio.

87. Sia (α) un piano perpendicolare ad uno spazio e sia (β) un piano appartenente a questo spazio e passante per la punteggiata secondo cui lo spazio medesimo è incontrato dal piano (α). La punteggiata perpendicolare allo spazio, per la quale il piano (α) passa, è perpendicolare al piano (β). Il piano (α) passa quindi per un punto all'infinito di (β) e per un punto all'infinito che appartiene alla punteggiata comune ai piani perpendicolari di 1.ª specie a (β). Dunque (n.° 75):

Un piano perpendicolare ad uno spazio è perpendicolare di 2.ª specie ad ogni piano punteggiato appartenente a questo spazio e passante per la punteggiata secondo cui lo spazio medesimo è segato da quel piano.

88. Essendo fra loro parallele tutte le punteggiate perpendicolari ad uno stesso spazio, si ha:

Se un piano è perpendicolare ad uno spazio, appartengono a questo piano tutte le punteggiate condotte dai suoi punti perpendicolarmente a quello spazio.

89. Evidentemente si ha pure:

Il sostegno di un piano perpendicolare ad uno spazio è perpendicolare ai sostegni dei piani omogenei di questo spazio.

Digitized by Google

90. Sia (α) un piano perpendicolare ad uno spazio S. Da un punto qualunque M_m si conducano la perpendicolare (M_m, N_n) ad (α), la quale incontri questo piano nel punto N_n, e la perpendicolare ad S, che incontri questo spazio nel punto P_p. Se dal punto N_n si conduce la (N_n, Q_q) perpendicolare ad S, questa punteggiata appartiene a (α) ed è parallela alla (M_m, N_n). Essendo retto l'angolo formato dalle due punteggiate (M_m, N_n), (N_n, Q_q), anche l'angolo formato dalle due punteggiate (M_m, N_n), (M_m, P_p) è retto. Dunque:

Se un piano è perpendicolare ad uno spazio, conducendo da un punto qualunque quella perpendicolare al piano che lo incontra e la perpendicolare allo spazio, l'angolo da esse formato è retto.

91. Ogni spazio che passi per un piano perpendicolare di 1.ª specie ad un dato piano punteggiato dicesi *perpendicolare* a questo piano.

92. Abbiasi un piano (α) il quale sia perpendicolare ad uno spazio S e tagli questo spazio secondo la punteggiata (r). Per un punto qualunque M_m di (r) passa un piano (β), che appartiene ad S ed è perpendicolare ad (r). Se per M_m si conduce la punteggiata (t) perpendicolare ad S, questa punteggiata appartiene al piano (α) ed è perpendicolare a (β). Le punteggiate (r) e (t), appartenenti ad (α), sono ambedue perpendicolari a (β), dunque i piani $(\alpha), (\beta)$ sono fra loro perpendicolari di 1.ª specie, epperciò lo spazio S, a cui (β) appartiene è perpendicolare ad (α). Dunque:

Se un piano è perpendicolare ad uno spazio, questo spazio è perpendicolare a quel piano.

93. Sia data una punteggiata (r) non perpendicolare ad un dato piano punteggiato (α) non omogeneo. Se da un punto di (r) si conducono due punteggiate $(s), (t)$ perpendicolari ad (α), lo spazio S determinato dalle $(r), (s), (t)$ è perpendicolare al piano (α).

Ogni spazio che passi per la punteggiata (r) e sia perpendicolare al piano (α) deve passare per le punteggiate $(s), (t)$, epperciò coincide con S. Dunque:

Digitized by Google

Per una punteggiata, non perpendicolare ad un dato piano non omogeneo, passa un solo spazio perpendicolare a questo piano.

94. Le perpendicolari condotte dai punti di una punteggiata ad uno spazio non omogeneo giaciono in un piano, che passa per quella punteggiata ed è perpendicolare a questo spazio. Dunque:

I piedi delle perpendicolari condotte dai punti di una punteggiata, non perpendicolare a un dato spazio non omogeneo, a questo spazio giaciono in una punteggiata, che passa per il punto in cui quella punteggiata incontra lo spazio considerato.

95. Le perpendicolari condotte dai punti di una punteggiata ad un piano appartengono ad uno spazio che passa per quella punteggiata ed è perpendicolare a questo piano (n.° 74). Dunque:

I piedi delle perpendicolari condotte dai punti di una punteggiata ad un piano e che incontrano questo piano appartengono ad una stessa punteggiata.

96. I piani perpendicolari di 1.ª specie condotti dai punti di una punteggiata ad un piano non omogeneo appartengono ad uno spazio che passa per la punteggiata ed è perpendicolare al piano. Dunque:

I piedi dei piani perpendicolari di 1.ª specie condotti dai punti di una punteggiata, non perpendicolare ad un dato piano non omogeneo, a questo piano, appartengono ad una stessa punteggiata.

97. Uno spazio dicesi *perpendicolare ad un altro spazio* se passa per una punteggiata perpendicolare a questo secondo spazio.

Sia S' uno spazio perpendicolare ad uno spazio S. Si considerino due punteggiate $(r), (s)$ appartenenti ad S', non perpendicolari ad S e non parallele. Due spazi rispettivamente perpendicolari alle $(r), (s)$ si tagliano secondo un piano, il quale sega lo spazio S secondo una punteggiata (t) perpendicolare ad ambedue le punteggiate $(r), (s)$. La punteggiata (t) è anche perpendicolare alle punteggiate perpendicolari ad S,

Digitized by Google

le quali appartengono ad S', epperciò è perpendicolare a questo spazio (77). Dunque:

Se uno spazio è perpendicolare ad un altro spazio, questo è perpendicolare al primo.

98. Le seguenti proposizioni sono evidenti:

1.ª *Ciascuno di due spazi tra loro perpendicolari contiene infinite punteggiate perpendicolari all'altro.*

2.ª *Se da un punto si conducono le perpendicolari a due spazi tra loro perpendicolari, l'angolo da esse formato è retto.*

3.ª *Per un piano punteggiato, non perpendicolare ad un dato spazio non omogeneo, passa uno (un solo) spazio perpendicolare allo spazio dato.*

4.ª *I piedi delle perpendicolari condotte dai punti di un piano punteggiato, non perpendicolare ad un dato spazio non omogeneo, appartengono ad uno stesso piano punteggiato, che passa per la intersezione dello spazio e del piano considerato.*

99. (*) Sieno $(r),(s)$ due punteggiate determinanti uno spazio S. Immaginando due spazi rispettivamente perpendicolari alla $(r),(s)$, questi spazi si tagliano secondo un piano punteggiato (a), che è perpendicolare a ciascuna delle punteggiate $(r),(s)$. Ogni piano parallelo ad (a), e soltanto ogni piano avente questa proprietà, è perpendicolare alle $(r),(s)$ (n.° 74). Dunque:

Vi è una sola giacitura di piani perpendicolari a due punteggiate determinanti uno spazio.

E quindi:

Per un punto dato passa un solo piano perpendicolare a due punteggiate determinanti uno spazio.

100. Sieno $(r),(s)$ due punteggiate determinanti uno spazio S. In questo spazio vi è una sola punteggiata (t) che

---

(*) Considero quì e in seguito soltanto punteggiate, piani punteggiati e spazi non omogenei.

Digitized by Google

sega ad angoli retti le $(r), (s)$. Da un punto qualunque della (t) si conduca la perpendicolare allo spazio S. Questa perpendicolare e la punteggiata (t) determinano un piano, che sega le $(r), (s)$ perpendicolarmente (67), è anche perpendicolare allo spazio S ed è il solo piano che goda queste proprietà. Dunque:

Vi è un solo piano punteggiato perpendicolare a due punteggiate date determinanti uno spazio e che le incontra; quel piano è perpendicolare a questo spazio.

101. Tre spazi rispettivamente perpendicolari a tre punteggiate $(r), (s), (t)$, indipendenti si tagliano secondo una punteggiata che è perpendicolare a ciascuna di quelle. Due punteggiate perpendicolari alle tre $(r), (s), (t)$ sono parallele, perchè sono perpendicolari ad uno qualunque degli spazi paralleli ad esse (n.° 84). Dunque:

Vi è una sola direzione di punteggiate perpendicolari a tre punteggiate indipendenti.

E quindi:

Per un punto dato passa una sola punteggiata perpendicolare a tre punteggiate indipendenti.

102. Sieno (α) ed (r) un piano punteggiato ed una punteggiata, indipendenti. Un piano perpendicolare di 1.ª specie ad (α) ed uno spazio perpendicolare alla (r) si tagliano secondo una punteggiata, che è perpendicolare tanto ad (α) quanto alla (r). Due punteggiate perpendicolari insieme ad (α) ed alla (r) sono parallele, perchè ambedue perpendicolari ad uno qualunque degli spazi paralleli a questo piano ed a questa punteggiata. Dunque:

Vi è una sola direzione di punteggiate perpendicolari ad un piano punteggiato e ad una punteggiata indipendenti.

E quindi:

1.° *Vi è una sola punteggiata che sega perpendicolarmente un piano punteggiato ed una punteggiata indipendenti.*

2.° *Per un punto dato passa una sola punteggiata perpendicolare ad un piano punteggiato e ad una punteggiata indipendenti.*

Digitized by Google

103. Per trovare la punteggiata che incontra perpendicolarmente una punteggiata ed un piano punteggiato dati indipendenti, si può procedere nel seguente modo.

Da due punti della punteggiata si conducano due perpendicolari al piano che lo incontrino: i piedi di queste perpendicolari determinano una punteggiata, che non incontra la data; la punteggiata che sega queste due ad angoli retti è la perpendicolare cercata.

104. Sono evidenti le proporzioni seguenti:

1.ª *Vi è una sola giacitura di piani perpendicolari a due spazi non paralleli.*

2.ª *Un piano perpendicolare a due spazi non paralleli è perpendicolare di 1.ª specie al piano secondo cui questi spazi si tagliano.*

3.ª *Per un punto dato passa un solo piano perpendicolare a due spazi dati non paralleli.*

105. Sieno $(\alpha), (\beta)$ due piani paralleli di 2.ª specie.

Se uno spazio S è perpendicolare ai piani $(\alpha), (\beta)$, a questi piani debbono appartenere due punteggiate perpendicolari ad S: ma due punteggiate perpendicolari ad uno spazio sono parallele (84), e nei due piani $(\alpha), (\beta)$ soltanto le punteggiate passanti pel punto ad essi comune sono parallele, dunque lo spazio S deve essere perpendicolare a queste punteggiate.

Uno spazio S perpendicolare ai due piani $(\alpha), (\beta)$ sega questi piani secondo due punteggiate non appartenenti ad uno stesso piano. Vi è una punteggiata (t) che sega perpendicolarmente queste due punteggiate. La punteggiata (t) e le parallele ad essa soltanto sono perpendicolari ai due piani $(\alpha), (\beta)$.

Dunque:

Vi è una sola giacitura di spazi perpendicolari a due piani paralleli di 2.ª specie, e vi è una sola direzione di punteggiate perpendicolari ad ambedue questi piani.

E quindi:

Per un punto dato passa un solo spazio ed una sola punteggiata perpendicolari a due piani paralleli di 2.ª specie.

Digitized by Google

106. Due piani $(\alpha), (\beta)$ paralleli di 2.ª specie sieno incontrati perpendicolarmente da una punteggiata nei punti A_a, B_b e da un altra punteggiata nei punti $A'_{a'}, B'_{b'}$. Le punteggiate $(A_a, A'_{a'}), (B_b, B'_{b'})$ sono parallele, epperciò passano per l'unico punto comune ai due piani $(\alpha), (\beta)$.

Il piano che passa per le punteggiate $(A_a, A'_{a'}), B_b, B'_{b'})$ passa per un punto all'infinito comune ai piani perpendicolari di 1.ª specie ad (α), per un punto all'infinito comune ai piani perpendicolari di 1.ª specie a (β): e sega le punteggiate all'infinito appartenenti a questi piani.

Dunque:

Tutte le punteggiate perpendicolari comuni a due piani paralleli di 2.ª specie e che incontrano questi piani, sono situate in uno stesso piano, che li sega secondo due punteggiate parallele, ed è perpendicolare di 2.ª specie ad essi.

107. Per un punto dato A_a si conducano due punteggiate $(A_a, B_b), (A_a, C_c)$ fra loro perpendicolari; indi una punteggiata (A_a, D_d) perpendicolare al piano (A_a, B_b, C'_c), e finalmente la punteggiata (A_a, E_e) perpendicolare allo spazio (A_a, B_b, C_c, D_d). Si ottengono quattro punteggiate, ciascuna delle quali è perpendicolare alle altre tre. Dunque:

Per un punto qualunque passano infiniti gruppi di 4 punteggiate due a due perpendicolari. I piani e gli spazi che due a due e tre a tre esse determinano sono due a due perpendicolari.

108. Sia dato uno spazio non omogeneo S.

Da un punto qualunque M_m si conduca la perpendicolare ad S (n.° 80). Il piede di questa perpendicolare chiamasi *projezione ortogonale* o semplicemente *projezione* del punto M_m sullo spazio S, che dicesi *spazio di projezione* (n.° 54).

La projezione di una figura è il luogo delle projezioni di tutti i suoi punti.

109. *La projezione di una punteggiata non perpendicolare allo spazio di projezione è una punteggiata, che passa per il punto in cui quella punteggiata incontra questo spazio* (n.° 94).

Digitized by Google

La projezione di una punteggiata parallela allo spazio di projezione è parallela a questa punteggiata.

La projezione di una punteggiata perpendicolare allo spazio di projezione ha per sostegno il punto in cui essa incontra questo spazio.

110. *La projezione di un piano punteggiato, non perpendicolare allo spazio di projezione, è un piano punteggiato, che passa per la punteggiata secondo cui quel piano sega questo spazio* (n.° 98, 4.°).

La projezione di un piano punteggiato parallelo allo spazio di projezione è parallela a questo piano.

La projezione di un piano punteggiato perpendicolare allo spazio di projezione ha per sostegno il sostegno della punteggiata secondo cui il piano sega lo spazio.

111. *Le projezioni di due punteggiate parallele, non appartenenti ad uno stesso piano perpendicolare allo spazio di projezione, sono due punteggiate parallele* (n.° 51).

Le projezioni di due piani punteggiati paralleli, non perpendicolari allo spazio di projezione, sono due piani paralleli (n.° 51).

112. Sieno (r), (s) due punteggiate perpendicolari tra loro, delle quali la (r) sia parallela allo spazio di projezione e la (s) non sia perpendicolare a questo spazio.

Per la punteggiata (s) passa uno spazio S' perpendicolare alla punteggiata (r); la projezione di (s) è una punteggiata che appartiene allo spazio S', epperciò questa punteggiata è perpendicolare ad (r) e quindi anche alla projezione di (r) (n.° 109). Dunque:

Se due punteggiate sono perpendicolari, se una di esse è parallela allo spazio di projezione e l'altra non è perpendicolare a questo spazio, le loro projesioni sono perpendicolari (*).

113. *Se una punteggiata è perpendicolare ad un piano punteggiato non parallelo allo spazio di projezione, e non è perpendicolare a questo spazio, la sua projezione è perpendicolare alla traccia del piano* (n.° 111).

(*) VERONESE. Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni. *Atti del R. Istituto Veneto di S. L. ed A.* Serie 5.ª, Tomo 2.°, pag. 1014.

Digitized by Google

114. Sieno (α) ed (r) un piano ed una punteggiata fra loro perpendicolari; il piano (α) sia parallelo allo spazio di projezione e la (r) non sia perpendicolare a questo spazio.

Si considerino due punteggiate non parallele appartenenti al piano (α); la punteggiata (r) è perpendicolare ad esse; ma queste sono parallele allo spazio di projezione, dunque le loro projezioni sono perpendicolari alla projezione della punteggiata (r) (n.° 112), cioè questa projezione è perpendicolare alla projezione del piano (α). Dunque:

Se una punteggiata è perpendicolare ad un piano punteggiato parallelo al piano di projezione e se non è perpendicolare a questo piano, la projezione della punteggiata è perpendicolare alla projezione del piano.

115. Sieno (r) ed (α) una punteggiata ed un piano punteggiato perpendicolari tra loro; la punteggiata (r) sia parallela allo spazio di projezione ed il piano (α) non sia perpendicolare a questo spazio.

La punteggiata (r) essendo perpendicolare al piano (α) ed anche alle perpendicolari allo spazio di projezione, è perpendicolare allo spazio projettante il piano (α) (n.° 77), epperciò la projezione di (r) è perpendicolare alla intersezione di questo spazio e dello spazio di projezione, cioè alla projezione del piano (α). Dunque:

Se una punteggiata parallela allo spazio di projezione è perpendicolare ad un piano punteggiato non perpendicolare a questo spazio, la projezione della punteggiata è perpendicolare alla projezione del piano.

116. *Data una figura appartenente ad uno spazio non coincidente collo spazio di projezione, questa figura e la sua projezione sono omologiche affini: il piano di affinità è il piano punteggiato secondo cui i due spazi si tagliano* (n.° 58).

PROF. FRANCESCO NICOLI.

Digitized by Google

Digitized by Google

DISSOCIAZIONE ELETTROLITICA

E COLORAZIONE

Le numerose ricerche fatte intorno agli spettri di assorbimento delle soluzioni di sostanze colorate, ed istituite principalmente allo scopo di esaminare quali relazioni si rinvengono fra la colorazione dei corpi e la loro costituzione chimica (1), hanno condotto al risultato che se fra composizione chimica ed assorbimento vi sono delle relazioni, queste debbono essere di natura eminentemente costitutiva, ancora quasi completamente sconosciute. Così si osserva che le innumerevoli sostanze organiche coloranti artificiali e naturali sono formate di quei medesimi elementi: carbonio, ossigeno, idrogeno, azoto,..... che formano colla loro combinazione una serie più numerosa di sostanze incolore; e tutti i tentativi fatti per ricercare la causa del colore in particolari condizioni di composizione e costituzione chimica della materia colorata, non hanno condotto alla scoperta di alcuna legge sicura ed esatta.

(1) Vedi principalmente i lavori di Krüss. Kock, Soret, Hartley, Abney, Schütze, Witt, Kehrmann, Armstrong, Ackroyd....

Digitized by Google

Un comportamento tutto particolare presentano però, sotto questo riguardo le soluzioni degli acidi, delle basi, e dei sali colorati.

Nel 1857 Gladstone (1) eseguendo alcune ricerche sopra l'assorbimento dei sali colorati, trovò che se il metallo e l'acido sono colorati, il colore del sale è dato dalla somma dei colori della base e dell'acido, legge estesa più tardi dal Soret, ad altri sali non colorati (2), per il campo ultravioletto dello spettro. Il Gladstone non fece però, per i sali esaminati, ricerche spettrofotografiche nè spettrofotometriche, cosicchè le sue osservazioni non possono servire alla dimostrazione della sua legge che solamente in un grado di prima approssimazione.

Più recentemente l'Ostwald (3) si è occupato di questo importante argomento studiando con ricerche spettrofotografiche l'assorbimento luminoso di differenti sali formati da uno stesso acido colorato combinato con differenti basi incolore, o da una stessa base colorata combinata con differenti acidi incolori; ed è arrivato al risultato interessante che in soluzioni molto diluite gli spettri dei differenti sali contenenti il medesimo acido colorato, ovvero la stessa base colorata sono identici. Così presentano identico spettro di assorbimento le soluzioni equimolecolari di tutti i permanganati, quelle dei sali di fluorescina, di eosina, di jodoeosina, di dinitrofluorescina, di orcinftaleina, di acido rosolico etc.; dei cromoossalati della serie bleu, come pure le soluzioni diluite dei differenti sali di una stessa base colorata, quali la p. rosanilina, il violetto di anilina, la crisanilina e la crisoidina.

Per le soluzioni dei sali si osserva dunque che il carattere costitutivo della colorazione è scomparso e che il colore è una proprietà addittiva; perchè il grado di ossidazione del metallo o del metalloide, o la natura di un complesso colorato, deter-

---

(1) Phil. Mag. 14, 418.

(2) Comp. rend. 86, 710.

(3) Ueber die Farbe der Jonen Zeit. f. Phys. Ch. IX, 579.

Digitized by Google

mina in questi casi la colorazione del corpo composto, e questo indipendentemente dalla natura degli altri elementi contenuti i quali non portano sul colore alcuna influenza (1). L'Ostwald spiega questo speciale comportamento colla dissociazione elettrolitica ammettendo, ciò che viene ammesso dai seguaci della teoria della dissociazione e che io pure ammetto, che nelle soluzioni molto diluite dei sali non esiste la molecola salina, che questa è quasi o completamente dissociata negli joni. Il colore delle soluzioni è per conseguenza il colore degli joni; contengono i diversi sali di una base colorata il medesimo jone ed il colore delle soluzioni diluite dei diversi sali sarà identico al colore del jone comune che essi contengono.

Contro questa interpretazione del fatto osservato dall'Ostwald io ho presentato parecchie comunicazioni alla R. Accademia dei Lincei (2), nelle quali ho cercato di dimostrare che la dissociazione elettrolitica non esercita alcuna influenza sulla colorazione, e ne ho dedotto che l'ipotesi della colorazione degli joni non è confortata dai fatti. Sebbene, in base ad ulteriori osservazioni io non possa mantenere completamente le opinioni da me espresse in quelle comunicazioni, e particolarmente in una di esse, mi pare però che dalle esperienze da me eseguite si debbano trarre alcune conseguenze secondo le quali entro i limiti di osservazione *quella parte dei sali che si trova dissociata ha la medesima colorazione di quella che non è dissociata.* Nei sali colorati la colorazione è una proprietà addittiva, ciò che nel maggior numero dei casi si può spiegare colla ipotesi del colore degli joni; ma pei casi da me osservati, essa si mantiene ancora proprietà addittiva dove a spiegare tale comportamento non si può più invocare tale ipotesi di colorazione.

---

(1) Questo non avviene nel caso di combinazioni non saline, dove come per es. nel caso dell'indaco, l'introduzione del metile, dell'ossimetile, dell'etile, del bromo..... porta con se un cangiamento negli spettri di assorbimento (Krüss e Oeconomides.).

(2) Rendiconti, annate 1891 e 1893.

Digitized by Google

Cromoossalati della serie bleu.

Cromoossalato di potassio.

$$K_3\,Cr\,(C_2O_4)_3 + 3H_2O$$

Preparato per doppia decomposizione col mezzo del cromoossalato di bario e solfato potassico. Lo studio fatto da W. Kistiakowsky (1) della conducibilità elettrica in soluzioni diluite e del comportamento crioscopico di questo sale, ha condotto al risultato che questa sostanza è un sale complesso che in soluzione diluita è sdoppiato elettroliticamente secondo lo schema

$$K_3 \mid Cr\,(C_2O_4)_3 .$$

Col mezzo dello spettrofotometro di Hüfner venne determinato, in differenti posizioni dello spettro, l' assorbimento delle soluzioni di cromoossalato potassico contenenti la grammimolecola $K_3\,Cr\,(C_2O_4)_3$ in un volume di soluzione eguale a due litri, adoperando in causa del potere assorbente molto considerevole uno strato sottile di soluzione, ed un parallelepipedo di Schulze dello spessore di un millimetro. Si ebbero i risultati contenuti nel seguente specchietto, dove per le differenti posizioni dello spettro sono indicati i coefficienti di estinzione a.

λ	a	λ	a
678-669	4,83	662-652	7,23
670-660	5,79	654-644	8,57

(1) Zeit. f. phys. chem., VI, 97.

Digitized by Google

Cromoossalato di sodio.

$$N_{a_3}\,C_r\,(C_2\,O_4)_3 + 4\,1/2\,H_2O.$$

Preparato per azione del solfato sodico sul cromoossalato di bario. Determinando alla temperatura di 25° la conducibilità elettrica delle soluzioni di cromoossalato sodico, si ebbero per i diversi volumi v i seguenti valori (conducibilità elettriche molecolari):

v	2	20	40	80	160	1000	5000	10000
μ_v	115	203	226	248	267	332	336	337

Dall' esame di essi si vede che per un volume $v = 10000$ contenente la grammimolecola $N_{a_3}\,C_r\,(C_2\,O_4)_3$, tutte le molecole di cromoossalato di sodio sono completamente dissociate nei quattro joni $N_a \mid N_a \mid N_a \mid$ e $C_r\,(C_2\,O_4)_3$; infatti questo valore $\mu_v = \mu_\infty = 337$ è in accordo colle determinazioni che Kistiakowsky ha fatto per la velocità di trasporto dell' jone $C_r\,(C_2\,O_4)_3$ (1). Nelle soluzioni più concentrate la dissociazione è più piccola; per es. nella soluzione $v = 2$ la conducibilità μ_v è circa un terzo di μ_∞; si deve dunque ammettere, per quello che si sa sopra la graduale dissociazione degli elettroliti che danno un numero di joni superiore a due, che a tale concentrazione molto meno di un terzo delle molecole complessive si trovi dissociato nei quattro joni; si avranno joni più complessi corrispondenti ad altri schemi di dissociazione:

$$N_a \mid N_{a_2}\,C_r\,(C_2\,O_4)_3 \text{ e } N_a\,N_a \mid N_a\,C_r\,(C_2\,O_4)_3$$

---

(1) Ibid., pag. 107.

Digitized by Google

Venne determinato l'assorbimento delle soluzioni contenenti $N_{a3}\,Cr\,(C_2\,O_4)_3$ in due litri, $N_{a3}\,Cr\,(C_2\,O_4)_3 + 2N_a\,NO_3$ in due litri, $N_{a3}\,Cr\,(C_2\,O_4)_3$ in 20 e finalmente in 40 litri e si ebbero risultati che dimostrano che l'estinzione è costante, eguale a quella del cromoossalato potassico per uno spessore equimolecolare di strato assorbente:

λ	a			
	$Na_3\,Cr\,(C_2\,O_4)_3$ $v = 2$ (1)	$Na_3\,Cr\,(C_2\,O_4)_3 + 2Na\,NO_3$ $v = 2$	$Na_3\,Cr\,(C_2\,O_4)_3$ $v = 20$	$Na_3\,Cr\,(C_2\,O_4)_3$ $v = 40$
678-669	4.66	4,70	0,464	0,251
670-660	5,64	5,69	0,566	0,286
662-652	7,04	7,13	0,701	—
654-644	8,34	8,42	0,831	—

Cromoossalato di ammonio.

$$(NH_4)_3\,Cr\,(C_2\,O_4)_3 + 3H_2O$$

Preparato saturando con ossido di cromo precipitato l'ossalato acido di ammonio.

Anche per questo sale venne determinata la conducibilità elettrica e l'estinzione; si ebbero risultati paragonabili a quelli ottenuti col sale di sodio e di potassio. Il valore μ_∞ è naturalmente alquanto maggiore per il cromoossalato di ammonio, corrispondentemente alla maggiore velocità di trasporto dell'jone (NH_4) paragonata a quella dell'jone Na.

v	2	40	80	160	640	1280	2560	5120
μ_v	170	263	296	318	353	362	369	371

(1) Gr. 233 di cromoossalato idrato per ogni litro di soluzione.

Digitized by Google

L' esame spettrofotometrico della soluzione $v = 2$ dette i seguenti risultati:

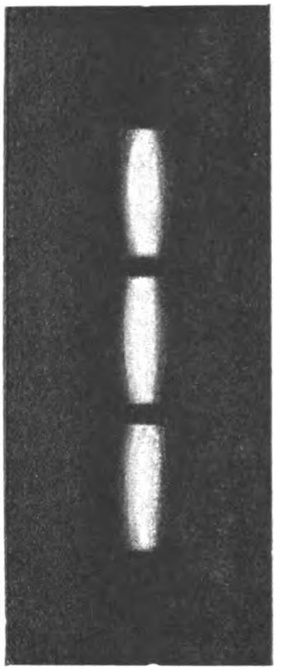


Fig. 1.

λ	a	λ	a
678-669	4,74	662-652	7,13
670-660	5,71	654-644	8,49

Inoltre vennero eseguite fotografie, paragonando soluzioni concentrate $v = 2$ di cromoossalato potassico, sodico, ed ammonico in strati di $^1/_2$ mm. Sebbene tali strati sieno piccoli, in causa della forte concentrazione quasi tutta la luce viene assorbita. Si ebbero immagini identiche (Fig. 1).

I cromoossalati alcalini presentano dunque anche in soluzione concentratissima l' identico spettro.

Cromosolfocianati.

Solfocianato cromico-potassico $K_3 Cr(CNS)_6 + 3H_2O$.

Venne adoperato un preparato ottenuto per azione del solfocianato potassico sopra l' allume di cromo in soluzione acquosa e per prolungata ebullizione. Purificato per successive cristallizzazioni dall' alcool acquoso, dette all' analisi i seguenti risultati:

gr. 2,0360 di sostanza, seccati a 115°, perdettero gr. 0,1912 di acqua.
gr. 1,9732 di sostanza anidra dettero gr. 0,2923 di Cr_2O_3 e gr. 0,9828 di K_2SO_4.

Digitized by Google

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $K_3Cr(CNS)_6 + 3H_2O$
H_2O	9,39	9,47
		calcolato per $K_3Cr(CNS)_6$
Cr	10,13	10,06
K	22,32	22,63

Del solfocianato cromicopotassico venne determinato il comportamento crioscopico. Adoperando 15 gr. di acqua come solvente si ebbero questi risultati:

	concentrazione della sostanza anidra	abbassamento	abbassamento molecolare	i (1)
I.	0,551	0°.07	65,6	3,47
II.	2,317	0°,29	64,7	3,42
III.	7,34	0°,90	63,3	3,34

Dello stesso sale venne inoltre determinata la conducibilità elettrica a differenti diluizioni ed alla temperatura di 25°. Si ebbero questi risultati, dove v sono i volumi di soluzione, in litri, contenenti il grammiatomo di cromo nel cromosolfocianato.

v	1	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560
μ_v	137	233	247	265	278	297	311	324	334	344	351

Il comportamento crioscopico e l'andamento dei valori delle conducibilità elettriche molecolari a differenti diluizioni per il solfocianato cromicopotassico, dimostrano che questa sostanza non è un sale doppio, ma bensì un sale complesso il quale subisce la dissociazione secondo lo schema

$$K_3 \mid Cr(CNS)_6$$

Per concentrazioni forti, come quella corrispondente ad un volume $v = 1$, e contenente gr. 5,71 di sale idrato in 10 cc. di soluzione, la dissociazione è assai piccola. Si deve ammettere che pochissime molecole si trovino dissociate completamente se-

(1) Costante 18,9.

Digitized by Google

condo lo schema sopraindicato, e che si abbiano altre molecole dissociate secondo gli altri possibili schemi di dissociazione

$$KK \mid KCr(CNS)_6 \text{ e } K \mid K_2Cr(CNS)_6$$

e ciò accanto a molte molecole non dissociate.

Un calcolo però anche solo approssimativo della grandezza di tali rapporti non è possibile.

Solfocianato cromico-sodico.

Preparato dal solfato cromico verde con solfocianato sodico, e purificato per cristallizzazioni dall' alcool. Le soluzioni vennero preparate pesando il sale anidro, seccato a 145°.

gr. 1,0488 di sale anidro dettero gr. 0,1726 di ossido di cromo e gr. 0,4632 di solfato sodico.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $N_{a_3}Cr(CNS)_6$
Cr	11,28	11,08
N_a	14,30	14.71

La determinazione della conducibilità elettrica di questo sale dette i seguenti risultati:

v	1	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560
μ_v	91,1	206	225	238	250	260	269	273	276	279

Per rapporto alla dissociazione elettrolitica e per riguardo al solfocianato cromico-sodico si possono dunque ripetere le considerazioni fatte per il solfocianato cromico-potassico. Le conducibilità elettriche molecolari, a corrispondenti diluizioni, sono per il sale sodico alquanto inferiori (1) corrispondentemente

(1) Sembra che a diluizioni molto considerevoli i cromosolfocianati subiscano un altro ordine di dissociazione scindendosi nei sali semplici. A questo riguardo io non ho fatto però tali esperienze da potere trarre conseguenze sicure ed esatte.

Digitized by Google

alla minore velocità di trasporto del jone $\overset{+}{N}_a$ in confronto a quella del jone $\overset{+}{K}$.

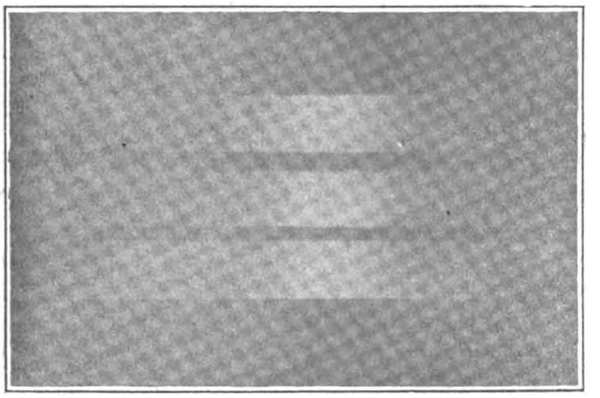


Fig. 2.

Col mezzo di un apparecchio simile a quello adoperato dall' Ostwald (1), e servendomi parimenti di un prisma contenente bromonaftalina, io ho eseguito sopra una medesima lastra (2), e successivamente, le fotografie di tre soluzioni contenenti rispettivamente per litro i seguenti numeri di grammimolecole delle sostanze indicate,

$K_3 Cr(CNS)_6$, $N_{a_3} Cr(CNS)_6$ e $N_{a_3} Cr(CNS)_6 + 2N_a NO_3$ (3),

Le soluzioni, concentratissime e molto colorate, erano contenute in un recipiente dello spessore di 0,5 mm. Identiche all' occhio nella colorazione diedero anche eguali spettri di assorbimento Fig. 2.

Questi risultati sono una conferma della legge di Gladstone ed Ostwald che la colorazione, negli elettroliti, è una proprietà addittiva. Però essi non si possono spiegare unicamente colla ipo-

---

(1) Loco citato.

(2) Lastre ortocromatiche del dott. Schleusner, durata della posa 5 minuti.

(3) Per aggiunta di nitrato sodico la conducibilità del $N_{a_3} Cr(CNS)_6$ viene diminuita.

Digitized by Google

tesi della colorazione degli joni. Le differenze di indole costitutiva che dovrebbero verificarsi non si verificano, o per lo meno, nelle condizioni mie che sono quelle degli altri sperimentatori, queste differenze non sono tali che si possa concludere che per la parte non dissociata la colorazione sia una proprietà costitutiva. Tuttavia io riconosco che l' ipotesi della colorazione degli joni presenta un certo grado di probabilità, ciò che venne anche recentemente riconosciuto da altri (1); e debbo riconoscerlo sopratutto dopochè il sig. Wagner (2) ha dimostrato che l' acido violurico anche in acqua perfettamente priva di alcali può dare soluzioni colorate, ciò che è in pieno accordo colla teoria degli joni colorati. Si deve dire anzi che, dopo i risultati da me ottenuti coi cromoossalati e cromosolfocianati, le esperienze del sig. Wagner restano fino ad ora la più probabile dimostrazione di tale teoria.

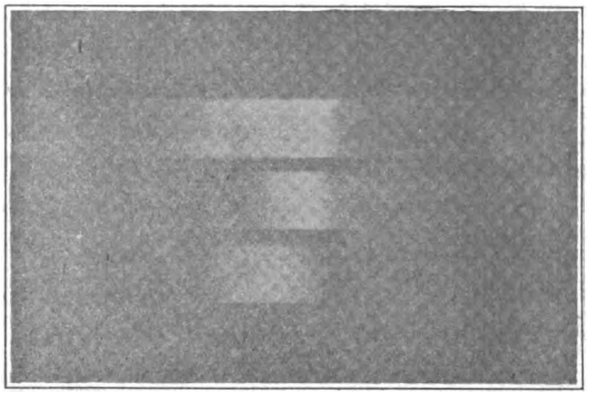


Fig. 3.

Ho fatto inoltre qualche esperienza preliminare studiando i sali verdi di cromo, e paragonando gli spettri di soluzioni di fresco preparate ed equimolecolari di

(1) Vedi Ewan, On the Absorption Spectra of dilute Solutions Proceedings of the Royal Society, Vol. 57.

(2) Zeit. f. Phys. Ch. XII, 314.

Digitized by Google

$Cr\,Fl_3$ (1) $Cr\,Cl_3$ (2) e $\frac{1}{2}\,Cr_2(SO_4)_3$ (3);

ho ottenuto in parecchie prove spettri differenti, es. vedi Fig. 3.

Dopo gli importanti risultati del Piccini e di Marchetti, questo comportamento dei sali verdi di cromo, non attribuibile, ad una trasformazione di sali verdi in violetti, è favorevole alla ipotesi della colorazione degli joni, e sarebbe anche esempio di una serie di sali corrispondenti nei quali la colorazione, nelle soluzioni, è, come da prevedersi, proprietà costitutiva (4). Non do però questi risultati che come preliminari. Il problema dei sali di cromo dal punto di vista della colorazione sembra ancora assai oscuro (5). Se potrò arrivare a più importanti conclusioni, queste formeranno oggetto di ulteriori comunicazioni a questa Accademia.

Prof. G. Magnanini.

---

(1) Preparato sciogliendo Cr_2O_3, precipitato di fresco e ben lavato, nell'a. fluoridrico.

(2) Preparato saturando con HCl una soluzione concentrata e calda di Cr_2O_3.

(3) Sale di Recoura (Comp. rend. 113, 857); le sue soluzioni non precipitavano affatto con $Ba\,Cl_2$.

(4) Gazz. ch. XXII, 375 e XIV, 545. Ewan Comp. rendu CXX n. 19.

(5) Ho trovato che differenti preparazioni dello stesso solfato, preparato sempre nell'identica maniera, non hanno sempre identica colorazione.

Digitized by Google

CONTRIBUTO ALLO STUDIO

DELLE ORIGINI E DELLO SVILUPPO

DEI CISTO PAPILLOMI OVARICI SEMPLICI

Il conoscere esattamente la genesi e il modo di sviluppo dei papillomi ovarici, oltrecchè una grande importanza scientifica, presenta anche una certa utilità pratica, per potere stabilire se essi debbono considerarsi tumori epiteliari oppure connettivali.

Tutti sanno, e non mette conto di ripeterlo, che i tumori composti di tessuti epiteliali, i quali rimontano embrionariamente ai primi due foglietti che si presentano nella blastodermica, e cioè all'esterno ed all'interno, e che perciò si dicono anche *archeblastici,* sono di gran lunga più maligni di quelli connettivali vascolari. Questi ultimi traggono origine dal foglietto medio della blastodermica che compare solo qualche tempo dopo che si sono formati i due primi; la loro origine embrionaria è più recente; diconsi *parablastici,* e presentano sempre una malignità assai minore degli archeblastici, anzi più spesso non ne presentano punto.

La attendibilità di questa legge che i tumori i cui elementi sono discendenti da elementi più antichi per genesi embriologica, siano più dannosi all' organismo di quelli che traggono origine da elementi che son degli ultimi a comparire nell'embrione, pare

Digitized by Google

oramai abbastanza provata, e forse si potrebbe da essa trarre qualche criterio sulla origine e sulla natura d' una specie di tumore.

Ma nel caso dei tumori papillari di cui ora mi voglio occupare, non mi sembra questo criterio sufficiente. Sta il fatto che i papillomi ovarici fino che restano rinchiusi entro la loro cisti non presentano fenomeni di malignità, ma è pur vero che se crescono tanto da rompere la cisti e da portare le loro vegetazioni all'esterno contro il peritoneo, spesso succedono innesti qua e là di elementi epiteliali i quali possono vegetare indipendentemente dal tumore che ha dato loro origine e così presentare una specie di malignità derivante dalla loro moltiplicazione.

Si richiede dunque l'osservazione diretta e precisa dell' origine di questa neoformazione per risolvere scientificamente un tale dubbio.

Moltissimi sono gli studiosi che si sono occupati dal lato anatomico dei cistomi ovarici e specialmente dei papillomi e molti son quelli che ne hanno investigata l' origine, forse preoccupandosi più di questa che del loro modo di sviluppo: ma io mi contenterò di accennare ai principali e a quelli che hanno espresso idee più nette sopra questo argomento.

Waldeier (1) ammette che il punto di partenza dei cistomi siano gli infossamenti primitivi dell' epitelio germinativo ovarico, quelli che si denominano tubi diPflüger, i quali poi per una successiva evoluzione danno luogo al follicolo di Graaf.

Egli considera quindi i cistomi papilliferi come tumori epiteliali, per quanto non disconosca che la proliferazione connettivale ha una gran parte nel loro sviluppo.

Olshausen (2) propose la distinzione dei cistomi papillari da tutti gli altri e questa distinzione fu poi accettata dalla maggioranza.

---

(1) Waldeier, *Die epithelialen Eierstock geschwülste, insbesondere die Kystome*, Arch. f. Gynaec. Bd 1. 1870.

(2) Olshausen, *Die Krankeiten der Ovarien*, I, Aufl. — Stuttgart, 1877.

Digitized by Google

Noeggerath (1) crede che le cisti ovariche siano in gran parte il risultato della degenerazione dei vasi sanguingni dell'ovaio.

Coblenz (2) dopo aver constatato che l'epitelio germinativo dell'ovaio è un epitelio mucoso, cosa ammessa già da Waldeier (3), ne conclude che il rivestimento dei tubi di Pflüger ha la sua genesi come gli infossamenti degli epitelii delle mucose quando formano le glandule. Esso funziona quindi come un diretto discendente dell'epitelio mucoso superficiale dell'ovaio medesimo. I papillomi dell'ovaio prendono origine da questi tubi che per certe circostanze loro particolari non hanno avuto modo di svolgersi regolarmente per produrre un follicolo. Essi devono prender dunque posto insieme a quei tumori che sono originati da altri organi glandulari, in causa di una anormale ripetizione del processo di sviluppo fetale, ricorrente alterato nell'adulto.

Terrier (4) sostiene che la denominazione di papillomi data talora alle vegetazioni delle cisti ovariche è delle più difettose attesochè non v'è papilloma nel senso istologico della parola, ma semplice disposizione papillare del neoplasma.

Malassez e De Sinéty (5) sostengono che devono ritenersi neoformazioni epiteliali nell'ovaia anche quelle che sono accompagnate da una neoformazione connettivale, che serve all'epitelio di sostegno e di nutrimento (pag. 875 del volume 1880).

Le grandi cisti ovariche procedono unicamente dagli ovarii cistici (piccole cisti dell'ovario) nei quali le cisti si sono svi-

---

(1) Noeggerath, *Amer. Journal of. obstetr.* Januar. 1880.

(2) Coblenz D., *Das Ovarialpapillom in pathologisch.-anatomischer u. histogenetischer Beziehung.* Virchow's Arch. 1880, Tomo 82, pag. 268 e seg.

(3) Waldeier, *Eierstock u. Nebeneierstock* — in Strikers Handb. der Gewebelehre.

(4) Terrier, *Bull. et memoires de la soc. de Chirurg*, 1886, Tomo XII, pag. 411.

(5) Malassez et De Sinèty, *Sur la structure, l'origine, et le developpement des Kystes de l'ovaire.* — Arch. de Phys. normals et path. 1880-1881.

Digitized by Google

luppate per proliferazione e neoformazione epiteliale. Queste piccole cisti non possono essere trasformazione dei follicoli di Graaf e non possono ne pure provvenire dai tubuli di Pflüger perchè il loro epitelio se ne distingue completamente. Quindi le grandi cisti ovariche deriverebbero da proliferazione dell'epitelio germinativo come i tubi di Pflüger. Solamente la neoformazione in luogo di finire in un follicolo, non arriverebbe che a costituire una cavità epiteliale comune. Questa cavità crescerebbe nel tessuto ovarico, come una glandula fa nel connettivo. La poliferazione del tessuto fibroso è un lavoro secondario, che non si trova intorno ai zaffi epiteliali nel loro principio.

Gli stessi autori hanno in altro lavoro notato (1) d'aver visto che la superficie interna delle piccole cisti può essere il punto di partenza di tubi epiteliali infossantisi nel tessuto circostante con che riconfermano il loro asserto.

Quénu (2) è di parere che la proliferazione epiteliale nei tumori ovarici si faccia a volte nella profondità del connettivo, a volte alla superficie interna della cisti. Ma in ogni caso il neoplasma resta sempre composto di epitelio e di connettivo, e la sua fisonomia è sottoposta al predominio di vitalità dell'uno e dell'altra.

Olshausen (3) ritiene che i tumori detti cistomi papilliferi dell'ovaio, siano tumori epiteliali; ma per riguardo alla loro origine avendo egli osservato che talora sono coperti nelle vegetazioni di epitelio vibrattile, non può credere che derivino dai tubuli di Pflüger. Avendo poi osservato anche che talora occupano con una loro parte la sostanza intraligamentosa dell'ovaio, emette la opinione che si sviluppino da parti del paraovario che penetrano nell'ovario stesso.

---

(1) Malassez et De Sinèty, Arch. de Phys. norm. et path., anno 1878, pag. 362.

(2) Quènu, *Anath. pat. des kistes non dermoides de l'ovaire.* — These de Paris, 1881.

(3) Olshausen, loco cit. Vedi anche *Contralblatt f. Gynaeckolog.* N. 43, 1884.

Digitized by Google

Birch-Hirschfeld (1) crede doversi ritenere che il punto di partenza della formazione dei papillomi ovarici sia o l'epitelio del follicolo di Graaf o quello dei tubi di Pflüger. Nota anche la possibilità che possano trarre origine dai residui del fetale organo di Wolf.

Landouzy e Galippe (2) hanno trovato microbi nei liquidi endocistici delle cisti ovariche in genere e si mostrano molto propensi ad attribuire ai microbii la produzione del tumore.

Il Paladino (3) ricorda d'aver trovate delle papille alla superficie delle ovaie della cavia, e di averne trovate anche in un caso su ovaio di donna. Egli crede che la formazione papillare patologica dipenda da un esuberante sviluppo dell'albuginea che viene a formare digitazioni connettivali o papille svolgentesi sulla superficie ovarica. Giacchè questo concetto si può applicare anche alle cisti con vegetazioni papillomatose, che originano da una inaginazione dell'epitelio ovarico trascinante seco fors'anche del connettivo dell'albuginea, così in questo concetto i cisto papillomi ovarici sarebbero da considerarsi connettivali e quindi benigni.

Il Pestalozza (4) in un suo bel lavoro clinico, descrive e disegna nella tavola annessa un vero papilloma cistico semplice, e riconosce la prevalenza del tessuto connettivo. Pertanto egli dice che la prognosi di questi neoplasmi e assai più grave di quella dei veri cisto adenomi, perchè se i papillomi crescono molto si rompe la loro cisti e così innestano sul peritoneo i loro elementi epiteliali formando delle metastasi pericolosissime.

---

(1) Birch-Hirschfeld, *Trattato di anatomia patologica.* — Trad. italiana. Napoli, Iovene, 1885.

(2) Landouzy et Galippe, *Journal des conaissences mèdicales*, anno 1887, pag. 57.

(3) Paladino, *Ricerche sulla distruzione e rinnovamento continuo del parenchima ovarico.* Napoli 1887.

(4) Pestalozza, *Contributo alla diagnosi dei tumori papillomatosi dell'ovario.* — Giornale internazionale di scienze mediche. Napoli, Detken ed. 1888.

Digitized by Google

Pestalozza crede che anche nel suo caso, in cui la figura stessa che egli ne dà, dimostra chiaramente che non v'era alcuna apparenza ne pur lontana di vegetazione epiteliale cancerosa, ma solo una vegetazione connettivale rivestita da un semplice strato di cellule cilindriche o cubiche come egli dice (la figura a dir vero non mostra cellule cilindriche come siamo soliti a vederle), egli crede, dicevo, che la rapida diffusione delle produzioni papillari alle più remote zone del peritoneo fino al diaframma, e il conseguente precipitoso aggravarsi della malattia, autorizzano ad ammettere ai papillomi semplici un significato maligno e giustifichi fino ad un certo punto il nome di *cistoma papillifero carcinomatoso.*

Parla quindi della grande malignità clinica di questi tumori, e quando dice della morte della sua inferma operata dal Cuzzi, morte che avvenne per collasso 24 ore dopo l'operazione, non dubita anche di dire che l'infelice esito è *senza dubbio in stretto rapporto colla natura del tumore.*

Ziegler (1) dopo avere accennato che la produzione del tessuto vien sempre dopo la formazione cistica, aggiunge che la formazione papillare parte sicuramente dall'apparecchio vaso connettivale.

Schroeder (2) afferma che il cistoma glandulare proliferante è benigno, ma alcune sue forme sono maligne per recidive e metastasi.

Io credo che queste poche citazioni bastino a far vedere come siano disparate le opinioni dei patalogi su tale argomento. Ma per dimostrare vie meglio come si pensa in proposito dalla modernissima scuola francese, noterò ancora la seguente, quantunque si tratti di un lavoro di compilazione, senza che l'autore v'abbia messo nulla del proprio, nè delle osservazioni originali.

(1) Ziegler, *Anat. pat. generale e patogenesi*, Napoli 1889.

(2) Schroeder, *Handbuch der weiblichen Geschlechtsorg*, X Aufl. — Leipzig, 1890.

Digitized by Google

Segond (1) nella sua monografia pubblicata nel 1892 nel gran trattato di chirurgia di Duplay e Reclus, dice esplicitamente:

Tutti ammettono che le cisti ovariche sono per lo più veri tumori epiteliali provvenienti dal rivestimento peritoneale dell'ovaio, sia per mezzo dei tubi di Pflüger e datanti fino dal periodo embrionale, sia per mezzo d'una invaginazione posteriore dell'epitelio superficiale. La prima fase è un tubulo simile a quello osservato nelle pareti delle vegetazioni e delle cisti adulte, è in una parola una involuzione epiteliale. L'epitelio colpevole d'involuzione non è forse lo stesso in tutti i casi: però si può dire che l'epitelio germinativo è l'origine la più frequente dei cisto epiteliomi, se non la sola. Questa opinione è quella che prevale all'ora attuale.

La parete fibrosa delle cisti ovariche comprende generalmente due strati. Uno esterno ed uno interno; l'esterno e assai denso e povero d'elementi cellulari; l'interno tapezzato da epitelio è assai ricco di cellule e secondo Malassez e De Sinéty contiene qualche fibra elastica.

L'epitelio produce delle formazioni tubulari. Questi tubi tapezzati d'epitelio cilindrico rigonfiati alla loro estremità, semplici o ramificati, o s'infossano all'interno delle pareti cistiche come le glandule di Lieberkün nelle pareti intestinali, o sotto forma di vegetazioni fanno sporgenza nell'interno della cisti. I tubi epiteliali possono trovarsi anche infossati nello spessore delle vegetazioni stesse.

Le varie opinioni ora riferite sollevano parecchie quistioni che hanno grande importanza scientifica, ma riflettono anche

(1) Segond, *Traitè de Chirurgie* publiè sous la direction de S. Duplay e P. Reclus., Vol. VIII, pag. 622, Paris, Masson, 1892.

Digitized by Google

nella pratica la luce che da loro può derivare, essendo direttamente collegate al concetto di malignità che dobbiamo farci dei tumori ovarici cistici papillomatosi.

Tali quistioni, mi pare, che possano compendiarsi nelle due seguenti:

1.° Tutti i tumori ovarici cistici, che non sono o piccoli follicoli idropici contenenti ancor l'ovulo, o cisti ematiche, o cisti idatiche o cisti dermoidi, devono chiamarsi *cistoepiteliomi* e ritenersi tutti uguali e classificabili coi tumori epiteliali volgari, nei quali il fatto principale generatore del tumore è l'abnorme proliferazione del tessuto epiteliale fra le trabecole del tessuto connettivo che lo sostiene e lo circonda?

2.° Quella forma speciale, abbastanza frequente a cui moltissime cisti ovariche possono riferirsi, quella cioè dei cistomi proliferanti, o papillomi ovarici semplici, deve essa ricercare il suo inizio e il suo sviluppo in una alterazione nutritiva dell'epitelio, o in una del tessuto connettivo?

Per quanto vi potessero essere buone ragioni per sostenere e l'una e l'altra opinione, io credo che tali quesiti non possano essere risolti con una semplice discussione teorica, ma che debbano venire chiariti con osservazioni obiettive molto accurate e diligentemente raccolte e interpretate.

Egli è per questo che avendo avuto l'occasione abbastanza rara di incontrarmi in una piccola cisti intraovarica di appena 3 millim. di diametro, che mostrava nel suo interno l'iniziarsi di una vegetazione papillomatosa, ho creduto di molto interesse il descriverla, prima di tutto per la rarità del reperto, in secondo luogo per cercare di trarre da questa le conclusioni che meglio si accordassero colle altre nostre attuali cognizioni di istologia normale e patologica sopra la genesi e la proliferazione dei varii tessuti.

Digitized by Google

Sui primi di quest'anno 1895, l'egregio mio amico Dott. G. Roncaglia libero insegnante di ostetricia e ginecologia nella Università di Modena, mandò, come era solito fare dei suoi pezzi anatomici, nel mio laboratorio, ravvolto in mezzo a bende antisettiche, un pezzo di cistoma ovarico ch'egli aveva asportato lo stesso giorno, non che l'ovaia del lato sano, la quale, quantunque apparentemente normale, egli aveva prudentemente levata, temendo che potesse in avvenire farsi centro dello sviluppo di altro consimile tumore.

Io con tutte le solite precauzioni antisettiche raccolsi qualche minuzzolo dal centro del tumore coll'ago di platino sterilizzato che disseminai in agar, gelatine e brodi e che posi nella stufa a 20° e a 37°.

Quindi tagliai alcuni pezzetti del tumore, e l'ovaia sana in 4 parti e in vasetti distinti li indurii tutti col metodo ordinario degli alcools sempre più forti, fino che furono pronti per essere inclusi in paraffina, tagliati col microtomo, incollati sul portaoggetti e colorati nelle più svariate maniere che la moderna tecnica ci insegna. Sezionando l'ovario fresco, m'accorsi che conteneva 3 piccole cisti che erano venute dal mio coltello più o meno ampiamente aperte.

Quando le preparazioni furono eseguite esse mi dimostrarono i fatti seguenti.

Il tumore per cui si fece la laparotomia, era un comune papilloma che avendo rotto la cisti era venuto vegetando nella cavità peritoneale. Era di consistenza abbastanza notevole, ma facendone tagli dopo indurimento, senza inclusione, si lacerava facilmente e si decomponeva in una specie di detrito. Esaminando tagli sottili di pezzi inclusi ed incollati sul vetrino si potè constatare che il tumore era formato da un numero enorme di espansioni o vegetazioni cilindroconiche in alcuni tratti quasi cilindriche, ramificate, di diverso spessore, variamente anastomizzate e comunicanti fra loro. Spesso riunendosi due vicine e poi tornandosi a separare formavano piccoli vacui o fessure, qua lineari od oblunghe, là ovali o rotonde. Le ramificazioni col-

Digitized by Google

laterali finivano o fondendosi colle vicine o anche terminando talvolta a punta libera.

A forte ingrandimento si notava che tutte queste vegetazioni dendritiche (fig. 1) erano costituite da un asse centrale più o meno grosso di tessuto connettivo a cellule affusate leggermente contorte, e da epitelio cilindrico che tutte quante le ricopriva.

Il connettivo era formato da cellule allungate o fusiformi o rotondeggianti, e queste apparenze erano fors'anche modificate secondo la direzione colla quale su di esse era stato portato il tagliente. Erano intercalate qua e là da globuli bianchi, ma nelle ramificazioni più sottili non v' erano che cellule allungate. I fasci fibrosi sottostanti, erano scarsamente sinuosi, ed essi, come l'asse maggiore delle cellule da cui erano intrammezzati, erano per lo più parallelli alla superficie della ramificazione, o se altrimenti vuolsi dire perpendicolari alla direzione delle cellule cilindriche che la tapezzavano. Nelle ramificazioni più sottili le cellule connettivali si presentavano in una sola fila disposte coll'estremità dell'una di seguito all'estremità dell'altra, (fig. 1, *a*). Dove la vegetazione era più grossa o nell'incontro di più vegetazioni era facile riconoscere in mezzo al connettivo larghi vasi con sottilissime pareti ridotte in molti casi al semplice endotelio (fig. 1, *b*).

A ricoprire questa specie di fusto connettivale in ciascuna ramificazione lo strato superficiale era formato da epitelio cilindrico, nel quale non ho potuto, anche colle immersioni omogenee, riscontrare avanzi di ciglia. Gli elementi che lo componevano, erano cellule cilindriche piuttosto irregolari, alcune più larghe, altre più corte, e fittamente l'una all'altra contigue. Pareva che prevalesse la struttura unistratificata di questo epitelio, benchè in parecchie località sembrasse composto di parecchi strati gli uni sovrapposti agli altri; ma qui forse trattavasi di errore di osservazione, essendo venuto il taglio obliquo, e mostrando due o tre strati di cellule.

Dove meglio si presentavano e meno erano affollate e so-

Digitized by Google

praposte, si potevano misurare ed avevano una grossezza di circa 4 o 5 μ. ed una larghezza media di 27 μ. di cui 12 a 14 pel nucleo ovale rotondeggiante od oblungo. In mezzo a queste cellule si riscontravano qua e là dei leucociti, migrati forse dai tessuti sottostanti (fig. 1, *d*).

In alcuni tratti del tumore le ramificazioni erano degenerate e allora mancava il caratteristico strato epiteliale e tutto si riduceva ad un connettivo a trabecole con scarse cellule e molti detriti cellulari o nucleari, colorabili più o meno vivamente dai colori basici d'annilina.

La periferia del tumore nella parte intatta era limitata da un discreto strato di connettivo simile a quello che s' internava entro le vegetazioni.

Le cisti dell'ovaio, che quantunque sano, era stato asportato, erano tre e non facevano alcuna sporgenza alla superficie. Erano due più grandi, che avevano circa 3 millim. di diametro e una più piccola che l'aveva di circa 1 millim. Nelle preparazioni fatte pel microscopio anche ad occhio nudo si vedeva che la più piccola ed una delle due più grandi, erano vuote di contenuto, e liscie nella loro superficie interna. L'altra delle due grandi mostrava di avere un contenuto speciale bucherellato aderente ad una parte sola della sua parete che era quasi liscia nel resto.

Le due cisti vuote erano circondate da sottile strato di connettivo diverso da quello che costituiva lo stroma ovarico. In esso i nuclei allungati e paralleli più o meno alla superficie della cisti, erano più grandi e più distanti l'un dall'altro, dei nuclei del connettivo ovarico circondante. Pareva quindi che si potesse parlare di una vera parete della cisti, di tessuto più lasso di quello che costituiva tutto il resto del tessuto connettivale dell'ovario (fig. 2, *a*).

Lo strato epiteliale soprastante che limitava la superficie interna delle due cisti si componeva di parecchi strati di cellule pavimentose, di cui quelle a contatto del connettivo rotonde o cilindriche con nucleo ben colorabile rotondeggiante o ovale e

Digitized by Google

con scarso protoplasma (fig. 2, *c*): le mediane con nucleo rotondo e protoplasma discretamente abbondante; le superiori con nucleo allungato disposto paralellamente alla superficie interna della cisti più colorabile di quella delle altre (fig. 2, *d, e*). Al di sopra di queste si vedeva in alcuni luoghi uno strato limitante pochissimo colorato, irregolare di spessore, costituito da cellule piatte, ovali, quasi senza nucleo. Alcune di queste staccate ed isolate nuotavano in vicinanza dell'epitelio e si mostravano regolarmente ovali con nucleo assai piccolo e coll'aspetto e le reazioni cromatiche delle cellule in via di cornificazione (fig. 2, *f*). Un tale epitelio era presso a poco distribuito uniformemente su tutte e due le superfici interne delle cisti vuote, ma qua e là era staccato forse per le manipolazioni subite, e il connettivo solo formava il limite della cisti. Del resto nessun zaffo epiteliale sporgeva nell'interno delle due cisti o si infossava nel tessuto delle loro pareti.

Notiamo di passaggio per ricordarlo poi, che in queste cisti non esisteva traccia di epitelio cilindrico.

Dopo di questi esami, direi così, preliminari, la mia attenzione si rivolse sulla cisti, che, anche ad occhio nudo, mostrava di contenere qualche cosa di bucherellato e irregolare nel suo interno. Anch'essa era come le altre due circondata da un connettivo, lasso, con poche cellule, trasparente e che si differenziava nettamente dal connettivo dello stroma (fig. 3, *a, e, b*). I nuclei di esso erano allungati, affusati, più o meno sinuosi, diretti parallellamente alla superficie interna della cisti. Le fibrille e i fascetti non molto sinuosi seguivano la stessa direzione dei nuclei cellulari.

Per circa la metà della superficie interna di questa cisti, un tale connettivo ne segnava la parete e solo andava sollevandosi verso l'interno qua e là, in piccole prominenze ricoperte dall'epitelio cilindrico. Ma nell'altra metà egli si avanzava dalla periferia verso il centro della cisti in grossi fasci vegetanti e diramantisi nell'interno in varie guise (fig. 3, *c, d, e*). Due di questi (*c, d*) si incontravano e si univano formando colla parete

Digitized by Google

una specie di loggia con poche ramificazioni anastomotiche, la quale era visibile in tutti i tagli (fig. 3, *c, d*). Fuori di essa ed accanto ad essa, ma solo da una parte, un altro gruppo di diramazioni prima divergenti, poi un po' convergenti (fig. 3, *e, i*) prendevano origine dal solito connettivo.

La parte liscia della parete della cisti e tutte queste diramazioni connettivali vegetanti nel suo interno, erano ricoperte, da uno strato apparentemente unico di cellule epiteliali cilindriche lunghe in media 30 o 35 μ. grosse 5 μ. circa, con nucleo rotondeggiante od ovale di 6 a 14 μ. nel diametro maggiore ed occupante tutta la larghezza della cellula col diametro minore.

Questo epitelio in certi posti sembrava disposto a più strati (fig. 5) ma io credo, come ho detto per quello del tumore completamente sviluppato, che tale apparenza fosse dovuta ad obliquità delle cellule sul piano del taglio, perchè in molti posti era ben evidente che lo strato era unico e tutte le cellule e tutti i nuclei arrivavano presso a poco alla stessa altezza. In nessun posto l'epitelio cilindrico formava zaffi massicci, ma sempre era traversato per il lungo da un cordone o da una lamina ben visibile di connettivo.

La parete della cisti ove non erano vegetazioni ne rialzi si presentava dunque formata semplicemente d'uno strato di epitelio cilindrico e di connettivo d'apparenza piuttosto lassa a cellule allungate e a fasci poco ondulosi, le une o gli altri nella direzione della parete della cisti. Immediatamente però sotto l'epitelio si notava una specie di laminetta connettivale un po' differente del resto per avere nuclei un po' maggiori, tutti ben seriati l'un dietro l'altro, in un solo strato e che seguivano esattissimamente le minime curve dell'epitelio.

Le piccole prominenze o papille che in questa regione della parete cistica si riscontravano (fig. 3, *f, f*) e che potevano considerarsi come il vero inizio delle vegetazioni, mostravano (fig. 4) direttamente sotto l'epitelio, quella laminetta sottile di connettivo a nuclei seriati, fusiformi di cui ho tenuto or ora parola. Al disotto di questa e solo nella parte rialzata della piccola

Digitized by Google

papilla, si notava qualche piccolo leucocito e delle cellule piuttosto voluminose rotondeggianti o ovali con nucleo grosso e granuloso che avevano tutto l'aspetto delle cellule formative che si trovano nel connettivo proliferante. Qui mancavano le cellule affusate (fig. 4, *b*). Più in basso però queste ricomparivano, ma dapprima miste a leucociti e poi quasi sole in mezzo ai fasci sinuosi, continuandosi senza distinzione col resto del connettivo che circondava le cisti.

Anche Pestalozza (1) nella osservazione del suo tumore papillomatoso, accenna a queste cellule rotondeggianti, da lui viste immediatamente sotto l'epitelio delle papille adulte, prima di arrivare al vero connettivo, sostegno dell'epitelio.

Se invece di osservare un piccolo rialzo come quello che ho ora descritto, si osservava un rialzo un po' maggiore formante una rudimentaria vegetazione (fig. 5) si vedeva che dal connettivo della cisti si innalzava un fascio di fibre ricche di elementi cellulari allungati, disposti paralellamente all'andamento del fascio stesso. Questo costituiva un rialzo cilindro conico che formava come l'asse della vegetazione, coprendosi abbondantemente dell'epitelio cilindrico. Le cellule epiteliali cilindriche di rivestimento erano della solita misura se non che all'apice della vegetazione dove forse trovavasi il punto vegetativo erano più basse che in tutto il resto.

Quanto alle vegetazioni ramificate che si impiantavano in quella parte della cisti ove era avvenuta una vera proliferazione papillomatosa, esse si presentavano in tutto simili per struttura a quelle del tumore adulto dianzi descritto e solo avevano gli elementi epiteliali un po' più grandi. Ogni ramificazione si suddivideva e talvolta si anastomizzava anche colle vicine (Fig. 3, *h*, *i*). Il suo asse era costituito di connettivo a cellule affusate un po' sinuose dirette nel senso dell'asse stesso, che all'esterno era coperto delle solite cellule cilindriche. Anche queste in alcune

(1) Pestalozza, (loc. cit.).

Digitized by Google

regioni avevano l'apparenza di essere disposte non ad uno strato solo ma a più strati, fino a tre. Io insisto però, nel credere che si trattasse di tagli obliqui e che fossero realmente ad uno strato solo come in certi posti era dato rilevare con assoluta certezza.

Avendo così brevemente riassunto il risultato delle mie osservazioni è utile ricercare come esso possa aiutare l'interpretazione della genesi dei papillomi ovarici.

È indubitato che una gran parte delle contraddizioni che sono sorte su questo argomento hanno avuto origine dal fatto che non pochi patologi che si sono occupati di esso, hanno voluto unificare in sol gruppo tutti i papillomi ovarici che contengono epitelio, tanto quelli in cui l'epitelio della superficie della cisti sotto forma di zaffi più o meno massicci si infossa, circondato da connettivo, nel tessuto proprio dell'ovaio, quanto quelli in cui l'epitelio prolifera sopra vegetazioni connettivali, verso l'interno della cisti.

Fra gli autori che abbiamo citati di sopra ve ne sono alcuni che non potrebbero essere più espliciti. Perchè i papillomi hanno la loro primissima origine da tubi epiteliali, senza preoccuparsi dell'ulteriore loro sviluppo, li considerano identici a quelli che sono originati da altri organi epiteliali o glandulari. Così la pensano Coblenz, Malassez e De Sinèty, Quénu e alcuni altri che abbiamo sopra citati.

Il tessuto epiteliale è il primo embriologicamente a presentarsi fra i nostri tessuti. (Foglietto esterno e foglietto interno della blastodermica). Esso ha origine dalla segmentazione della ovocellula e da prima si nutre per assorbimento ed assimilazione dei materiali nutritivi che esistono nell'ovulo o intorno all'ovulo. Ma non appena ha preso un certo sviluppo, essendo privo di vasi e di lacune, ha bisogno di un altro tessuto che gli porti il nutrimento. Di ciò si incarica il foglietto medio o

Digitized by Google

parablasto coi suoi vasi, il quale poi lo nutre così per tutta la vita.

Nello stato normale l'epitelio si sviluppa sul connettivo e si porta verso l'esterno per formare i rivestimenti epiteliali più o meno stratificati, in cui le cellule giovani ed in cariocinesi sono sempre quelle a contatto del connettivo; oppure si infossa in forma di tubuli, di acini, e di condotti escretori nel connettivo stesso, e costituisce le glandule. Se il connettivo prende uno sviluppo esagerato e, o per stato infiammatorio cronico o per altra causa prolifera, ed aumenta di volume, l'epitelio sovrastante anch'esso allora si moltiplica e lo ricopre seguendo le sue vicende: e questo per due motivi. Perchè l'aumento di nutrizione nel connettivo, aumenta anche la nutrizione nell'epitelio, e perchè il graduale aumento di volume del connettivo porta un'allontanamento delle cellule epiteliali. Ora è ben constatato che l'aumento della nutrizione cellulare, e la diminuzione delle resistenze esterne, dei contatti cioè fra cellula e cellula, portano fisiologicamente alla moltiplicazione. Così si potrebbe dire che nei condilomi acuminati, che traggono appunto origine da una anormale vegetazione connettivale e sono tutti ricoperti d'epitelio, il connettivo ha vegetato patologicamente, mentre l'epitelio sovra esso, ha seguito sempre il suo modo fisiologico di vegetazione.

L'epitelio vegeta invece patologicamente quando si infossa sotto forma di zaffi più o meno massicci nel connettivo sottostante, o quando, riproducendo nel connettivo stesso la forma grossolana delle glandule, non riproduce poi dei veri e regolari acini o tubuli glandulari funzionanti, ma degli acini o tubuli deformati, senza funzione regolare e senza tubi escretori ed in numero eccessivamente maggiore di quello che si riscontra nelle glandule sane. In ambedue i casi la vegetazione dell'epitelio è patologica perchè deviata dalla via normale che nello stato fisiologico la natura ha tracciato. Nei casi in cui l'epitelio si infossa sotto forma di zaffi grossi e massicci questi possono poi nutrirsi scarsamente e danno luogo quindi a degenerazioni varie

Digitized by Google

specialmente nelle loro parti centrali che sono le più lontane dal connettivo dal quale traggono il nutrimento.

Per lasciare questi fatti, del resto cogniti a tutti e bene assodati, che io non ho richiamati che per dimostrar meglio quanto verrò in seguito esponendo, io devo subito avvertire che nell'ovaio si possono avere dei tumori e delle cisti che presentano questi caratteri di vere proliferazioni patologiche dell'epitelio. Questi sono da denominarsi veri adenomi, epiteliomi o cancri dell'ovaio, o se vuolsi cistomi adenomatosi e cancerosi, ma non hanno a che fare coi cistomi papillomatosi di cui mi sono voluto occupare.

Anche Ziegler (1) che pur riconosce la grande importanza dello sviluppo connettivale nei cistomi papillomatosi, afferma che vi sono talora nelle pareti cistiche delle formazioni adenomatose e dei zaffi pieni, infossantisi nel connettivo, e questi tumori giustamente chiama cisto adenomi. Ma sono ben altro dei semplici papillomi. E così Cohn (2) nota che le cisti che mandano nello spessore dello stroma connettivale dei zaffi epiteliali massicci, non la cedono in malignità per nulla ai veri cancri.

Ciò vuol dire dunque che i tumori ovarici con epitelio proliferante non possono ascriversi tutti alla medesima categoria, ma che bisogna assolutamente tener conto del loro modo di sviluppo.

Le vegetazioni papillomatose cariche d'epitelio che si fanno nell'interno della cisti ovarica dilatandola, non hanno evidentemente niente di comune col modo di sviluppo dei veri cancri ed in genere dei tumori epiteliali. Se noi esaminiano attentamente la piccola cisti da me descritta (fig. 3) noi vediamo nel modo il più manifesto che in nessuna parte l'abbondante epitelio cilindrico ha tendenza ad infossarsi nel connettivo sotto-

---

(1) Zeigler, *Anatomia patologica speciale*, Vol. III. Napoli, Tip. Pasquale, 1886.
(2) Cohn, *Zeitschrift f. Geburtshülfe und Gynäkologie* 1886, tomo XII. H. I.

Digitized by Google

stante. Anzi è evidente che il connettivo si è spinto proliferando verso l'interno della cisti, e l'epitelio continuando la sua funzione fisiologica vi si è moltiplicato sopra ricoprendolo. Sono robusti ed irregolari fasci connettivali che (fig. 3, *c, d*) sorgono dalla periferia e sono la diretta continuazione di quelli che formano la parete propria della cisti, quelli che costituiscono le ramificazioni, le anastomosi, le loggie papillomatose, e l'epitelio non v'è che steso sopra per uno strato uniforme e regolare. Se fosse vero che l'epitelio avesse in se un impulso speciale alla proliferazione dovremmo pur vedere qua e là delle vegetazioni epiteliali autonome, dei zaffi di solo epitelio sollevarsi dalla superficie connettivale basale, o infossarsi in essa. Invece nulla di tutto questo. Non c'è ramificazione che non abbia il suo sostegno di tessuto connettivo e si noti che questo fatto è costante e perdura tanto nella vegetazione incipiente che abbiamo descritta, quanto nel tumore adulto che ha indicata l'operazione. Qui dunque siamo proprio nel caso di una neoproduzione identica a quella dei condilomi accuminati, colla sola differenza che l'epitelio che tapezza i condilomi è pavimentoso e quello che copre i papillomi ovarici è cilindrico. Dove poi possiamo studiare l'inizio delle prime papille, vediamo (fig. 4) anche nel connettivo che ne forma il sostegno quegli elementi microscopici che caratterizzano appunto la proliferazione d'un tale tessuto, cioè i leucociti e le cellule formative come si è detto più sopra.

Come conseguenza di questi rilievi ed indipendentemente dalla loro origine primitiva, della quale ci occuperemo fra breve, i veri papillomi ovarici non complicati, devono considerarsi prodotti da abnorme proliferazione connettivale, venire classificati fra i tumori parablastici, e quindi tolti dal gruppo dei cosidetti cistoepiteliomi. La conseguenza pratica che ne verrebbe sarebbe di poterli considerare, accertata microscopicamente la loro struttura, molto meno maligni di quello che in oggi generalmente si considerano. Un tumore veramente prodotto da proliferazione autonoma epiteliale, lasciando da parte gli adenomi, è fatalmente maligno ed infettante l'organismo, e se verrà

Digitized by Google

asportato anche prima d'aver prodotto evidenti metastasi, finirà per riprodursi ugualmente. Non è così certamente dei papillomi ovarici genuini, voglio dire non complicati ad adenomi od a cancri.

Intanto fino che restano in certi limiti e la capsula della cisti per quanto tesa ha ceduto all'aumento delle interne vegetazioni senza rompersi, i tumori di questo genere possono aver dato disturbi meccanici ma non avranno presentato di certo fenomeni di malignità. Ma questo forse non è il caso più frequente. Avviene molte volte che la formazione di papille si fa in modo così esagerato per la enorme produzione di vasi insieme al connettivo, che le pareti si rompono e le vegetazioni si portano al contatto del peritoneo. Egli è certo che nel lavoro di proliferazione dei papillomi, fino che essi restano limitati all'esterno della cisti, molte cellule epiteliali possono accidentalmente staccarsi, che rimangono poi sospese nel liquido interno della cisti o si appoggiano su altre cellule epiteliali del rivestimento delle vegetazioni. Quando per rottura delle pareti le vegetazioni fuoriescono in contatto del peritoneo, le cellule staccate vanno di preferenza sopra di esso. Le cellule epiteliali, specialmente se giovani, hanno la nota proprietà, anche se da qualche tempo staccate, di innestarsi e proliferare su località connettivali che si prestino. Il peritoneo è certamente una di queste, e sopra esso le cellule di rivestimento delle papille si mettono a vegetare formandovi delle isole epiteliali. Così si ha una riproduzione, una moltiplicazione, questa volta anomala epiteliale, che può dare il pretesto di parlare di malignità di questi tumori, e malignità è davvero se si consideri di quanto aggravi le condizioni del malato e come possa imbarazzare l'operatore. Ma questi nuovi trapianti e vegetazioni epiteliali mi pare debbano essere tenuti molto distinti da quelli che avvengono nel cancro. Anche nel cancro possono aversi tumori metastatici per diretto innesto di cellule cancerose, ma più spesso i suoi elementi infettano l'organismo venendo trasportati per le vie linfatiche, eppoi non hanno mai la superficialità che

Digitized by Google

hanno le vegetazioni secondarie papillomatose ma si estendono profondamente e invadono tutto l'organo.

Il prof. Ercole Federico Fabbri esimio direttore del R. Istituto ostetrico e ginecologico della Università di Modena mi comunicava gentilmente a questo proposito un suo caso di operazione di cisto-papilloma ovarico che aveva prodotto molte metastasi sul peritoneo. Egli, liberato l'addome dai veri tumori, asportò pazientemente tutte le metastasi che si erano prodotte, ed ebbe la soddisfazione di poter constatare che la sua operata era guarita pefettamente, sicchè dopo 3 anni non presentava alcun accenno di possibile recidiva.

Questo fatto basterebbe da solo a dimostrare quanta poca malignità si annidi nei vari papillomi ovarici e come sia un errore grossolano il metterli a fascio cogli adenomi, cogli epiteliomi e coi cancri.

Del resto Olshausen (1), Thornton (2), Lomer (3) hanno asserito che si può avere la guarigione estirpando un papilloma, e lasciando anche in sito le metastasi, se sono poche.

Non possiamo abbandonare questa quistione, senza toccare d'un argomento che è sempre stato messo in campo dai sostenitori della natura epiteliale dei papillomi come il capo saldo del loro edifizio.

Essi dicono: L'epitelio superficiale dell'ovaio, il cosidetto epitelio germinativo, è un epitelio mucoso. Ciò è stato dimostrato specialmente da Waldeier (4) e non vi torneremo sopra.

---

(1) Olshausen, *Die Krankeint der Ovarien*, II.° Auflage. Stuttgart, 1886.

(2) Thornton, *London med. Times and Gazzette*. 1881. p. 1.

(3) Lomer, *Centralblatt f. Gynaekolog*, 1889.

(4) Waldeier, *Eierstock und Nebeneierstock* — in Strikers Andbuch der Gewebelehre, p. 546.

Digitized by Google

Infossandosi nello stroma ovarico, esso vi costituisce i tubuli di Pflueger dapprima, i follicoli di Graaf di poi, e gli uni e gli altri come derivati direttamente da un epitelio mucoso sono anch'essi costituiti di questo stesso tessuto. Come tessuto epiteliale mucoso funzioneranno quindi tanto fisiologicamente che patologicamente, e quindi in quest'ultimo caso, essi produranno come gli altri epitelii mucosi, adenomi, epiteliomi e cancri.

Ora è indubitato il fatto che le cisti ovariche di qualunque specie, traggono la loro prima origine, dai tubi di Pflüger o dai follicoli di Graaf. Costituendo esse un fatto patologico è evidente che questo deve consistere in una patologica proliferazione epiteliale. Fox a questo proposito è molto esplicito (1); esso dice: Le cisti ovariche traggono la loro origine dai tubi di Pflueger o dei follicoli più o meno modificati che sono organi glandulari. Devono essere quindi classificate insieme a quei tumori che sono originati da altri organi glandulari per una anormale ripetizione del processo fetale alterato nell'adulto.

A questo ragionamento si sottoscrive senza riserva Coblenz (2) e parecchi altri dopo di lui.

Vediamo quanto vi sia di vero e di attendibile in ciò al riguardo dei papillomi ovarici.

Lo stroma connettivale dell'ovario non può certamente per virtù propria produrre dell'epitelio, e questa oggi è cosa che nessuno azzarderebbe di mettere in dubbio. Se nella vegetazione cistico-papillomatosa dell'ovaio si trova epitelio non può che essere provvenuto dal di fuori (epitelio germinativo) o essere un avanzo di epitelio embrionario.

Quest'ultima ipotesi è assai difficile da provarsi per quanto non abbia alcun elemento d'impossibilità. Ma essa non guasta certo il ragionamento che farò in seguito. La cosa più proba-

---

(1) Fox W., *On the origin, structure, and mode of devlopment of the Cystic Toumours of ovary.* — Med. Chir. Trans., Vol. 47, 1864.

(2) Coblenz, *Virchow's Arch.*, tomo 82, 1880, pag. 268 e seg.

Digitized by Google

bile però è che il primo germe della cisti sia provvenuto dall' epitelio germinativo. Questo è cilindrico (1); se nonchè quando è penetrato nello stroma connettivale dell' organo si trasforma in cubico ed i tubi di Pflüger e i follicoli di Graaf sono appunto fatti da tale epitelio modificato. L' epitelio dei cistomi papillomatosi è invece sempre cilindrico, talora vibrattile. Ciò ha formato ostacolo per taluni patologi (2) ad ammettere che egli derivi da quello dei tubi di Pflüger o dei follicoli di Graaf, perchè questi hanno epitelio cubico. Ma questa obiezione non ha forse molto valore e all' osservatore imparziale non può parere assurdo l' ammettere che nello stato patologico un epitelio cubico possa trasformarsi in cilindrico, mentre si ammette poi facilmente anche nel fisiologico che il cilindrico si possa trasformare in cubico. Però se si volesse proprio insistere sopra questo fatto, io non credo che si dovesse, come fa Olshausen, andare a ricercare anche nel paraovario gli avanzi embrionarii dell' epitelio cilindrico vibrattile, ma bensì ammettere, che un arresto di differenziazione avvenuta in alcune delle cellule dell' epitelio germinativo, abbia potuto introdurre dell' epitelio cilindrico nello stroma dell' ovaio.

E fin qui accettando o l' una o l' altra di queste opinioni noi siamo in perfetto accordo con quelli che ammettono la prima origine del papilloma o della cisti ovarica, da una proliferazione aberrante dell' epitelio. Ma dove non siamo più d' accordo è nello studio del successivo sviluppo del tumore.

Quando nel posto dove sono rinchiusi questi epitelii anormali, comincia a svilupparsi il vero papilloma, non comincia l' epitelio per virtù propria a proliferare, ma sibbene il connettivo circostante.

E come avviene questo?

A mio parere, l' epitelio più o meno alterato e patologico

(1) Gilis, *Embriologie*, Paris, Masson ed., 1891, p. 309.

(2) Olshausen, loc. cit.

Digitized by Google

provveniente dalla superficie dell'ovaio, mentre per la sua natura cilindrica o cubica segrega qualche po' di liquido mucoso fra le cellule e si costituisce così in piccola cisti, irrita in modo lento ma continuo il connettivo circostante.

In questo comincia a scorrere maggiore quantità di sangue e perciò prolifera, aumenta di volume, forma fasci nuovi e in nuove direzioni, e secondariamente nutre più abbondantemente l'epitelio anomalo il quale per ciò solo entra in cariocinesi ed aumenta il numero delle sue cellule. Così lo sviluppo dell'epitelio deriva da quello del connettivo.

Con questa spiegazione il concetto che possiamo farci dello sviluppo dei papillomi ovarici è ampiamente suffragato dal ragionamento e dalla osservazione microscopica del papilloma cistico nel primordio del suo sviluppo, che è stato l'oggetto di questa comunicazione.

Il cisto papilloma ha la sua primissima origine da un epitelio svoltosi in modo anomalo dall'epitelio germinativo dell'ovaio. Non avendo prodotto nè un epitelioma, nè un cancro, nè un vero adenoma, chè tali sono le neoproduzioni patologiche di questi tessuti, è rimasto inerte nel connettivo e lo ha irritato. Il connettivo allora si è messo a proliferare e nutrendo più abbondantemente l'epitelio e allontanandone gli elementi ha prodotto la moltiplicazione cellulare dell'epitelio stesso e il proprio ricoprimento. Così se l'origine primissima del tumore è stata epiteliale, l'ulteriore sviluppo si è dovuto al connettivo, e l'epitelio non ha fatto che seguirlo e ricoprirlo nel modo fisiologico e normale. Si deve dunque allo sviluppo connettivale se il tumore è diventato tumore ed oggetto della operazione chirurgica. I papillomi ovarici possono quindi con sicurezza essere levati dal gruppo dei tumori epiteliali per essere riuniti a quello dei tumori di tessuto connettivo, e l'obbiezione ricavata dalla loro primissima origine perde ogni valore se noi osserviamo bene il modo costante del loro ulteriore sviluppo.

Con tutto ciò non voglio negare la possibilità che qualche volta il papilloma durante il suo sviluppo non possa cambiare

Digitized by Google

natura, e presentare anche un autonoma proliferazione epiteliale. Si sono descritti dei casi che indubitatamente lo fanno credere, e scientificamente non se ne può negare la possibilità. Lo scopo di questa nota era solo quello di provare che la vegetazione papillomatosa ovarica semplice era un fenomeno puramente di proliferazione connettivale da tenersi ben distinto da quelli che accompagnano la formazione degli adenomi e dei cancri.

Ancora una cosa voglio aggiungere prima di finire. I cistomi papilliferi semplici possono essere ad una sola cisti o possono essere a cisti multiple. Queste possono essere multiple fin dall'inizio perchè molte piccole cisti unite in gruppo abbiano avuto origine dall'ovaio, oppure per essersi formate delle cisti dentro la principale, in seguito al suo sviluppo.

Se osserviamo la fig. 3. della nostra tavola che presenta la veduta d'insieme della cisti da me studiata, vediamo che fra *c* e *d* il connettivo ha formato un arco, che essendo continuo nei tagli vicini, come dissi a suo tempo, viene a costituire come una loggia separata dal resto. Se questa fosse tutta circondata dallo stesso connettivo, come mi è sembrato possibile constatare in questo caso, mediante l'osservazione dei tagli seriati, ne viene che si forma una piccola cavità che può essere l'origine d'una seconda cisti nell'interno della prima: e collo stesso processo se ne possono formare anche delle altre, sicchè può spiegarsi anche colla proliferazione connettivale la formazione di cisti multiple da una semplice originaria, cosa che sarebbe impossibile fare basandosi sul concetto esclusivo che fosse l'epitelio che per virtù propria patologicamente proliferasse.

Essendo stato detto che i cistomi ovarici possono essere prodotti da microbi (1) non riuscirà inutile riferire, che le colture che io feci col materiale della parte interna del tumore

---

(1) Landouzy et Galippe, loc. cit.

Digitized by Google

adulto nei mezzi ordinarii restarono sterili. Che se questo non esclude la possibilità che vi fossero dei microbii che non vegetano nelle nostre colture aerobiche, o parassiti animali (?) esclude però assolutamente che vi fossero microbii piogeni od affini, i quali quando esistono vegetano sempre molto bene nei nostri mezzi di coltura.

Questo reperto negativo parmi discretamente importante, e trova conferma nel fatto, che quando la cisti si rompe e le sue vegetazioni si portano a contatto del peritoneo, possono formare bensì degli innesti di elementi epiteliali, ma non producono mai peritoniti acute supuranti, come dovrebbe accadere se nell'interno del tumore si contenessero stafilococchi piogeni. Le infiammazioni peritoneali croniche e le aderenze che non di rado si riscontrano, possono essere messe in relazione a microbi passati dall'intestino in causa della persistente cronica irritazione, e della dilatazione vasale consecutiva alla presenza del tumore.

Del resto sulla origine parassitaria dei tumori in genere, meno che per i tumori infettivi di granulazione, ove il parassita è bene accertato, la quistione è ancora sub judice e merita bene di essere studiata ancora.

C. Bergonzini.

Digitized by Google

AGGIUNTA.

Io stavo correggendo le bozze di questo lavoro quando si pubblicò l' ultimo fascicolo dell'*Arch. f. Gynaekologie.* In esso trovai un lavoro del Dott. Pfannenstiel (1) che mi interessò straordinariamente occupandosi egli dello stesso mio argomento, e venendo alle medesime conclusioni alle quali io sono venuto che cioè i cisto papillomi semplici (che egli chiama cisto adenomi papillari semplici) non sono maligni. Se non che egli, pure basandosi sul reperto microscopico per la diagnosi, si interessa specialmente del lato clinico seguendo per molti anni i suoi ammalati e notando accuratamente gli esiti che hanno avuto.

Egli si è servito di materiale in parte suo, in parte del prof. Fritsch Consigliere privato, Direttore della *Frauenklinik* di Breslavia, e i casi riferiti vanno dal 1882 al 1892. Coll'aggiunta della pratica privata del Fritsch e del Prof. Wiener egli ha riunito un complesso di 400 ovariotomie di cui 60 sono tumori papillari, dei quali in 48 ha potuto fare anche l'esame anatomo istologico.

Egli divide la sua statistica e il successivo studio di essa nei seguenti capitoli:

---

(1) J. Pfannenstiel, *Ueber die papillaeren Geschwulste des Eierstockes. Anatomische und klinisee Untersuchungen zur Klärung der Frage ihrer Malignitaet, Arch. für Gynaekologie*, Band XLVIII, Heft III, 1895.

Digitized by Google

Cistomi papillari paraovarici.	3 casi
Idrope papillare del follicolo Graafiano .	2 „
Adenomi papillari pseudo mucinosi . .	7 „
Adenomi papillari semplici	15 „
Adenocarcinomi papillari	20 „
Adenosarcomi papillari.	1 „
Non definiti	12 „
	60 casi

I dati di mortalità dopo l'ovariotomia li riassumo nella tabella seguente, pei papillomi semplici

	N.	Guariti	Morti
Cistomi paraovarici papillari . .	3	3	
Idrope del follicolo papillomatoso .	2	1	1 morto per intossicaz. jodof. dopo 10 giorni.
Adenomi papillari pseudo mucinosi	7	5	2 morti per sepsi alcuni giorni dopo l'operaz.
Adenomi papillari semplici . . .	15	14	1 morto per ileo il 4.° giorno dall'operazione. Fra gli altri 14 — uno è morto 6 anni dopo per cronica pioemia conseguente a 2.ª operazione — uno è morto l'anno dopo per pleuropneumonite — uno è morto 4 anni dopo per essudati nel bacino — uno è morto 3 anni dopo perchè incompleta l'operazioue e i resti del tumore hanno continuato a proliferare.
	27	23	

Questi primi 27 casi che si riferiscono ai papillomi semplici di cui soltanto io mi sono occupato, danno dunque 23 guariti sopra 27 operati, e se si tolgono i morti per intossicazione, per sepsi, per ileo, avvenuti poco dopo l'operazione, non restano che tre dei considerati guariti che sono morti per le conseguenze lontane dell'operazione, ma non della malignità del tumore. Nessuno dunque di questi 27 tumori si dimostrò maligno.

L'altra parte della statistica contiene i veri papillomi maligni vale a dire associati a cancri o sarcomi.

Digitized by Google

Sono in tutto 21 casi, dei quali 4 solo guariti, tutti gli altri morirono, 1 di sepsi, 1 di esaurimento, 1 da perforazione peritoneale e 13 per recidiva nello spazio di pochi mesi a 2 anni.

Se leviamo quindi i 3 morti, vicino all' operazione e per altre cause, abbiamo che sopra 18 tumori, 13 hanno recidivato.

L' ultima parte della statistica ove son contenuti i casi non ben definiti porta 12 tumori delle quali 1 guarito e 11 morti di cui 1 per schoch, 1 per sepsi, 1 per idropisia, 1 per malattia midollare, e 6 per recidiva.

Questa statistica ed il lungo ed accurato lavoro che l'accompagna (100 pag. degli *Archiv.*) e le stesse tavole che la seguono e che rappresentano preparati microscopici della serie benigna, e della serie maligna, appoggiano brillantemente le conclusioni da me ricavate dall' esame anatomo microscopico dei miei pezzi, colla abbondanza dell' accurato materiale clinico, sul quale alcun dubbio non è possibile.

C. Bergonzini.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

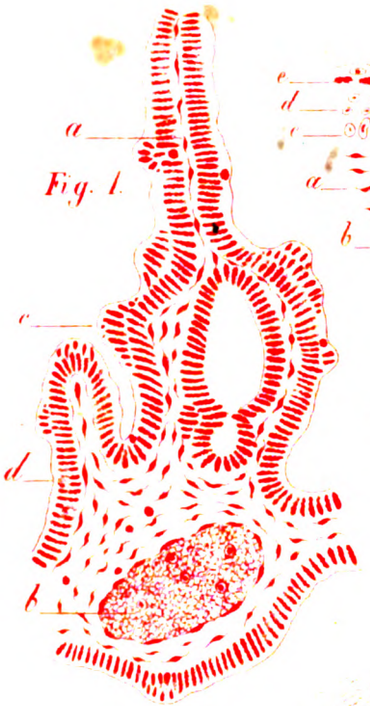


Fig. 2.

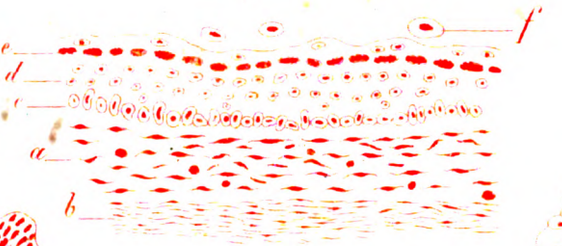


Fig. 4

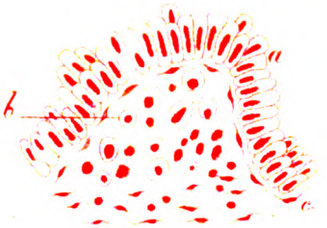


Fig. 5.

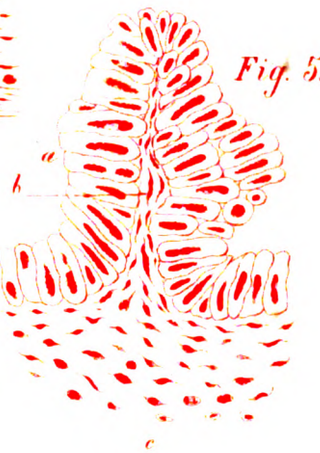


Fig. 3.

Lit. Cavazzuti, Modena

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Le figure di questa tavola sono state dissegnate alla camera lucida da preparazioni fissate in alcool, incluse in paraffina, incollate al vetrino col liquido di Meyer, e colorate colla ematossilina eosina, coll'allume carmino e col picrocarmino. Le osservazioni sono state fatte con un microscopico Leitz e cogli ingrandimenti segnati nelle singole figure.

Fig. 1.ª — Leitz oc. 3, ob. 7. — Una porzione delle vegetazioni del tumore sviluppato.
a — vegetazione sottile con strato di connettivo nel suo interno.
b — un grosso vaso in mezzo a connettivo abbondante.
c — le cellule epiteliali cilindriche che si presentano come se fossero in più strati.
d — leucocito in mezzo all'epitelio.

Fig. 2.ª — Leitz oc. 3, ob. 7. — Una porzione della parete della maggiore delle due cisti che non avevano nel loro interno alcuna vegetazione.
a — connettivo proprio della cisti.
b — stroma connettivale ovarico.
c — strato profondo dell'epitelio pavimentoso.
d — strato medio dello stesso.
c — strato superficiale dello stesso.
f — cellule staccate dalla superficie.

Fig. 3.ª — Veduta d'insieme della piccola cisti prolifera con vegetazioni — Leizt oc. 2, ob. 3.
a — connettivo proprio della cisti.
b — connettivo dello stroma ovarico.
c, *d* — connettivo vegetante verso l'interno della cisti.
e — altro connettivo vegetante verso l'interno.
f — piccoli rialzi nella parete della cisti non vegetante.
g — rialzi che costituiscono un principio di vegetazione.
h — ponte di connettivo che costituisce una loggia separata.
i, *i* — vegetazioni ricoperte dall' epitelio cilindrico.

N. B. L'insieme di questa figura è dissegnato alla camera lucida — i particolari dell'epitelio e del connettivo sono semischematici.

Fig. 4.ª — Un piccolo rialzo della parete della cisti mancante di vegetazioni. Leitz oc. 3, ob. $^1/_{12}$ imm. omog.
a — epitelio cilindrico.
b — cellule di formazione, connettivali, e leucociti.
c — connettivo circondante la cisti.

Fig. 5.ª — Una vegetazione nel suo periodo iniziale, Leitz oc. 3, ob $^1/_{12}$ imm. omog.
a — epitelio cilindrico.
b — connettivo che si insinua nella vegetazione.
c — connettivo circondante la cisti.

Digitized by Google

Digitized by Google

FONDAMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

PREFAZIONE.

La memoria che ho l'onore di presentare a questa R. Accademia comprende i fondamenti di geometria analitica iper-spaziale; e nella prima parte, che ora qui pubblico, sono contenute alcune considerazioni sui gruppi algebrici degli elementi di una forma razionale di 1.ª specie, come parte introdutoria.

Le cose contenute nella nota non sono in sostanza nuove in quanto ai risultati, ma confidando che il metodo e l'ordine nella deduzione dei risultati stessi, possono forse meritare qualche considerazione specialmente dal lato didattico, l'autore ne ha osata la pubblicazione e ringrazia questa R. Accademia che ha accordata l'inserzione della memoria nei suoi Atti.

PARTE I.

Sulla geometria di una forma elementare di 1.ª specie.

§ 1. — Sistemi armonici.

1. Per forma elementare di 1.ª specie intendiamo col sig. Reye una punteggiata, un fascio di raggi o di piani, una conica, un inviluppo di 2.ª classe, cioè il sistema delle tangenti di una conica, un cono quadrico essenzialmente composto delle due generatrici, il sistema dei suoi piani tangenti, una rigata di 2.° ordine (cioè un sistema di generatrici di una quadrica); ed a queste otto forme noi aggiungeremo la cubica gobba ed il sistema dei suoi piani osculatri, che brevemente diremo fascio gobbo di piani, della 3.ª classe.

La geometria di tutte queste forme è la stessa, in quanto che per ciascuna di esse vale la stessa determinazione geome-

Digitized by Google

trica e parametrica degli elementi con tre elementi fissi (fondamentali) a cui sono coordinati i parametri ∞, 0, 1. In generale indicando un E_λ l'elemento della forma di parametro λ, il rapporto anarmonico $(E_{\lambda_1}\ E_{\lambda_2}\ E_{\lambda_3}\ E_{\lambda_4})$ dei 4 elementi E_{λ_r}, presi nell'ordine scritto, non è altro che quello dei loro parametri, cioè l'espressione

$$(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} ;$$

così il parametro λ di un elemento E_λ non è altro che il rapporto anarmonico dei quattro elementi E_∞, E_0, E_1, E_λ, presi nell'ordine scritto.

Quando il rapporto anarmonico di 4 elementi ha il valore — 1, ossia è *armonico,* la forma dei 4 elementi presi nell'ordine scritto è armonica, e reciprocamente. Se i quattro elementi E_{λ_r} $(r = 1, 2, 3, 4)$ formano un gruppo armonico $E_{\lambda_1}\ E_{\lambda_2}\ E_{\lambda_3}\ E_{\lambda_4}$, fra i loro parametri ha dunque luogo la relazione:

$$(\mathrm{I}) \qquad (\lambda_1 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_4)\ (\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

ossia

$$(\mathrm{I})' \qquad \lambda_1\ \lambda_2 - \frac{1}{\binom{2}{1}}\ (\lambda_1 + \lambda_2)\ (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\ \lambda_4 = 0.$$

I primi due elementi di una forma armonica e così gli ultimi due si dicono fra loro coniugati; essi formano due coppie di elementi che in ciascuna coppia possono permutarsi fra loro, e l'una coppia può permutarsi nell'altra, senza che la forma cessi di essere armonica. Queste proprietà risultano evidenti dalla relazione armonica stessa (I) od (I)'. Essa può essere subito estesa a due terne, a due quaderne .... di elementi che si diranno quindi costituire un gruppo di sei, di otto .... elementi armonici, essendo elementi conjugati quelli di ciascuna terna, o quaderna ....; e come, per due coppie di elementi, ossia per la forma armonica ordinaria, diremo che le terne, quaderne ....

Digitized by Google

di elementi si dividono armonicamente. Diremo in altri termini che le due terne $E_{\lambda_1}\ E_{\lambda_2}\ E_{\lambda_3}$, $E_{\mu_1}\ E_{\mu_2}\ E_{\mu_3}$ di elementi di una forma elementare si dividono armonicamente, ossia che i sei elementi $E_{\lambda_1}\ E_{\lambda_2}\ E_{\lambda_3}\ E_{\mu_1}\ E_{\mu_2}\ E_{\mu_3}$ formano un sistema di sei elementi armonici, (essendo conjugati fra loro i primi tre e gli ultimi tre) quando fra i loro parametri sussiste la relazione

$$\text{(II)} \qquad \Sigma\,(\lambda_1 - \mu_{\theta_1})\,(\lambda_2 - \mu_{\theta_2})\,(\lambda_3 - \mu_{\theta_3}) = 0\ ,$$

essendo $\theta_1\ ,\theta_2\ ,\theta_3$ una permutazione qualunque degli indici 1, 2, 3; e col simbolo Σ indicando la somma dei termini che si ottengono dallo scritto per le diverse permutazioni $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ degli indici 1, 2, 3. Posto in generale:

$$\Sigma\ x_r\ x_s = x_2\ x_3 + x_3\ x_1 + x_1\ x_2$$

e

$$\Sigma\ x_r = x_1 + x_2 + x_3\ ,$$

l'equazione ultima si pone sotto la forma:

$$\text{(II)'} \qquad \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 - \frac{1}{\binom{3}{1}}\,\Sigma\,\lambda_r\ \lambda_s\ \Sigma\,\mu_r + \frac{1}{\binom{3}{1}}\,\Sigma\,\lambda_r\ .\ \Sigma\,\mu_r\ \mu_s - \mu_1\ \mu_2\ \mu_3 = 0$$

Dati tre elementi di una forma armonica ordinaria; la relazione armonica determina in modo unico il quarto, essendo di primo grado rispetto ai parametri di ciascuno dei 4 elementi. Per le stesse ragioni dati cinque elementi di un gruppo armonico di sei elementi resta determinato in modo unico l'elemento rimanente. Abbiamo poi le varie costruzioni geometriche per determinare il 4.° elemento armonico dopo tre elementi dati; la costruzione del sesto elemento che con cinque elementi dati forma un sistema armonico risulterà in seguito: È ovvio ed evidente l'estensione della relazione armonica che definisce il sistema armonico formato da due gruppi di quattro, di cinque .... elementi.

Se siano $\lambda_1\ ,\lambda_2 \ldots \lambda_n$ i parametri di n elementi, e $\mu_1\ ,\mu_2 \ldots \mu_n$ quelli di un gruppo di altri n elementi, sarà

Digitized by Google

$$(II)'' \qquad \lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n - \frac{1}{\binom{n}{1}} \Sigma \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} .. \lambda_{r_{n-1}} \Sigma \mu_r +$$

$$+ \frac{1}{\binom{n}{2}} \Sigma \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} .. \lambda_{r_{n-2}} \Sigma \mu_r \mu_s - .... \pm \mu_1 \mu_2 .. \mu_n = 0 ,$$

la relazione armonica per due gruppi di n elementi.

2. Dobbiamo introdurre gli elementi immaginari, chiamando elemento immaginario di una forma ogni valore complesso del parametro λ. Una forma ha così una doppia infinità di elementi immaginarii; e due valori complessi conjugati di λ si diranno costituire una *coppia* di elementi immaginari. Il rapporto anarmonico di quattro elementi qualisivogliano sarà sempre quello dei loro parametri; e gli elementi si diranno costituire un gruppo armonico se il loro rapporto anarmonico è — 1. Inoltre data un equazione algebrica del grado n nel parametro.

$$(III) \quad f(\lambda) = a_0 \lambda^n + \binom{n}{1} a_1 \lambda^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 \lambda^{n-1} + .. + \binom{n}{1} a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

ove supponiamo reali i coefficienti a_r, essa colle sue n radici $\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$ ci darà un gruppo di n elementi tutti od in parte reali distinti o coividenti, o formanti coppie di elementi immaginari, dicendo elementi r^{plo}, perchè va contato r volte, l'elemento che corrisponde ad una radice r^{plo} dell'equazione. Diremo quindi brevemente che un equazione del grado n in λ ci rappresenta un *gruppo algebrico* $G_a^{(n)}$ dell'ordine n di elementi della forma ed i coefficienti $a_0 a_1 ... a_n$ saranno le *coordinate omogenee del gruppo* rappresentato dalla data equazione. Un equazione algebrica del grado n in λ definisce un gruppo di n elementi; viceversa poi dato un *gruppo algebrico* nel senso ora definito, vi corrisponde un equazione a cofficienti reali che lo rappresenta: cioè i gruppi algebrici dell'ordine n corrispondono univocamente e senza eccezione, ai rapporti di n al rimanente dei valori attribuiti ad un sistema $x_1 x_2 ... x_{n+1}$ di $n + 1$ variabili indipendenti; e gli è perciò che tutti i gruppi algebrici del-

Digitized by Google

l'ordine n si dicono formare un *sistema* o *spazio lineare* di specie n od n volte infinito (od ∞^n). Ponendo

$$\lambda = \frac{X_1}{X_2}$$

saranno X_1, X_2 le coordinate omogenee dell'elemento E_λ di parametro λ. Le coordinate degli elementi fondamentali E_∞, E_0, E_1 saranno così 1, 0; 0, 1; 1, 1 ed E_1 si dice l'elemento *unità*. L'equazioni algebriche nei parametri diventano equazioni omogenee nelle coordinate; così possiamo dire che un gruppo algebrico dell'ordine n è l'insieme degli elementi le cui coordinate annullano una forma:

$$(III)' \qquad f(X) = x_1 X_1^n + \binom{n}{1} x_2 X_1^{n-1} X_2 + \ldots + x_{n+1} X_2^n$$

del grado n nelle coordinate $X_1 X_2$ di un elemento corrente della forma.

3. Se alle variabili X, sostituiamo le X', con una sostituzione lineare

$$IV. \qquad \begin{cases} X_1 = \alpha X'_1 + \beta X'_2 \\ X_2 = \gamma X'_1 + \delta X'_2 \end{cases}$$

di modulo

$$(V) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

ciò equivale a porre una corrispondenza omografica fra gli elementi della forma essendo $X_1 X_2, X'_1, X'_2$ le coordinate di due elementi corrispondenti E_λ, E_{λ_1}; oppure a cambiare gli elementi fondamentali E_∞, E_0, E_1 in altri tre, le cui coordinate primitive sono $\alpha, \gamma; \beta, \delta; \alpha+\beta, \gamma+\delta$, essendo allora $X'_1 X'_2$ le coordinate nuove dell'elemento E_λ di primitive coordinate $X_1 X_2$.

Le proprietà dei gruppi di elementi che si mantengono con una sostituzione lineare delle variabili coordinate degli elementi

Digitized by Google

stessi, sono dunque quelle che si mantengono con una omografia fra gli elementi della forma, oppure sono indipendenti dagli elementi fondamentali e sono dette proprietà projettive dei gruppi. Così l' ordine di un gruppo è una proprietà projettiva di esso; una proprietà projettiva di due gruppi di 2.° ordine, di 3.° ordine, e così di ordine qualunque n, è quella di formare un sistema armonico di quattro, di sei, di $2n$ elementi ecc.

§ 2. — Sistemi algebrici di gruppi di elementi. Sistemi lineari.

Nello spazio S_n dei gruppi di uno stesso ordine n, possiamo concepire serie speciali di gruppi, quelli per es. le cui coordinate $x_1\ x_2\ ..\ x_{n+1}$ annullano una forma $f(x)$ dell' ordine m nelle coordinate stesse, essendo reali i coefficienti di $f(x)$ e chiamando poi *gruppo immaginario* della serie, ogni sistema di valori complessi delle coordinate che annullano $f(x)$. La serie stessa la diremo un *sistema algebrico* dell'*ordine* m, e di *specie* $n - 1$ perchè degli n parametri che occorrono per individuare un gruppo di S_n ne bastano soltanto $n - 1$ per individuare un gruppo del sistema. E diremo in generale formare un sistema di specie $n - p$ e di ordine $m_1\ m_2 \ldots m_p$ la totalità dei gruppi comuni a p sistema distinti di specie $n - 1$ e degli ordini $m_1, m_2 \ldots m_p$.

In particolare, posto in generale:

$$\zeta_x = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \ldots + \zeta_{n+1} x_{n+1}$$

un sistema di 1.° ordine e di specie $n - p$ sarà quello S_{n-p} formato dai gruppi $G_x^{(n)}$ le cui coordinate x_r annullano simultaneamente p forme $\zeta_x^{(r)}$ lineari delle x, ossia rappresentato da p equazioni distinte di 1.° grado:

$$\text{(VI)} \qquad \zeta_x^{(1)} = 0 \quad \zeta_x^{(2)} = 0 \quad \ldots \quad \zeta_x^{(p)} = 0.$$

Digitized by Google

Queste equazioni daranno quindi espressioni determinate di p delle $n+1$ variabili x_r per funzioni lineari omogenee delle $n-p+1$ rimanenti $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-p+1}$, essenzialmente indipendenti; e quindi i gruppi in discorso formeranno un sistema lineare S_{n-p} di specie $n-p$ (od $n-p$ volte infinito) oppure brevemente un sistema lineare ∞^{n-p}; di cui l'equazione di un gruppo corrente sarà:

$$\text{(VII)} \qquad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_{n-p+1} f(x)_{n-p+1} = 0$$

Le λ_r si diranno perciò le coordinate omogenee del gruppo corrente; rispetto ai gruppi

$$f_1(x) = 0 \qquad f_2(x) = 0 \qquad \ldots \qquad f_{n-p+1}(x) = 0$$

di coordinate $(1,0\,0\ldots)$ .... $(0,0,0\ldots 1)$, che si diranno poi i gruppi fondamentali di S_{n-p}, essendo ben inteso, le $f_r(x)$ determinate forme del grado n nelle coordinate X_1, X_2 di un elemento corrente E_λ della forma elementare assunta.

Il gruppo

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f(x)_{n-p+1} = 0$$

di coordinate λ_r eguali, e quindi $(1,1,1\ldots 1)$, si dice il *gruppo unità* di S_{n-p}.

2. Il determinante formato colle coordinate dei gruppi fondamentali di S_{n-p} non è nullo; ed in generale poi quando il determinante formato colle coordinate λ_r di $n-p+1$ gruppi del sistema S_{n-p} non è nullo, gli $n-p+1$ gruppi individuati da quelle coordinate si diranno formare una $(n-p+1)$ p^{la}. Se $(n-p+2)$ gruppi di S_{n-p} sono tali che presi ad $n-p+1$ formano altrettante $(n-p+1)$ p^{le}, allora i gruppi stessi si diranno formare un $(n-p+2)$ p^{le}, e così via. Il gruppo unità di S_{n-p} e gli $n-p+1$ gruppi fondamentali formano un $(n-p+2)$ p^{la}.

3. Agli $n-p+1$ gruppi fondamentali di S_{n-p} ne possiamo sostituire altri $n-p+1$ qualsivogliano, formanti un

Digitized by Google

$(n - p + 1)\ p^{la}$ per individuare allo stesso modo, tutti gli altri gruppi del sistema stesso S_{n-p}.

Se infatti alle variabili λ_r sostituiamo le λ'_r col mezzo della sostituzione lineare:

$$\text{(VIII)}\quad \rho\,\lambda_r = a_{r_1}\,\lambda'_1 + a_{r_2}\,\lambda'_2 + \ldots + a_{r,\,n-p+1}\,\lambda'_{n-p+1}\quad (r = 1, 2, 3 \ldots n-p+1)$$

il cui modulo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\,n-p+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\,n-p+1} \\ a_{n-p+1,\,1} & a_{n-p+2,\,2} & \cdots & a_{n-p+r,\,n-p+1} \end{vmatrix}$$

non sia nullo, e gli elementi delle cui colonne sieno le coordinate degli $n - p + 1$ gruppi dati, essendo

$$F_1(x) = 0 \qquad F_2(x) \qquad \ldots \qquad F_{n-p+1}(x) = 0$$

l'equazioni di questi nuovi gruppi fondamentali sarà appunto:

$$\lambda'_1\,F_1(x) + \lambda'_2\,F_2(x) + \ldots + \lambda'_{n-p+1}F_3(x)_{n-p+1} = 0$$

l'equazione del gruppo di coordinate primitive λ_r, e di coordinate nuove λ'_r rispetto ai nuovi gruppi fondamentali.

Inoltre all'equazioni

$$F_r(x) = 0$$

dei nuovi gruppi fondamentali possiamo sostituire le

$$\varphi_r(x) = \rho_r F_r(x) = 0$$

ove le ρ_r sono quantità arbitrarie e che si possono determinare in modo che il nuovo gruppo unità:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_{n-p+1}(x) = 0$$

sia un gruppo qualsiasi del sistema S_{n-p}, soltanto formante un $(n - p + 2)\ p^{la}$ cogli $n - p + 1$ nuovi gruppi fondamentali.

Digitized by Google

Da ciò segue adunque che una sostituzione lineare di modulo non nullo operato sulle coordinate λ_r di un gruppo corrente di un S_{n-p}, serve al cambiamento dei gruppi fondamentali o del gruppo unità: oppure serve a porre fra i gruppi del sistema una *corrispondenza lineare* cioè un *omografia,* la quale è dunque determinata quando sia data un $(n-p+2)$ p^{ta} e la sua corrispondente. La stessa sostituzione lineare serve a stabilire una corrispondenza projettiva od omografica fra i gruppi algebrici di due sistemi lineari della stessa specie, essendo allora λ_r le coordinate di un gruppo corrente dell' un sistema S_{n-p}, e le λ'_r quelle del gruppo corrispondente dell' altro sistema S_{m-q}; ove $n-p=m-q.=k$, k essendo cioè la specie dei due sistemi l' uno di gruppi di ordine n, l' altro di gruppi di ordine m. Quindi l' equazioni:

$$\text{(IX)} \qquad \begin{aligned} &\mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) + \quad \dots \quad + \mu_k f_k(x) = 0 \\ &\mu_1 \varphi_1(x) + \mu_2 \varphi_3(x) + \quad \dots \quad + \mu_k \varphi_k(x) = 0 \end{aligned}$$

Sono quelle che riferiscono projettivamente in modo generale due sistemi o Spazi lineari della stessa specie k_{-1} essendo corrispondenti due elementi (gruppi) determinati dalle stesse coordinate μ_r nei due sistemi.

Se consideriamo la corrispondenza projettiva fra gli elementi di uno stesso spazio lineare S_{r-p}, rappresentata dalla sostituzione lineare (VIII), è bene rammentare che l' equazione algebrica:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \dots & a_{1,n-p+1} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \dots & a_{2,n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-p+1,1} & \dots & & a_{n-p+1,n-p+1}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

del grado $n-p+1$ in ρ dà in generale per le VIII le coordinate di $n-p+1$ gruppi corrispondenti a se stessi, detti gruppi uniti, cioè:

Digitized by Google

In un omografia fra gli elementi di un S_{n-p} *ci sono in generale* $n - p + 1$ *gruppi uniti.*

4. Ciò che ora abbiamo detto per un sistema lineare S_{n-p} di specie $n - p$ contenuto in S_n, si deve intendere esteso ad S_n. In S_n gli $n + 1$ i gruppi fondamentali sono quelli rappresentati dall' equazione

$$X_1^n = 0 \quad X_1^{n-1} X_2 = 0 \quad \ldots \quad X_2^n = 0$$

Indicando con $E_\infty^{(r)} . E_0^{(n-r)}$ il gruppo composto di $n - r$ elementi coincidenti con E_0, e di r con E_∞, saranno

$$E_0^{(n)} \ , \ E_0^{(n-1)} E_\infty^{(1)} \quad \ldots \quad E_0^{(1)} E_\infty^{(n-1)} \ , \ E_\infty^{(n)}$$

gli $n + 1$ gruppi fondamentali, che per brevità indicheremo anche con $G_1 , G_2 \ldots G_{n+1}$. Il gruppo unità G_0 essendo rappresentato da

$$(x_1 + x_2)^n = 0$$

non è altro che l' elemento E_{-1} conjugato armonico di E_1 rispetto agli elementi fondamentali E_0 , E_∞ della forma elementare, essendo però E_{-1} contato n volte. Con una sostituzione lineare delle variabili x_r con altre x'_r a modulo non nullo, potremo sostituire agli $n + 1$ gruppi fondamentali ed al gruppo unità, altri $n + 2$ gruppi qualsivogliano formanti un $(n + 2)\, p^{la}$ di gruppi in S_n . ; o potremo stabilire con essa una trasformazione omografica di S_n in se stesso, stabilendo che ad una data $(n + 2)\ p^{la}$ corrisponda pure un altra $(n + 2)\, p^{la}$ data. In particolare poi avremo speciali trasformazioni omografiche di S_n in se stesso, o speciali cambiamenti dei gruppi fondamentali S_n, per una sostituzione lineare delle variabili $X_1 X_2$ coordinate di un elemento della forma elementare. Per le corrispondenze omografiche o per i cambiamenti degli elementi fondamentali di S_n che derivano da tali sostituzioni lineari ha luogo la proprietà che ad un gruppo $G_x^{(n)}$ corrisponde un gruppo $G_{x'}^{(n)}$ della stessa

Digitized by Google

natura; vale a dire avente lo stesso numero di elementi semplici e multipli che ha il primo e colle stesse moltiplicità; così i gruppi fondamentali sono cangiati in gruppi pure della stessa natura.

5. Essendo:

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \quad \ldots \quad + \xi_{n+1} x_{n+1} = 0$$

l' equazione di un sistema lineare S_{n-1} di specie $n - 1$ di gruppi di S_n, le quantità reali $\xi_1 \xi_2 .. \xi_{n+1}$ si diranno le coordinate omogenee del S_{n-1}. Quindi gli S_{n-1} di S_n, formano pure uno spazio o sistema lineare Σ_n di specie n, come i gruppi dell' ordine n. Possiamo dire che gli S_{n-1} formano lo stesso S_n, quando ciascun gruppo $G_x^{(n)}$ sia essenzialmente determinato come comune a tutti gli S_{n-1} che lo possono contenere.

6. Inoltre potremo trattare lo spazio Σ_n come S_n, sostituendo alle coordinate x_r di un gruppo le coordinate ξ_r di un S_{n-1}. In generale gli S_{n-1} le cui coordinate ξ_r annullano una forma $f(\xi)$ di grado m nelle coordinate stesse, si diranno costituire un sistema algebrico di specie $n - 1$ e di *classe* m. Così gli S_{n-1} che sono comuni a p sistema algebrici di classe $m_1, m_2 .. , m_p$ si diranno costituire un sistema algebrico di specie $n - p$ e di classe $m_1 m_2 .. m_p$. In particolare un sistema algebrico Σ_{n-p} di 1.ª classe e di specie $n - p$ non sarà altro che un sistema lineare di specie $n - p$, i cui elementi sono S_{n-1} di S_n, che diremo *stella* Σ_{n-p} di specie $n - p$.

7. Risulta subito

Un S_k di S_n *è contenuto in infiniti* S_{n-1} *che formano una stella di specie* $K' = n - K - 1$, *di cui* l' S_k *sarà il* sostegno o centro, *e tal stella sarà così indicata anche con* $(S_k)_{k'}$. Viceversa: *una stella* Σ_h *di specie* h *in* Σ_n *è formata di* S_{n-1} *che contengono tutti un* S_{n-h-1} *di* S_n, che è il centro o sostegno della stella. L' equazioni quindi di una stella si dicono anche l' equazioni tangenziali del suo sostegno.

Così in particolare l' equazione

$$\xi_x = 0$$

Digitized by Google

è l'equazione di un S_{n-1} di S_n, se in essa si riguardano costanti le ξ_r e variabili la x_r; è invece l'equazione tangenziale del gruppo $G_x^{(n)}$ di coordinate x_r, se in essa si riguardano variabili le ξ_r e costanti le x_r; in questo ultimo caso cioè l'equazione è quella del gruppo $G_x^{(n)}$ essenzialmente però riguardato come centro di una stella $(G_x^n)_{n-1}$ di specie $n-1$ il cui sostegno è il gruppo stesso $G_x^{(n)}$.

8. In particolare l'equazioni tangenziali:

$$\xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 0 \quad \dots \quad \xi_{n+1} = 0$$

saranno quelle dei gruppi fondamentali $G_1, G_2 \dots G_n$; e le:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \dots \quad x_{n+1} = 0$$

saranno quelle degli S_{n-1} fondamentali che hanno le stesse coordinate dei corrispondenti gruppi G_r; e questi S_{n-1} li indicheremo con $I_1, I_2 \dots I_{n+1}$ rispettivamente.

In generale in un $(n+1)$ p^{ia} di gruppi o di S_{n-1} vi sono rispettivamente $n+1$ S_{n-1} ed $n+1$ gruppi determinati dagli elementi delle $(n+1)$ p^{ia} presi ad n ad n.

Così i gruppi fondamentali G_r presi ad n ad n determinano gli S_{n-1} fondamentali I_r; e viceversa: G_r è alla sua volta determinato dagli altri S_{n-1} fondamentali fuori di I_r, come loro elemento comune.

Un $(n+1)\,p^{ia}$ di gruppi e l'$(n+1)\,p^{ia}$ di S_{n-1} determinata dai gruppi della prima ad n ad n, si dice un $(n+1)$ p^{ia} *completa*.

Indicheremo con G_0 ed I_0 rispettivamente il gruppo unità di S_n, e l'S_{n-1} unità in Σ_n rappresentati rispettivamente da

$$\xi_1 + \xi_2 + \quad \dots \quad + \xi_{n-1} = 0$$

$$x_1 + x_2 + \quad \dots \quad + x_{n+1} = 0.$$

Questi hanno una determinazione reciproca projettiva. Se consideriamo gli $n+1$ gruppi G'_r $(r = 1, 2 \dots n+1)$ le cui coordinate sono:

Digitized by Google

$$(0,1 \ldots 1); \quad (1,0,1 \ldots) \quad \ldots \quad (1,1 \ldots 0)$$

essi formano un $(n+1)$ $p^{\prime a}$ di cui indichiamo in generale con I'_r l' S_{n-1} determinato dai rimanenti n gruppi dell' $(n+1)$ $p^{\prime a}$ fuori di G'_r. Saranno allora

$$\begin{aligned}
&(n-1)\,x_1 + x_2 \quad \ldots \quad + x_{n+1} = 0\\
&x_1 + (n-1)\,x_2 + \quad \ldots \quad + x_{n+1} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1 \qquad\qquad + x_2 \quad \ldots \quad + (n-1)\,x_{n+1} = 0
\end{aligned}$$

l' equazioni di $I'_1, I'_2 \ldots I'_{n+1}$ onde risulta subito che G_0 determina I_0 in modo projettivo; perchè G'_r non è altro che il gruppo comune ad I_r ed al S_1 determinato da G_0 e G_r; ed I_0 deve contenere gli S_{n-2} secondo cui si tagliano le coppie $I_1, I'_1, \ldots$ $I_{n+1}\, I'_{n+1}$ di S_{n-1}. Sostituendo alle coordinate di punti quelle di S_{n-1} e viceversa, è ovvio il vedere come si determina correlativamente G_0 dato I_0. Per tal ragione le due $(n+2)$ $p^{\prime a}$ $G_1 \ldots G_{n+1}, G_0$; $I_1, I_2 \ldots I_{n+1}, I_0$ che hanno un $(n+1)$ $p^{\prime a}$ in comune (considerata nei suoi due modi composta di gruppi e di S_{n-1}), si diranno $(n+2)$ $p^{\prime a}$ associate.

9. In generale poi per le intersezioni degli spazi lineari di S_n è subito visto che un S_h ed un S_k per i quali le equazioni che li rappresentino insieme formano un sistema di $2n-(h+k)$ equazioni distinte non hanno alcun gruppo comune se sia:

$$2n-(k+k) > n$$

ossia

$$n-(h+h) > 0$$

Dunque secondo che sia:

$$h+k \gtreqless n$$

i due S_h, S_k non hanno rispettivamente alcun elemento comune, oppure hanno un gruppo in comune, oppure hanno un S_r in co-

Digitized by Google

mune, essendo $r = h + k - n$. Sostituendo ad n, p lo stesso accade se i due S_h, S_k giacessero in uno stesso S_p di S_n.

10. Un S_p è determinato da $n - p$ S_{n-1} che lo contengono costituenti un $(n-p)\,p^{la}$, cioè tali che se siano $\xi_i^{(r)}$ le coordinate $\xi_i^{(r)}$ degli $n - p$ S_{n-1}, i determinanti della matrice formata colle coordinate stesse $\xi_i^{(r)}$ non sono tutti nulli. Oppure un S_p è determinato da $n - p$ dei suoi gruppi formanti una $(p+1)\,p^{la}$, cioè tali che i determinanti della matrice formata colle loro coordinate $x_i^{(r)}$ non siano tutti nulli. Ciò equivale in altri termini a dire che l' equazioni

$$(X) \qquad \xi_x^{(1)} = 0 \quad \xi_x^{(2)} = 0 \quad \dots \quad \xi_x^{(n-p)} = 0$$

locali di S_p debbono essere $n - p$ equazioni distinte; e le equazioni tangenziali di esso:

$$(X)' \qquad x_\xi^{(1)} = 0 \quad x_\xi^{(2)} = 0 \quad \dots \quad x_\xi^{(p+1)} = 0$$

Debbono essere $p + 1$ equazioni distinte. L' equazioni:

$$(XI) \qquad \begin{cases} \lambda_1 x_\xi^{(1)} + \lambda_2 x_\xi^{(2)} + \dots + \lambda_{p+1} x_\xi^{(p+1)} = 0 \\ \lambda_1 \xi_x^{(1)} + \lambda_2 \xi_x^{(2)} + \dots + \lambda_{p-1} \xi_x^{(n-p)} = 0 \end{cases}$$

rappresentano rispettivamente per ogni sistema di valori delle λ_r un gruppo di S_p ed un S_{n-1} della stella $(S_p)_{n-p-1}$ di specie $n - p - 1$ che ha per sostegno S_p. Le formole:

$$(XII) \qquad \left.\begin{cases} \rho\, x_r = \lambda_1 x_r^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \dots + \lambda_{p+1} x_r^{(p+1)} \\ \rho\, \xi_r = \lambda_1 \xi_r^{(1)} + \lambda_2 \xi_r^{(2)} + \dots + \lambda_{n-p} x_r^{(n-p)} \end{cases}\right\} r = 1, 2 \dots n+1$$

(ove ρ è un fattore di proporzionalità) danno le coordinate di un gruppo corrente di S_r e di un S_{n-1} corrente della stella $(S_r)_{n-p-1}$.

Digitized by Google

11. Ciò posto, osserviamo che i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_{n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(p+1)} & x_2^{(p+1)} & \dots & x_{n+1}^{(p+1)} \end{vmatrix}$$

danno col loro annullarsi le condizioni di coesistenza delle prime delle (XII) per valori di ρ e delle λ_r non tutti nulli: d'altra parte se nei determinanti stessi consideriamo le x_r come coordinate di un gruppo corrente, essi rappresentano, ciascuna col suo annullarsi, un diverso S_{n-1} che contiene S_p ed $n-p-1$ determinati gruppi fondamentali di S_n.; ed $n-p$ di tali equazioni rappresentano S_p come luogo dei suoi punti. L' equazioni stesse debbono essere d' altra parte anche quelle che si otterrebbero dalle prime delle (XI) determinando le λ_r in modo che siano soddisfatte $n-p-1$ delle $n+1$ equazioni:

$$\text{(XIII)}\quad (r=1,2 \dots n+1)\quad \lambda_1 \xi_r^{(1)} + \lambda_2 \xi_r^{(2)} + \quad \dots \quad + \lambda_{n-p} \xi_r^{(n-p)} = 0.$$

Risulta quindi che nel primo caso i coefficienti dell'equazioni locali di S_p non sono altro che determinanti di ordine $p+1$ della matrice formata dalle coordinate $x_i^{(r)}$ dei $p+1$ gruppi che determinano S_p. In tutto i determinanti della matrice stessa sono

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{n-p}.$$

Nel 2.° modo i coefficienti dell' equazioni locali di S_p non sono altro che determinanti di ordine $n-p$ della matrice formata colle coordinate $\xi_i^{(r)}$ degli $n-p$ S_{n-1} che determinano S_p, come *loro intersezione.* Questi determinanti sono ancora in tutto $\binom{n+1}{n-p}$. I determinanti della 1.ª matrice si dicono le *coordinate locali* di S_p ed i determinanti della 2.ª matrice si dicono

Digitized by Google

le *coordinate omogenee tangenziali* di S_p o della stella $(S_p)_{n-p-1}$ che ha per sostegno S_p. Gli stessi determinanti figurano nell' equazioni tangenziali di S_p, ossia della stella $(S_p)_{n-p-1}$. Infatti l' annullarsi dei determinanti della matrice:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \cdots & \xi_{n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{(n-p)} & \xi_2^{(n-p)} & \cdots & \xi_{n+1}^{(n-p)} \end{vmatrix}$$

dà le condizioni di coesistenza delle seconde delle (XII) per valori di $\rho, \lambda, \ldots \lambda_{n-p}$ non tutti nulli. Ciascuna dell'equazioni che si ottiene dal porre eguale a zero un determinante della matrice, rappresenta al variare delle ξ_r, una stella di specie $n-1$ a cui appartiene la stella $(S_p)_{n-p-1}$, e p determinati degli $n+1$ S_{n-1} fondamentali di Σ_n. Alle $p+1$ equazioni (X)' per rappresentare la stella possono essere sostituite quelle che risultano dall'eguagliare a zero $p+1$ determinanti della detta matrice. Le stesse equazioni per rappresentare la stella si ottengono dalle prime delle (XI) quando per le λ_r si sostituiscono i valori per i quali sono soddisfatte p delle $n+1$ relazioni:

$$\text{(XIV)} \quad \lambda_1 x_1^{(r)} + \lambda x_2^{(r)} + \lambda_3 x_3^{(r)} + \ldots \lambda_{p+1} x_r^{(p+1)} = 0 \; (r = 1, 2 \ldots n+1)$$

ed allora i coefficienti dell' equazioni tangenziali di S_p sono le coordinate locali di S_p. Le $n-p$ equazioni locali speciali che rappresentano S_p, si possono ottenere risolvendo le (XI) rispetto ad $n-p$ delle $n+1$ variabili x_r coordinate di un gruppo corrente. Segue da ciò che delle $\binom{n+p}{n-1}$ coordinate tangenziali di S_p nelle dette equazioni ne figurano linearmente ed omogeneamente $(n-p)(p+1)+1$, una essendo la stessa in tutte le equazioni; segue inoltre che un S_p è determinato da $(p+1)(n-p)$ costanti che sono i rapporti di $(p+1)(n-p)$ delle sue coordinate tangenziali ad un altra. La stessa conclusione si ottiene

Digitized by Google

considerando l' equazioni tangenziali di S_p, per le coordinate locali del S_p stesso.

Dunque le $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{n-p}$ coordinate locali o tangenziali di un S_p non sono essenzialmente tutte indipendenti ma legate da

$$\binom{n+1}{p+1} - \left\{ (n-p)(p+1)+1 \right\}$$

relazioni omogenee distinte non lineari nelle coordinate stesse, esprimenti le condizioni che di tutte le $\binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{p+1}$ equazioni locali o tangenziali di S_p rispettivamente

$$\binom{n+1}{n-p} - (n-p) \quad , \quad \binom{n+1}{p+1} - (p+1)$$

sono conseguenze delle $n-p$ o $p+1$ che rappresentano S_p.

12. Le relazioni stesse (già note) sono poi ovvie a dedursi per i casi più in uso di $n=3$, $n=4$, $n=5$, cioè per gli spazi S_3, S_4, S_5 dei gruppi cubici, biquadratici, e di quinto ordine. Pel nostro scopo interessa notare che i due modi con cui si possono ottenere le equazioni locali tangenziali di un S_p, danno la proporzionalità che deve aver luogo fra le coordinate locali e tangenziali di uno stesso S_p. Inoltre dobbiamo adunque ritenere che la totalità degli S_p di S_n è a dirsi un sistema algebrico (non lineare) di specie $(n-p)(p+1)$, ossia gli S_p di S_n formano una serie $(n-p)(p+1)$ volte infinite o brevemente un sistema $\infty^{(n-p)(p+1)}$. Le stesse cose devono intendersi estese agli spazi lineari Σ_h di Σ_n. E per un S_p di S_n debbono pure intendersi estese le cose dette per S_n, sostituendo alla specie n di S_n la specie $p < n$ di S_p, ed agli S_{n-1} gli S_{p-1} per formare le stelle contenute in un S_p. In generale quindi se:

$$\eta_x^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2 \quad \ldots \quad n-p)$$

sono l' equazioni di un S_p, sarà

$$\lambda_1 \eta_x^{(1)} + \lambda_2 \eta_x^{(2)} + \quad \ldots \quad + \lambda_{n-p} \eta_x^{(n-p)} = 0$$

Digitized by Google

quella di un S_{n-1} corrente della stella $(S_p)_{n-p-1}$ che ha per sostegno S_p; e saranno:

$$\frac{\eta_x^{(1)}}{\mu_1} = \frac{\eta_x^{(2)}}{\mu_2} = \quad \dots \quad = \frac{\eta_x^{(n-p)}}{\mu_{n-p}}$$

per ogni sistema di valori delle η_r, l' equazioni di un S_{p+1} sostegno di una stella $(S_{p+1})_{n-p-2}$ di specie $n-p-2$ contenuta nella stella $(S_p)_{n-p-1}$ di specie $n-p-1$.

Gli S_{p+1}, formano un sistema lineare di specie $n-p-1$ come lo formano gli S_{n-1} della stella data $(S_p)_{n-p-1}$. Le quantità $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-p}$ sono a dirsi le coordinate omogenee di un S_{p+1} corrente della stella. Una stella $(S_p)_{n-p-1}$ di specie $k = n-p-1 > 1$ può dunque, come spazio lineare di specie k, riguardarsi composta di due elementi: i suoi S_{n-1}, oppure gli spazi S_{p+1} di specie superiore di una unità del suo sostegno S_p; a quel modo con cui con S_p (essendo $p > 1$) si può riguardare come spazio lineare di specie p, sia composto dei suoi elementi (ossia dei suoi gruppi) oppure dei suoi S_{p-1}. I due elementi che possono comporre una stella od un S_p come spazio lineare di una stessa determinata specie, si diranno *elementi duali;* e le forme che nascono in un S_p od in una stella $(S_{n-h-1})_p$ col loro scambio si dicono *correlative,* s' intende che lo scambio deve essere fatto in modo che due elementi generatori del S_p o della stella, dei quali l' uno contenga l'altro, debbono essere cambiati in due elementi analoghi.

13. Se noi riferiamo projettivamente S_n e Σ_n in modo che ad un elemento di S_n cioè un gruppo $G_x^{(n)}$, corrisponda un elemento di Σ_n, cioè un S_{n-1} di coordinate ξ'_r, quando il gruppo $G_x^{(n)}$ descrive un S_{n-1} di coordinate ξ_r, l'S_{n-1} corrispondente passa costantemente per un gruppo $G_{x'}^{(n)}$ descrivendovi una stella $(G_{x'}^{(1)})$ di specie $n-1$. Il gruppo $G_{x'}^{(2)}$ è a dirsi così il corrispondente dell' S_{n-1} percorso da $G_x^{(2)}$. In generale è chiaro che quando $G_x^{(2)}$ descrive un S_r di S_n, l' S_{n-1} corrispondente

Digitized by Google

descrive la stella correlativa: e viceversa quando l'S_{n-1} di S_n descrive la stella di sostegno S_p, il gruppo $G_{x'}^{(2)}$ corrispondente descrive il sostegno della stella corrispondente ad S_p ecc. La corrispondenza lineare che nasce dal riferire projettivamente S_n e Σ_n, e che si ottiene con una sostituzione lineare, a modulo non nullo, delle variabili ξ_r coordinate di un S_{n-1} colle variabili x'_r coordinate di un gruppo (o viceversa), si dice perciò *correlazione*. Le omografie e le correlazioni si dicono poi corrispondenze lineari, perchè sono rappresentate da costituzioni lineari ed hanno quindi la proprietà che ad uno spazio lineare corrisponde uno spazio lineare; ed in generale, in un omografia ad uno spazio algebrico di specie k e di ordine h corrisponde un spazio della stessa specie e dello stesso ordine; ed in una correlazione invece vi corrisponde lo spazio correlativo di specie k e di classe h. Si può poi osservare che l'ordine h di uno spazio $S_k^{(h)}$ di specie k contenuto in un S_n $(k < n)$ è anche il numero dei gruppi (reali o immaginari) che esso ha in comune con un S_{n-k}. Correlativamente si può definire la classe h di uno spazio algebrico $\Sigma_k^{(h)}$ di specie k contenendo in Σ_n, essendo quindi $(k < n)$. Inoltre, poichè una correlazione è data da una sostituzione lineare come un omografia, risulta subito che: *Una correlazione* Γ *in* S_n *è determinata quando sia data un* $(n+2)^{pla}$ *di gruppi e la sua corrispondente di* S_{n-1}.

14. Ed al solito dovremo concepire estese le cose dette sulle correlazioni di S_n, anche alle correlazioni di un S_p contenuto in S_n o di una stella di S_n o spazio lineare Σ_p di Σ_n $(p < n)$; oppure per la correlazione di due S_p, per es. A_p, B_p, della stessa specie; e così per due stelle della stessa specie. La correlazione sarà determinata quando sia data una $(p+2)^{pla}$ di elementi dell'un sistema e la $(p+2)^{pla}$ di elementi corrispondenti dell'altro sistema lineare, essendo la correlazione posta per definizione con una conveniente sostituzione lineare delle variabili coordinate degli elementi (duali) corrispondenti.

In uno spazio lineare A_p di specie p di S_n ed in uno spazio lineare (stella) A_p di specie p in Σ_n, diremo *projettivi*

Digitized by Google

due elementi di A_p ed A_p che siano rispettivamente un gruppo ed un S_{n-p} della stella $A_p = (B_{n-p-1})_p$ oppure un S_{p-1} di A_p ed un S_{n-1} della stella; diremo invece *duali* fra loro un gruppo di A_p ed un S_{n-1} della stella A_p, oppure un S_{p-1} di A_p ed un S_{n-p} della stella stessa.

Con una conveniente sostituzione lineare ponendo una corrispondenza lineare fra gli elementi di A_p ed A_p essa sarà dunque un *omografia* od una *correlazione* secondo che sono fra loro corrispondenti due elementi projettivi o duali di A_p ed A_p.

§ 3. — **Polarità fondamentali di** S_n.

1. Sulle correlazioni ci occorrono soltanto alcune altre considerazioni, in particolare per quelle poste fra gli elementi di una stessa *forma fondamentale,* chiamando con tal nome ogni sistema lineare di gruppi di S_n od ogni stella. Noi faremo tale considerazioni in particolare per le correlazioni dello stesso spazio *fondamentale* S_n. Sia Γ una data correlazione di S_n; e siano x_r le coordinate di un gruppo $G_x^{(n)}$ ed x'_r quelle di un gruppo $G_{x'}^{(n)}$ del S_{n-1} corrispondente, cosichè l'equazione bilineare nelle x_r,

$$\text{XV} \qquad \Sigma\, \alpha_{rs}\, x_r\, x'_s = 0\ .$$

(ove la sommatria si intende estesa a tutti i termini che si ottengono colle disposizioni rs di 2.ª classe, anche con ripetizioni degli indici $1, 2 \ldots n+1$) rappresenta l'$S_{n-1} = X'_{n-1}$ corrispondente al gruppo $G_x^{(n)}$ se in essa riguardiamo costanti le x_r: oppure rappresenta l'$S_{n-1} = X_{n-1}$ che ha per corrispondente un dato gruppo $G_{x'}^{(n)}$, se teniamo fisse le x'_r.

Il modulo della sostituzione lineare che ci dà la correlazione considerata Γ, non è altro che il determinante delle a_{rs} che noi supponiamo sempre non nullo, cioè consideriamo qui le

Digitized by Google

corrispondenze lineari non degeneri, cioè tali che senza eccezione, ogni elemento non ha che un solo corrispondente. Se ora sia a_{rs} l' elemento reciproco di a_{rs} nel modulo della sostituzione, l' equazione bilineare:

$$\text{(XVI)} \qquad \Sigma\, a_{rs}\, \xi_r\, \xi'_s = 0$$

nelle coordinate ξ_r, ξ'_r di due S_{n-1}, che indicheremo con X_{n-1} od X'_{n-1}, rappresenta il gruppo $G_x^{(n)}$ corrispodente ad un dato S_{n-1} X_{n-1}, oppure rappresenta il gruppo $G_x^{(n)}$ che ha per corrispondente un dato $S_{n-1} = X'_{n-1}$, secondo in essa si riguardano costanti le ξ_r oppure le ξ'_r.

Due gruppi o due S_{n-1} le cui coordinate soddisfano alle equazioni bilineari scritte, si diranno gruppi od S_{n-1} fra loro *conjugati* nella correlazione. Risulta subito:

Il luogo dei gruppi conjugati a se stessi, ossia contenuti nei loro S_{n-1} *corrispondenti* (*od* S_{n-1} *a cui corrispondono*) *è il sistema quadratico* $S^{(2)}_{n-1}$ *di specie* n — 1 *rappresentato dall' equazione*

$$\text{(XVII)} \qquad \Sigma\, \alpha_{rs}\, x_r\, x_s = 0$$

E correlativamente:

Il luogo degli S_{n-1} *conjugati a se stessi, ossia contenuti nei loro gruppi corrispondenti* (*od i gruppi a cui corrispondono*) *è il sistema quadratico* $\Sigma^{(2)}_{n-1}$ *di specie* n — 1 *in* Σ_n, *rappresentato dall' equazione*

$$\text{(XVII)}' \qquad \Sigma\, a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s = 0$$

Diremo brevemente quadriche di S_n e di Σ_n i sistemi $S^{(2)}_{n-1}$, $\Sigma^{(2)}_{n-1}$.

2. Ogni gruppo $G_x^{(n)}$ ha il suo $S_{n-1} = X'_{n-1}$ corrispondente nella data correlazione; e determina un $S_{n-1} = X_{n-1}$ a cui esso corrisponde. Quando per ogni gruppo $G_x^{(n)}$ avviene la coincidenza di X'_{n-1} con X_{n-1}, la correlazione Γ dicesi *involutoria*, e la si

Digitized by Google

chiama *Polarità;* e l' $S_{n-1} = X_{n-1}$ corrispondente ad un gruppo $G_x^{(n)}$ si dirà *polare* del gruppo; ed il gruppo *polo* dell' X_{n-1}. È chiaro poi che una correlazione non può essere involutoria altro che quando sia simmetrica nelle x_r, x'_r l' equazione bilineare (XVI) che si può dire rappresentare la correlazione stessa.

3. La simmetria dell' equazione avviene intanto quando sia $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, ossia quando il modulo della sostituzione lineare che dà la correlazione è un determinante simmetrico. Allora l' equazione (XVII) rappresenta la quadrica $S_{n-1}^{(2)}$ luogo dei poli i cui S_{n-1} polari contengono i poli stessi; e le (XVII) rappresenta la quadrica $\Sigma_{n-1}^{(2)}$ di Σ_n luogo degli S_{n-1} che contengono i loro poli.

D' altra parte è subito visto che l' X_{n-1} polare di un gruppo $G_x^{(n)}$ di $S_{n-1}^{(2)}$, è anche l' S_{n-1} che contiene gli S_1 di S_n che *toccano* in $G_x^{(n)}$ la quadrica $S_{n-1}^{(2)}$, ossia hanno riuniti nel gruppo $G_x^{(n)}$ i loro due gruppi comuni colla quadrica, e tale S_{n-1} dicesi perciò l' S_{n-1} *tangente* ad essa nel gruppo (elemento) $G_x^{(n)}$. La quadrica (XVII) è dunque il luogo degli S_{n-1} tangenti della quadrica $S_{n-1}^{(2)}$; e l' equazione stessa (XVII) dicesi l' *equazione tangenziale* di $S_4^{(2)}$. Perchè poi per ogni S_{n-2} di S_n passano al più due S_{n-1} tangenti ad $S_{n-1}^{(2)}$, la quadrica si dice appunto della 2.ª classe; e si esprime ad un tempo che $S_{n-1}^{(2)}$ è spazio algebrico di 2.° ordine e di 2.ª classe, dicendo che è *di 2.° grado.*

4. Due gruppi $G_x^{(n)}$, $G_{x'}^{(n)}$ o due $S_{n-1} : X_{n-1}$, $X^1{}_{n-1}$ fra loro conjugati, si dicono anco conjugati od armonici rispetto alla quadrica $S_{n-1}^{(2)}$. Nella polarità possiamo concepire infinite $(n+1)^{ple}$ tali che ciascun gruppo dell' $(n+1)^{pla}$ ha per S_{n-1} polare, quello determinato dagli n gruppi rimanenti. Ognuno di tali $(n+1)^{ple}$ dicesi un $(n+1)^{ple}$ *polare* o *conjugata* rispetto alla quadrica.

Se poi una correlazione è tale che ad ogni gruppo di un $(n+1)^{pla}$ corrisponda l' S_{n-1} formato dagli n gruppi rimanenti di essa allora la correlazione è una polarità. Se in fatti per

Digitized by Google

l' $(n+1)^{p/a}$ proposta assumiamo quella formata dai gruppi G_1 , $G_2 \ldots G_{n+1}$ fond.^{i}, (che del resto è un $(n+1)^{p/a}$ qualunque), la sostituzione lineare che rappresenta la correlazione sarà

$$\rho\, \xi'_r = \alpha_{rr}\, x_r \quad (r = 1, 2 \ldots n+1)$$

quindi la correlazione è una polarità; e la quadrica $S_4^{(2)}$ è rappresentata dall' equazione

$$\alpha_{11}\, x_1^2 + \alpha_{22}\, x_2^2 + \quad \ldots \quad + \alpha_{n+1,\,n+1}\, x^2_{n+1} = 0;$$

e reciprocamente sotto tale forma si pone l' equazione di una quadrica, quando si prenda per $(n+1)^{p/a}$ fondamentale un $(n+1)^{p/o}$ polare rispetto alla quadrica stessa.

5. L' altro caso in cui l' equazione bilineare (XVI) della correlazione Γ è simmetrica nelle x_r , x'_r è quando abbiano luogo le relazioni:

$$\alpha_{11} = 0 \qquad \alpha_{22} = 0 \qquad \ldots \qquad \alpha_{n+1,\,n+1} = 0$$

$$\alpha_{rs} + \alpha_{sr} = 0$$

L' equazione bilineare (XVI) diventa

$$\Sigma\, \alpha_{rs}\,(x_r\, x'_s - x_s\, x'_r) = 0$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le combinazioni a due a due degli indici 1 , 2 .... $n+1$. L' S_{n-1} corrispondente di un gruppo $G_x^{(n)}$ contiene il gruppo stesso e la polarità dicesi perciò *Polarità Nulla*. Il determinante modulo della sostituzione lineare che rappresenta la polarità in questo caso è identicamente nullo quando sia n pari, essendo un determinante emisimmetrico di ordine dispari: accade invece al contrario per n dispari. Ora, se in generale il modulo della sostituzione lineare è nullo semplicemente, risulta subito che la correlazione è *singolare,* cioè la corrispondenza non è più univoca senz' eccezione. Esiste cioè un gruppo il cui S_{n-1} corrispondente è affatto indeterminato:

Digitized by Google

cioè *le polarità nulle non singolari esistono soltanto quando l'ordine* n *del gruppo corrente che costituisce* S_n *è dispari.*

6. Ma qualunque sia la specie $n \geqq 2$ dello spazio S_n, ossia l'ordine dei gruppi che lo costituiscono, resta in esso determinata una polarità Π, che chiameremo *fondamentale,* che è appunto una polarità nulla per n dispari.

Osserviamo anzitutto che per due gruppi $G_y^{(n)}$, $G_z^{(n)}$ di coordinate y_r, z_r la relazione affinchè essi si dividono armonicamente ossia formano un sistema armonico di $2n$ elementi è:

$$y_1 z_{n+1} - \binom{n}{1} y_2 z_n + \binom{n}{2} y_3 z_{n-1} - \quad \dots \quad \pm y_{n+1} z_1 = 0$$

ove il segno + vale per n pari ed il segno — per n dispari, avuto riguardo sempre che i coefficienti binomiali sono gli stessi per i termini equidistanti dagli estremi. Segue da ciò che indicando con X_{n-1} il sistema lineare di specie $n-1$, di coordinate ξ_r, cioè rappresentato dall'equazione

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \quad \dots \quad + \xi_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

posto:

$$\text{(XIX)} \quad \begin{cases} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \dots : \xi_{n+1} = \\ z_{n+1} : -\binom{n}{1} z_n : \binom{n}{2} z_{n-1} : \dots : \pm z_1, \end{cases}$$

per ogni $S_{n-1} = Z_{n-1}$ di S_n resta determinato un gruppo $G_z^{(n)}$ per il quale Z_{n-1} è definito come il luogo dei gruppi che dividono armonicamente quel gruppo $G_z^{(n)}$. Onde:

In S_n *resta determinata una polarità* Π *nella quale ogni gruppo* $G_x^{(2)}$ *ha per polare l'* X_{n-1} *formato dai gruppi che dividono armonicamente il gruppo considerato* $G_x^{(2)}$. *Per* n *pari la polarità è quella della quadrica* $S_{n-1}^{(2)}$ *rappresentata dall'equazione*

$$\text{(XX)} \qquad 2 x_1 x_{n+1} - 2 x_2 x_n \binom{n}{1} + \dots \pm x^2_{\frac{n}{2}+1} \binom{n}{\frac{n}{2}} = 0;$$

(*il segno* + *valendo nel caso di* $\frac{n}{2}$ *pari ed il segno* — *per* $\frac{n}{2}$

Digitized by Google

dispari —); *che è il luogo dei gruppi che dividono armonicamente se stessi. Nel caso di* n *dispari la polarità fondamentale* Π *è una polarità nulla rappresentata dall' equazione bilineare:*

$$(XXI)\quad y_1 z_{n+1} - z_1 y_{n+1} - \binom{n}{1}(y_2 z_n - y_n z_2) + \ \ldots\ = 0\,;$$

l'ultimo termine è quello che ha il coefficente binomiale $\left(\frac{n}{\frac{n-1}{2}}\right)$ *col segno* + *o* — 1 *secondo che* $\frac{n-1}{2}$ *è pari o dispari.*

Ogni gruppo di ordine dispari è un gruppo che divide armonicamente se stesso.

7. In tutti i casi vedremo che la polarità fondamentale Π di S_n è determinata in sostanza dai gruppi fondamentali e dal gruppo unità. Perciò rammentiamo intanto che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un gruppo $G_x^{(n)}$ di ordine n consti di un elemento E_λ contato n volte, cioè abbia un elemento n^{plo}, sono date dalla coesistenza delle equazioni:

$$(XXII)\quad x_1 X_1 + x_2 X_2 = 0 \quad x_2 X_1 + x_3 X_2 = 0 \quad \ldots \quad x_n X_1 + x_{n+1} X_2 = 0$$

per le coordinate X_1 , X_2 dell' elemento n^{plo} della forma elementare, dal quale elemento è costituito il gruppo.

Si ottiene quindi:

$$(XXIII)\qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \quad \ldots \quad = \frac{x_n}{x_{n+1}} = -\frac{X_2}{X_1}$$

da cui:

$$(XXIV)\quad x_1 : x_2 : \ : x_{n+1} = X_2^n : -X_2^{n-1} X_1 : \ \ldots \ : \pm X_1^n$$

il segno + per n pari ed il segno — per n dispari; e posto

$$\frac{X_1}{X_2} = \theta$$

sarà anche:

$$(XXIV)'\qquad x_1 : x_2 : \ \ldots \ x_{n+1} = 1 : -\theta : \theta^2 : \ \ldots : \pm \theta^n$$

Digitized by Google

Intanto le (XXIV) o (XXIV)' ci dicono che nello spazio S_n dei gruppi di ordine n, i gruppi che si riducono ad un elemento della forma contato n volte, costituiscono un sistema *algebrico razionale* $C^{(n)}$ di *prima specie,* che diremo *curva normale di* S_n. Si può dire che gli elementi della forma elementare assunta, ciascuno contato n volte, costituiscono la curva $C^{(n)}$; o brevemente che: $C^{(n)}$ non è altro che per poi la forma elementare assunta contata n volte. La curva $C^{(n)}$ di S_n è a dirsi dell'ordine n, perchè con ogni S_{n-1} di S_n ha in comune n gruppi al più. Se infatti sia:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \quad \dots \quad + \xi_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

l'equazione del S_{n-1}, allora l'equazione:

$$\text{(XXV)} \quad \xi_1 X_2^n - \xi_2 X_2^{n-1} X_1 + \xi_3 X_2^{n-1} X_1^2 - \quad \dots \quad \pm \xi_{n+1} X_1^n = 0$$

ossia

$$\text{(XXV)'} \qquad \xi_1 - \theta \xi_2 + \theta^2 \xi_3 - \quad \dots \quad \pm \theta^n \xi_{n+1} = 0$$

del grado n nelle coordinate X_1, X_2 o nel parametro θ dell'elemento, dà colle sue radici θ_1, $\theta_2 \dots \theta_n$ i parametri (o le coordinate) degli elementi n^{pli} che costituiscono ciascun un gruppo di n elementi contenuti nell'S_{n-1} considerato. Fra le coordinate ξ_r di S_{n-1} ed i parametri θ_r avremo dunque le relazioni:

$$\text{(XXVI)} \quad \begin{cases} \xi_{n+1} : \xi_n : \xi_{n-1} : \dots : \xi_1 = \\ 1 : \Sigma \theta_r : \Sigma \theta_r \theta_s : \dots : \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \end{cases}$$

e quindi l'equazione di S_{n-1} si può mettere sotto la forma

$$\text{(XXVI)'} \quad \theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_n x_1 + x_2 \Sigma \theta_{r_1} \theta_{r_2} \dots \theta_{r_{n-1}} + \dots + x_n \Sigma \theta_r + x_{n+1} = 0;$$

e sostituendo in luogo delle x_1, $x_2 \dots x_{n+1}$ le espressioni ad esse proporzionali per mezzo delle funzioni elementari simmetriche

Digitized by Google

dei parametri $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ degli elementi di un gruppo corrente dell' S_{n-1} considerato, risulta subito:

Gli n *elementi* n^pli *che un* S_{n-1} *può contenere, ciascuno contato una volta sola, formano un gruppo algebrico di ordine* n, *precisamente il gruppo diviso armonicamente da tutti i gruppi dell'* S_{n-1}.

Dunque il gruppo stesso, in tutti i due casi di n pari o dispari è il polo del S_{n-1} nella polarità fondamentale Π.

8. Ma di più nella XXVI poniamo, $\theta_1 = \theta_2 = . = \theta_n = \theta$ essa diventa:

$$\text{(XXVII)} \quad \theta^n x_1 + \binom{n}{1} \theta^{n-1} x_2 + \ \ldots \ + \binom{n}{1} x^n \theta + x_{n+1} = 0 :$$

ed è l' equazione di un S_{n-1} i cui gruppi comuni con $C^{(n)}$ vengono a coincidere in un sol gruppo, elemento della forma f elementare di parametro θ contato n volte. D' altra parte se si voglia l' S_{n-1} polare del gruppo che consta dell' elemento E_θ contato n volte si trova la XXVII. Chiamando ora *osculatori* a $C^{(n)}$ gli S_{n-1} che hanno in comune con $C^{(n)}$ n gruppi coincidenti in un solo gruppo $E_\theta^{(n)}$, cioè un elemento E_θ della forma f elementare assunta contato n volte, ne segue che:

Gli S_{n-1} *polari in* Π *degli elementi di* $C^{(n)}$, *non sono altro che gli* S_{n-1} *osculatori a* $C^{(n)}$ *negli elementi stessi.*

9. Nel caso di n pari il sistema $C^{(n)}$ appartiene adunque alla quadrica $S_{n-1}^{(2)}$ luogo dei gruppi conjugati a se stessi, ossia per cui passano i relativi S_{n-1} polari. Si può appunto poi verificare che per l' espressioni (XXIV)' delle coordinate di un elemento di $C^{(n)}$, esso appartiene ad $S_{n-1}^{(2)}$, perchè le coordinate dell' elemento stesso soddisfano alla (XX), che è l' equazione di $S_{n-1}^{(2)}$, che per brevità diremo la *quadrica direttrice della polarità* Π, nel caso adunque di n pari.

Risulta quindi in generale:

Gli S_{n-1} *polari di* n *elementi presi ad arbitrio in* $C^{(n)}$ *deter-*

Digitized by Google

minano un gruppo $G_x^{(n)}$ *loro comune intersezione, che è il polo del* $S_{n-1} = X_{n-1}$ *determinato dagli* n *elementi presi di* $C^{(n)}$.

E nel caso di n dispari:

Il polo $G_x^{(n)}$ *è contenuto nel* X_{n-1} *determinato dagli* n *elementi presi in* $C^{(n)}$.

10. Le coordinate ξ_r dell' S_{n-1} osculatore a $C^{(n)}$ nell' elemento $E_\theta^{(n)}$ di parametro θ, sono date dalle formole:

$$\text{(XXVIII)} \quad \begin{cases} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \ldots : \xi_{n+1} = \\ \theta^n : \binom{n}{1}\theta^{n-1} : \binom{n}{2}\theta^{n-2} : \ldots : 1 . \end{cases}$$

cosichè gli S_{n-1} osculatori nei vari elementi di $C^{(n)}$ sono a dirsi formare un sistema razionale $\Gamma^{(n)}$ di prima specie e della classe n, in quanto che per ogni gruppo $G_x^{(n)}$ preso arbitrariamente in S_n passano al più n S_{n-1} osculatori. Il sistema $\Gamma^{(n)}$ è dunque il sistema corrispondente, ossia *polare reciproco*, di $C^{(n)}$ nella polarità fondamentale Π. Dalle proprietà di $C^{(n)}$ potremo dedurre quelle di $\Gamma^{(n)}$ colla polarità Π: e viceversa.

Le $\binom{n}{2}$ equazioni:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

rappresentano altrettanti sistemi quadratici di gruppi, brevemente $\binom{n}{2}$ *quadriche* di S_n, che contengono ciascuna il sistema $C^{(n)}$; e del sistema algebrico di 1.ª specie formato da tutti i gruppi comuni ad $n-1$ delle quadriche stesse, fa parte dunque $C^{(n)}$, cosichè si può dire che $C^{(n)}$ è la *parziale intersezione di* n — 1 *di quelle quadriche.*

Correlativamente $\Gamma^{(n)}$ si può dire la parziale intersezione di $n-1$ fra le $\binom{n}{2}$ quadriche di Σ_n rappresentate dall' equazioni:

Digitized by Google

$$\text{(XXIX)} \qquad \frac{\binom{n}{1}\xi_1}{\xi_2} = \frac{\binom{n}{2}\xi_2}{\binom{n}{1}\xi_3} = \quad \ldots \quad = \frac{\binom{n}{1}\xi_{n-1}}{\binom{n}{2}\xi_n} = \frac{\xi_n}{\binom{n}{1}\xi_{n+1}} .$$

11. Due elementi $E^{(n)}_{\theta_1}$, $E^{(n)}_{\theta_2}$ di $C^{(n)}$ determinano un $S_1 = (\theta_1\,\theta_2)$ che si dirà una *corda* o *bisecante* della curva $C^{(n)}$; ed in generale $r-1$ elementi di $C^{(n)}$ di parametri $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_r$ $(r < n)$ determinano un S_{r-1} di S_n che si dirà un r — secante di $C^{(n)}$. Ora è subito visto che le $n-1$ equazioni locali:

$$\text{(XXX)} \qquad \begin{cases} \theta_1\theta_2 x_1 + (\theta_1+\theta_2)x_2 + x_3 = 0 \\ \theta_1\theta_2\theta_2 + (\theta_1+\theta_2)x_3 + x_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_1\theta_2 x_{n-1} + (\theta_1+\theta_2)x_n + x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

sono quelle della bisecante $(\theta_1\,\theta_2)$; e così le $n-2$:

$$\text{(XXX)'} \qquad \begin{cases} \theta_1\theta_2\theta_3 x_1 + \Sigma\theta_r\theta_s x_2 + \Sigma\theta_r x_3 + x_4 = 0 \\ \theta_1\theta_2\theta_3 x_2 + \Sigma\theta_r\theta_s x_3 + \Sigma\theta_r x_4 + x_5 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_1\theta_2\theta_3 x_{n-2} + \Sigma\theta_r\theta_s x_{n-1} + \Sigma\theta_r x_n + x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

sono quelle della trisecante $(\theta_1\,\theta_2\,\theta_3)$; e così si vede la legge con cui si possano scrivere le equazioni di un r — secante.

12. Se nelle XXX poniamo $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ otterremo l' equazioni locali

$$\text{(XXXI)} \quad \theta^2 x_1 + 2\theta x_2 + x_3 = 0 \quad \ldots \quad \theta^2 x_{n-1} + 2\theta x_n + x_{n+1} = 0$$

di un S_1 che unisce due elementi di $C^{(n)}$ che vengono a coincidere in un sol elemento di parametro θ. La bisecante S_1 dicesi perciò la *tangente* a $C^{(n)}$ nell' elemento $E^{(n)}_\theta$ di parametro θ. L'equazioni stesse sono anche quelle che danno le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il gruppo G^n_x contenga un elemento

Digitized by Google

E_θ della forma multiplo secondo $n-1$. Il luogo di questi gruppi è un sistema algebrico di 2.ª specie, luogo degli S_1 tangenti a $C^{(n)}$. Eliminando θ fra le equazioni del S_1 tangente in un elemento corrente $E_\theta^{(n)}$ di $C^{(n)}$, si otterranno $n-2$ sistemi algebrici di specie $n-1$ che contengono il sistema S_2 dei gruppi con un elemento $(n-1)^{plo}$.

Egualmente se nell' equazione della trisecante $(\theta_1\ \theta_2\ \theta_3)$ poniamo $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ otterremo l' equazioni:

$$\begin{aligned}
&\theta^3 x_1 + \theta^2 x_2 + \theta x_3 + x_4 = 0\\
&\theta^3 x_2 + \theta^2 x_3 + \theta x_4 + x_5 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\theta^1 x_{n-2} + \theta^2 x_{n-1} + \theta x_n + x_{n+1} = 0
\end{aligned}$$

di una trisecante di $C^{(n)}$ i cui tre elementi $E_{\theta_1}^{(n)}\ E_{\theta_2}^{(n)}\ E_{\theta_3}^{(n)}$ vengono a coincidere in un solo elemento $E_\theta^{(n)}$ di $C^{(n)}$, e che perciò diremo trisecante osculatrice in $E_\theta^{(n)}$ a $C^{(n)}$. Anche qui l'equazioni della trisecante osculatrice non sono altro che le condizioni perchè il gruppo $G_x^{(n)}$ abbia l' elemento E_θ di parametro θ multiplo secondo $n-2$. Tutti i gruppi $G_x^{(n)}$ che hanno un elemento $(n-2)^{plo}$ formano un spazio algebrico S_3 di 3.ª specie contenente S_2 e che è la parziale intersezione degli $n-3$ spazi algebrici di specie $n-1$ le cui equazioni si ottengono eliminando θ dall' equazioni della trisecante osculatrice: e così via.

13. Per trovare gli spazi algebrici $C^{(n)}, S_2, S_3 \ldots S_{n-1}$ formati dai gruppi che hanno rispettivamente un elemento n^{plo}, $(n-1)^{plo}$, $(n-2)^{plo}\ldots$ finalmente multiplo secondo due (o doppio) si può procedere in ordine inverso: se cioè sia:

$$\text{(a)}\quad f(x) = x_1 X_1^n + \binom{n}{1} x_2 X_1^{n-1} X_2 + \ldots + \binom{n}{1} x_n X_1 X_2^{n-1} + x_{n+1} X_2^n = 0$$

ossia

$$\text{(b)}\qquad f(\theta) = x_1 \theta^n + \binom{n}{1} x_2 \theta^{n-1} + \ldots + \binom{n}{1} x_n \theta + x_{n+1} = 0$$

Digitized by Google

l' equazioni in coordinate omogenee o nel parametro θ di un gruppo $G_x^{(n)}$, ed in essa si riguardano le X_1 X_2 o θ come coordinate o parametro di un elemento fisso E_θ della forma elementare f, allora l' equazione (a) o (b) rappresenta al variare delle x_r l' S_{n-1} di S_n formato dai gruppi che contengono l' elemento E_θ semplicemente; e questo S_{n-1} è anche quello che contiene il gruppo formato dall' elemento E_θ contato n volte ed è l' S_{n-1} osculatore a $C^{(n)}$ in quel gruppo $E_\theta^{(n)}$.

L' equazioni

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial f(X)}{\partial X_2} = 0$$

ossia:

$$\theta^{n-1} x_1 + \binom{n-1}{1} \theta^{n-2} x_2 + \ \dots \ \binom{n-1}{1} \theta x_{n-1} + x_n \ = 0$$

$$\theta^{n-1} x_2 + \binom{n-1}{1} \theta^{n-1} x_3 + \ \dots \ \binom{n-1}{1} \theta x_n + x_{n+1} = 0$$

rappresenteranno in modo analogo l' S_{n-2} luogo dei gruppi che contengono l' elemento E_θ come elemento doppio, ed in particolare l' S_{n-2} osculatore in $E_\theta^{(n)}$ a $C^{(n)}$. Eliminando θ fra l' equazione scritta si ottiene l' equazione dello spazio algebrico $S_{n-1}^{2(n-1)}$ di specie $n-1$, che è formato da gruppi con un elemento doppio. L' equazione stessa non è altro che quella che si ottiene dall' eguagliare a zero il discriminante D della forma $f(x)$, che è di grado $2(n-1)$ nei coefficienti x_r o coordinate del gruppo $G_x^{(n)}$; dunque S_{n-1} *è uno spazio algebrico dell' ordine* $2(n-1)$; *esso ha cioè in comune con un* S_1 *arbitrario* $2(n-1)$ *gruppi al più: ed è il luogo degli* S_{n-2} *osculatori nei vari elementi di* C_n.

14. In modo analogo si può proseguire per la ricerca degli spazi $S_{n-2}, S_{n-3} \dots S_2$ di specie $n-2, n-3, \dots 2$, formati dai gruppi che hanno un elemento triplo quadruplo ... $(n-1)^{plo}$. Uno qualunque S_{n-r} dei detti spazi algebrici contiene tutti gli altri di specie inferiore; e tutti contengono quello $C^{(n)}$ di prima

Digitized by Google

specie formato da gruppi che hanno un elemento n^{plo}. Non sarebbe certamente priva di interesse l' esposizione delle proprietà projettive principali degli spazi algebrici S_{n-r}, ma ci dilungheremo troppo dal nostro scopo pel quale occorre, come vedremo, la considerazione dei soli spazi S_{n-1}, di cui è già dato l'ordine; e di $C^{(n)}$. Fermiamoci in particolare su $C^{(n)}$. L' equazioni di condizione perchè un gruppo $G_x^{(n)}$ abbia un elemento E_θ multiplo secondo n (ossia si riduca a quel elemento contato n volte) sono, come abbiamo già ritenuto:

$$\frac{\partial^{n-1} f(X)}{\partial X_1^{n-1}} = 0 \quad \frac{\partial^{n-1} f(X)}{\partial X_1^{n-2} \partial X_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial^{n-1} f(X)}{\partial X_2^{n-1}} = 0$$

ossia, in coordinate omogenee:

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 = 0 \quad x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0 \quad \ldots \quad x_n X_1 + x_{n+1} X_2 = 0,$$

e nel parametro θ:

$$\text{(c)} \qquad \theta x_1 + x_2 = 0 \quad \theta x_2 + x_3 = 0 \quad \ldots \quad \theta x_n + x_{n+1} \equiv 0,$$

Le (c) rappresentano al variare di θ da $-\infty$ a $+\infty$ n stelle di 1.ª specie, che diremo brevemente *fasci* di S_{n-1}, aventi rispettivamente per sostegno gli S_{n-2} fondamentali rappresentati dalle coppie di equazioni

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ ; \ x_2 = 0 \ x_2 = 0 \ ; \ \ldots \ x_n = 0 \ , \ x_{n+1} = 0.$$

Gli n fasci sono a due a due in corrispondenza projettiva essendo corrispondenti due S_{n-1} determinati dallo stesso valore del parametro θ. La curva $C^{(n)}$ è il luogo dei gruppi in cui si tagliano i sistemi di n S_{n-1} corrispondenti negli n fasci projettivi. Inoltre osserviamo che $C^{(n)}$ contiene i due gruppi fondamentali G_1 e G_{n+1}, cioè di coordinate $(1, 0 \ldots 0)$, $(0 . 0 \ldots 1)$ in S_n; perchè questi sono composti di un elemento E_∞ , E_0

Digitized by Google

contato n volte. Gli S_{n-1} delle stelle $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$ di specie $n-1$ aventi per centri i gruppi G_{n+1} , G_1 sono quelli dati rispettivamente dall' equazioni

$$(d) \quad \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ \dots \ + \lambda_n x_n \ = 0 \\ \lambda_1 x_3 + \lambda_3 x_3 + \ \dots \ + \lambda_n x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

al variare delle λ_r; e similmente gli S_1 delle stelle stesse sono quelli rappresentati allo stesso modo dall' equazioni:

$$(e) \quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{\lambda_1} = \dfrac{x_2}{\lambda_2} = \ \dots \ \dfrac{x_n}{\lambda_n} \\ \dfrac{x_2}{\lambda_1} = \dfrac{x_3}{\lambda_2} = \ \dots \ \dfrac{x_{n+1}}{\lambda_n} \end{cases}$$

Le due stelle $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$ sono riferite fra loro projettivamente in modo determinato essendo corrispondenti fra loro due S_{n-1} o due S_1 determinati dallo stesso sistema di valori attribuiti λ_r. Due S_1 corrispondenti delle due stelle essendo $(n > 2)$ non hanno in generale alcun gruppo comune. Eliminando dalle (c) le λ_r si ottengono le relazioni:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ \dots \ \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

che debbono aver luogo fra le coordinate x_r di un gruppo comune a due S_1 corrispondenti: dunque: *il luogo dei gruppi comuni a coppie di* S_1 *corrispondenti nelle due stelle projettive* $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$ *è la curva normale* $C^{(n)}$ *di* S; cioè il sistema razionale di prima specie formato dai gruppi di un solo elemento di f contato n volte.

15. Dati i gruppi fondamentali G_1 , G_2 ... G_{n+1} ed il gruppo unità G_0 resta determinata la corrispondenza projettiva fra le due stelle $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$ e quindi $C^{(n)}$. Sono infatti corrispondenti le n coppie

Digitized by Google

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ ; \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0 \ ; \ \ldots \ x_n = 0 \ , \ x_{n+1} = 0$$

di S_{n-1} delle stelle, le quali coppie sono determinate dai gruppi fondamentali G_r e si possono indicare con:

$$\begin{array}{ll} G_{n+1}\,(G_2\,G_3\,\ldots\,G_n) & G_1\,(G_3\,G_4\,\ldots\,G_{n+1}) \\ G_{n+1}\,(G_1\,G_3\,\ldots\,G_n) & G_1\,(G_2\,G_4\,\ldots\,G_{n+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n+1}\,(G_1\,G_2\,\ldots\,G_{n-1}) & G_1\,(G_2\,G_3\,\ldots\,G_n), \end{array}$$

fra le due parentesi essendosi posti i gruppi che insieme al centro della stella determinano l' S_{n-1}.

Di più sono corrispondenti gli S_1 determinati dai centri delle stelle e dal gruppo G_0 unità, che si possono indicare quindi con $G_{n+1}\,G_0$, $G_1\,G_0$ . . e G_0 è appunto un elemento di $C^{(n)}$. Ma questa generazione di $C^{(n)}$ ci dice che ogni S_{n-2} comune a due S_{n-1} corrispondenti delle due stelle projettive è una $n-1$ secante di $C^{(n)}$. Infatti gli S_1 corrispondenti delle due stelle situati nei due S_{n-1} corrispondenti nelle stelle stesse segnano sul S_{n-2} intersezione dei due S_{n-1} corrispondenti, le coppie di gruppi corrispondenti in una determinata omografia nell' S_{n-2} stesso, i cui $n-1$ gruppi uniti sono evidentemente $n-1$ gruppi di $C^{(n)}$, poichè in ciascuno di essi si taglia una coppia di S_1 corrispondenti nelle due stelle projettive $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$.

16. Anche gli S_{n-2} fondamentali che insieme agli S_1: $G_{n+1}\,G_0$, $G_1\,G_0$ determinano le projettività delle due stelle sono dunque $n-1$ secanti di $C^{(n)}$.

Osserviamo poi che una sostituzione lineare binaria, cioè sulle coordinate degli elementi della forma f elementare assunta, cangia in sè stessa la curva $C^{(n)}$ cangiando così in sè stesse le sue generazioni projettive con due stelle projettive di specie $n-1$ aventi i centri in due punti di essa; oppure con un sistema

Digitized by Google

di n fasci di S_{n-1} a due a due projettivi i cui sostegni sono altrettante $n-1$ secanti di $C^{(n)}$.

Se noi introduciamo la locuzione che *projettare da un* S_p *un gruppo qualunque di* S_n, *vuol dire costruire l'* S_{p+1} di S_p *e del gruppo,* possiamo dire:

Se da due $(n-1)$ *— secanti di* $C^{(n)}$ *projettiamo un gruppo variabile di essa, si ottengono due fasci projettivi di* S_{n-1}. *Se da due gruppi qualsiasi di* $C^{(n)}$ *projettiamo altri* $n+1$ *gruppi di essa otteniamo* $n+1$ *coppie di* S_1 *che determinano una corrispondenza projettiva nelle due stelle di specie* $n-1$ *aventi i centri nei due gruppi* **centri** *di projezione; e, in quella corrispondenza,* $C^{(n)}$ *è il luogo dei gruppi in cui si tagliano coppie di* S_1 *corrispondenti nelle due stelle.*

Segue ancora.

La curva $C^{(n)}$ *è determinata da* $n+3$ *dei suoi elementi.*

Queste sono le sole proprietà che per noi importa notare della curva $C^{(n)}$. Aggiungendo alla operazione della projezione quella della sezione, cioè che tagliare un S_p con un S_{n-1} vuol dire determinare l'S_{p-1} loro comune, estendendo inoltre in modo analogo le operazioni suddette ad un S_k di S_n, per ciò che precede si vede subito che due spazi lineari che si deducano l'uno dall'altro con le operazioni della projezione e della sezione sono projettivi, cioè le operazioni stesse danno una corrispondenza fra gli elementi dei due spazi, rappresentabile con una sostituzione lineare. Di ciò appunto noi abbiamo fatto già uso per dimostrare che ogni S_{n-2} intersezione di due S_{n-1} corrispondenti nelle due stelle projettive $(G_{n+1})_{n-1}$, $(G_1)_{n-1}$ è una $n-1$ — secante di $C^{(n)}$. E colla definizione geometrica delle forme projettive di S_n, si potrebbero dedurne tante altre proprietà di $C^{(n)}$, indipendentemente da ogni rappresentazione analitica. Pel nostro scopo bastano le proprietà enunciate.

Digitized by Google

§ 4. — **Involuzioni.**

Le cose dette sugli *iper-spazi* lineari S_p di S_n si possono porre sotto altra forma. Sia perciò:

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \quad \dots \quad + \xi_{n+1} x_{n+1} = 0$$

l'equazione di un S_{n-1} di S_n. Se chiamiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ i parametri degli elementi di un gruppo corrente $G_x^{(n)}$ di S_n, allora si vede subito che i gruppi $G_x^{(n)}$ sono quelli per i quali i parametri λ_r degli elementi soddisfano all'equazione:

$$\text{(I)} \quad \xi_{n+1} \lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n - \frac{1}{\binom{n}{1}} \xi_n \Sigma \lambda_{t_1} \lambda_{t_2} .. \lambda_{t_{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} \xi_{n-1} \Sigma \lambda_{t_1} \lambda_{t_2} .. \lambda_{n-2} - .. \pm \xi_1 = 0$$

od anche

$$\text{(I)}' \quad \xi_1 - \frac{1}{\binom{n}{1}} \xi_2 \Sigma \lambda_r + \frac{1}{\binom{n}{1}} \xi_3 \Sigma \lambda_r \lambda_s - .. \pm \xi_{n+1} \lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n = 0$$

In altri termini i gruppi di un S_{n-1} sono quelli per i quali i parametri degli elementi dei gruppi stessi debbono soddisfare ad un'equazione lineare e simmetrica rispetto ai parametri stessi; per ciò i gruppi di un sistema lineare S_{n-1} di specie $n-1$ si dicono formare i gruppi di elementi conjugati di un *involuzione di grado* n e di *specie* n — 1 di elementi della forma elementare f assunta, generalizzando con ciò il concetto dell'ordinaria involuzione nel caso di $n = 2$. Egualmente poi si dice in generale che i gruppi di un S_p $(p > n)$ di S_n, cioè i gruppi di un sistema lineare di specie p in S_n, formano i gruppi degli elementi conjugati di un involuzione di specie p e di grado n. Il grado di un involuzione non è altro che il numero degli elementi (conjugati) di un suo gruppo; la specie è quella del sistema lineare formato dai gruppi stessi.

Trattando ora delle involuzioni formate con gruppi di S_n, queste si sottintendono del grado n.

Digitized by Google

2. Ciò posto, per ciò che precede risultano sulle involuzioni i seguenti teoremi:

Un involuzione di specie h ($h < n$) *è determinata da* h + 1 *dei suoi gruppi di elementi conjugati*

Se siano

$$f_r(x) = 0 \qquad (r = 1 . 2 \quad \ldots \quad k+1)$$

l'equazioni degli h + 1 *gruppi, sarà*

$$\text{(II)} \qquad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \quad \ldots \quad + \lambda_{h+1} f_{h+1} = 0$$

l'equazione di un altro gruppo qualunque dell' involuzione stessa.

Le involuzioni di specie h formano un sistema algebrico (non lineare) della specie $(n-h)(h+1)$. Quelle di specie $n-1$ formano un sistema lineare Σ_n di specie n.

Un involuzione di specie n — 1 *contiene gruppi che si riducono ad un elemento contato* n *volte; questi elementi formano un gruppo algebrico dell' ordine* n: cioè *un involuzione di specie* n — 1 *contiene* n *gruppi formati da un sol elemento contato* n *volte; oppure si dice brevemente che essa contiene* n *elementi* n^{pli}.

Un involuzione di specie n — 1 *è il luogo dei gruppi armonici al gruppo dei suoi elementi* n^{pli}.

Gli n *elementi* n^{pli} *di un involuzione formano un gruppo dell' involuzione stessa per* n *dispari; quando* n *è pari esiste un sistema quadratico di involuzioni che godono di tale proprietà.*

3. Due involuzioni di specie $n-1$ si dicono *armoniche* se i gruppi dei loro elementi n^{pli} si dividono armonicamente.

Nel caso di $n = 2$ ossia dell' involuzione ordinaria (quadratica), la condizione perchè due involuzioni siano armoniche è che l' omografia ottenuta cercando il corrispondente di ogni elemento della forma f, nelle due involuzioni, sia una nuova involuzione, o, ciò che è lo stesso, la condizione necessaria è sufficiente perchè due involuzioni quadratiche siano armoniche e che ad una coppia $E_a E_b$ di elementi corrispondano nelle due involuzioni gli stessi elementi soltanto fra loro permutati.

Digitized by Google

In generale possiamo dire che due involuzioni di specie $n-1$ sono armoniche quando gli elementi $n^{p_{li}}$ dell' una formano un gruppo di elementi conjugati dell' altra.

La relazione di condizione fra le coordinate dei gruppi degli elementi $n^{p_{li}}$, affinchè due involuzioni (di grado n e di specie $n-1$) siano armoniche è quella stessa che lega due gruppi conjugati nella polarità fondamentale Π di S_n. Notiamo poi che fra le involuzioni di specie $n-1$ ve ne è un sistema di speciali, i cui elementi $n^{p_{li}}$ coincidono in un sol elemento; e tali involuzioni saranno dette *paraboliche* come nel caso di $n=2$. Ogni sistema di $n-1$ elementi della forma f coll' elemento $n^{p_{lo}}$ determina un gruppo di elementi conjugati dell' involuzione. Due involuzioni della stessa specie (anche di grado diverso) possono essere riferite projettivamente fra loro; e l' equazioni

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \quad \dots \quad + \lambda_{h+1} f_{h+1}(x) = 0$$

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \quad \dots \quad + \lambda_{h+1} \varphi_{h+1}(x) = 0$$

possono essere quelle di due gruppi corrispondenti per gli stessi valori delle λ_r. In particolare poi le involuzioni di prima specie potranno essere riferite projettivamente fra loro ed agli elementi di una forma elementare di 1.ª specie. Dicendo appunto rapporto armonico di 4 quattro gruppi di un involuzione di 1.ª specie quello dei loro parametri, quel rapporto anarmonico non è altro quello degli elementi corrispondenti di una forma elementare projettiva alla data involuzione di 1.ª specie. Delle involuzioni di grado e specie qualunque vi sono molti altri importanti proprietà, già note, e che qui non riportiamo perchè sono più che sufficienti quelle date allo scopo che noi ci proponiamo.

F. Aschieri.

Digitized by Google

LIBELLUS

DE CONSERUANDA SANITATE OCULORUM

DI

MAGISTER BARNABAS DE REGIO

Nella corrispondenza Tiraboschiana che si conserva tra i MSS. della preziosa Biblioteca Estense di Modena (1), richiamò la mia attenzione la lettera colla quale il Morelli, da Venezia, li 2 giugno 1781, informava il Tiraboschi, a Modena, dell' avere Egli trovato fra i codd. del fondo Zeno un codice di Magister Barnabas de Regio, contenente due opuscoli, uno *de conseruanda sanitate,* e l' altro, *de conseruanda sanitate oculorum,* nei termini seguenti: " .... Invece Le darò „ notizia di un altro codice Zeniano, che, o Le riesca nuovo „ ciò che vi si contiene, o ne abbia dalla mia relazione più „ chiara notizia, mi pare non dovernela tenere celato „.

Il rimanente della lettera, riguardante la descrizione del codice, è pubblicato per intero nella Biblioteca Modenese del

---

(1) Codice Estense, MS. XI. D. 21. Forma parte della corrispondenza (originali) del Tiraboschi (Tom. IV della lettera M). Contiene, fra altre, lettere di Jacopo Morelli ordinate cronologicamente.

Digitized by Google

Tiraboschi al capitolo Magister Barnaba da Reggio (1). Non sembra però che il Tiraboschi rimanesse pienamente soddisfatto di questa notizia, scrittagli il 2 giugno 1781, perchè dopo due settimane, ossia, in una lettera responsiva delli 16 giugno 1781 (che nella filza segue immediatamente la precedente), il Morelli gli scrive: " Della dedicatoria di quel Barnaba da Reggio a „ Simone da Correggio niente v' ha d' importante, oltre quello „ che le ho scritto; e mi pare anzi di avernele mandata copia „ di tutta la Lettera ch' è breve „. Questo, come è naturale fece nascere in me il desiderio di conoscere il Manoscritto originale che trovavo citato nel catalogo del Valentinelli (2); e però

---

(1) Biblioteca Modenese, o notizie della Vita e delle Opere degli scrittori natii degli Stati del Serenissimo Signor Duca di Modena raccolte e ordinate dal Cav. Ab. Girolamo Tiraboschi. Tomo IV, *Modena*, Società Tipografica, MDCCLXXXIII.

Cfr., pp. 330-331, la seguente descrizione del Codice data dal Morelli: *Il Codice è membranaceo del secolo XIV e contiene due opere di Medicina d'Autore Regiano: il principio ne è questo.* « Incipit Libellus de conservanda sanitate aggregatus ex dictis Sapientum Medicinæ per Magistrum « Barnabam de Regio. *La dedicatoria* « Magnæ Nobilitatis & potentiæ Viro Domino Simoni de Cor- « rigia suo Domino speciali Barnabas de Riathinis Reginus Artium & Physicæ dictus Magister salutem, « & prosperos ad vota successus. Quia nobilitati vestræ placuit velle meum habere consilium ad sani- « tatem vestri corporis conservandam, laboravi sollicite, & cum affectu serviendi vobis, ex dictis « Sapientum Medicinæ collegi quosdam flores, ex quibus præsentem libellum composui, quasi vobis « quotidie manualem &c. » *L'Opera comincia:* « Quia sanitas conservatur in corpore sano per aerem « &c. » *Il Trattato, ch'è breve, è già composto colle dottrine degli Arabi, più che con altre; ed alla fine ha queste parole.* « Finitum fuit hoc opus Mantuæ per prædictum Magistrum Barnabam « de Regio sub M. trecentesimo XXXI. die XV. Mensis Octobris ad Laudem Dei Omnipotentis Amen » *Segue l'altra opera intitolata* « Libellus de conservanda sanitate oculorum ». *La dedicatoria dice così* « Quem quator virtutum Cardinalium corona circumdat, Reverendo in Christo Patri & Domino « Domino Beltrando de Sancto Genesio Dei & Apostolicæ Sedis gratia Aquiligiensi Patriarchæ dignis- « simo suus Barnabas Reginus qualis qualis Artium & Physicæ dictus Professor sanitatem hominis « utriusque. Quia non est census super censum salutis corporis » &c. *L'Opera comincia* « Girum cœli « fecit Deus » *È cosa più breve dell'opera precedente, e d'eguale merito, ed alla fine ha* » Finio « ergo hic præsens opusculum ad laudem Dei Omnipotentis & Beatissimæ Virginis Mariæ sub mille- « simo CCC. XL. die prima Aprilis Ven. (f. Venetiis) ».

(2) Bibliotheca Manuscripta ad S. Marci Venetiarum — Digessit et Commentarium addidit Joseph Valentinelli Præfectus — (Codices Mss. Latini) — Tom. V *Venetiis*. Ex Typographia Commercii, MDCCCLXXII.

A pag. 125 e seg., il Codice è così descritto:

Cod. 53 membr., saec. XIV, a. 274, l. 200 [L. VII, XXXIV]. Z.

I. *Libellus de conservanda sanitate, aggregatus ex dictis sapientum medicinae, per magistrum Barnabam de Regio.* Tractatus sex. Dedicatio: « Magnae nobilitatis et potentiae viro Simoni de Co- « rigia, suo domino speciali Bernabos de Riathinis, regiminis artium et physicae dictus magister, salu-

Digitized by Google

chiesi ed ottenni il prestito del codice della Marciana alla Estense, dove ne trascrissi la seconda parte quella cioè riguardante la sanità degli occhi. Mi accingo ora a pubblicare per le stampe (1) questa seconda parte, non tanto per l'importanza scientifica del lavoro, il quale è solamente un accozzamento scolastico di aforismi, di sentenze e di pregiudizii intorno al tema, ricavati per la maggior parte da diversi autori (2) e preceduto da una descrizione primitiva ed ingenua dell'occhio, senza che risulti dall'insieme, per Magister BARNABAS de Regio, una nota individuale spiccata, quanto per mettere in luce un documento riguardante la storia della igiene oculare.

Non ho trovato cenno di Magister BARNABAS nè della sua opera, nelle Storie della Medicina di SPRENGEL, PUCCINOTTI e DE-RENZI e neppure nel recente " Biographisches Lexikon der hervorragenden Aerzte aller Zeiten und Völker „ del Prof. D.r Augusto HIRSCH di Berlino.

« tem et prosperos ad vota successus . . . ». Cap. primum primi tractatus: « Quia sanitas conservatur « in corpore sano per aerem, exercitium, cibos et potus. . . », f. 1-20.

Auctor, praeceptis his, favit Simoni, *volenti meum habere consilium ad sanitatem vestri corporis conservandam*. Sub fine haec leguntur: « Finitum fuit hoc opus Mantuae per praedictum magi- « strum Barnabam de Regio. sub millesimo tecentesimo et XXXI, die XV mensis octobris. . . ».

II. *Libellus de conservanda oculorum sanitate, aggregatus per magistrum Barnabam de Regio.* Dedicatio: « Quem quatuor virtutum cardinalium corona circumdat, reverendo in Christo patri et dom. « dom. Beltrando de Sansto Genesio, Dei et apost. sedis gratia, aquileiensi patriarchae dignissimo . . . »; proemium autem: « Girum coeli fecit Deus et terram posuit in puncto . . . ». f. 23-31.

Extremo folio: « Finio ergo hic. praesens opusculum ad laudem ec. . . . . sub millesimo CCCXL. « die prima aprilis, Ven. ».

(1) Dal catalogo dei codd. lat. della Marciana del VALENTINELLI, non risulta che questo Codice del BARNABAS sia stato pubblicato; e secondo quanto ebbe la bontà di scrivermi il chiariss.mo Prof. Carlo CASTELLANI Prefetto della Marciana, non consta neppure che esso sia stato oggetto di studio o di pubblicazione dopo la stampa dell'opera del VALENTINELLI.

(2) Fra gli autori più frequentemente citati notansi GALENO, AVICENNA, MESUE, AVENZOAR, JOHANNITIO [HONEIN BEN ISHAK]. Tanto il nome degli autori citati, come parecchie altre parole di facile interpretazione, scritte scorrettamente nel testo, riproduco genuinamente nella stampa per allontanarmi meno dall'originale.

Digitized by Google

Peraltro nell' opera del Tacoli (1) intorno alle famiglie nobili di Reggio, è citato un tal Magister Martino De Riatinis del secolo XIV.

La famiglia adunque De Riatinis, omonima (se pure non la stessa) di quella del Magister Barnabas, esisteva in Reggio al tempo in cui il Barnabas scriveva i due trattati del Codice, cioè nel 1331 e 1340; e le persone alle quali furono dedicati i due trattati, ossia Simone da Correggio e Beltrando di San Genesio, vivevano pure in quel tempo come risulta dal Litta (2) e dal Gams (3).

In fine, nel " Catalogus Medicorum Regiensum „ del Dottor Antonio Trolli, del secolo scorso, che si conserva autografo nella Biblioteca Civica di Reggio, secondo quanto mi comunicano il Chiar.mo Bibliotecario Reggiano D. G. Roacchi ed il Chiar.mo Prof. A. Catelani, si legge:

" 1449. *Magister Barnabas de Riatinis Phisicæ Doctor* —
„ D.s *Magister Barnabas de Riatinis Doctor Phisicæ Civis Re-*
„ *giensis* qui nunc moratur in Civitate Venetiarum fecit D.
„ Paulum della Fossa Bertolinum de Collegariis, Joannem ejus

---

(1) Compendio delle diramazioni, o siano discendenze.... della Casa Tacoli. In oltre alcune memorie Storiche della Città di Reggio. — *Reggio.* Per L. Vedrotti MDCCXLII pp. VIII e 628 in *fol.*

Cfr. pag. 466.

Parte seconda d'alcune memorie storiche della città di Reggio Lombardia... Il tutto raccolto dal Conte Niccola Tacoli... — *Parma.* Eredi di Paolo Monti MDCCXLVIII, pp. VI e 784 in *fol.*

Cfr. pag. 66.

(2) Litta. — Famiglie celebri d' Italia. — *Milano.* Presso Paolo Emilio Giusti MDCCCXIX.

Cfr., in Vol. III; Famiglia Da Correggio; Tav. II.

(3) Series Episcoporum Ecclesiae catholicae, quotquot innotuerunt a Beato Petro Apostolo. A multis adjutus edidit P. Pius Bonifacius Gams. O. S. B.

Ratisbonae, Typis et Sumtibus Georgii Josephi Manz. 1873, pp. XXIV e 963 in 4.° Precedono frontispizio e prefazione senza numerazione.

Cfr. pag. 774, col. 2 (nel Capitolo *Aquileja*).

Digitized by Google

„ nepotem, et Gherardinum de Alexandrinis Notarium *absentes* „ " *ad causas* „ et ad alia in Instrumento contenta.... Rogitu „ Raphaellij de Thomasellis „.

Della dimora poi di M. BARNABAS a Venezia, trovansi notizie nelle eruditissime memorie dell'ALVISI (1) e del CECCHETTI (2), dalle quali, secondo documenti estratti particolarmente dai registri delle *Grazie* del Maggior Consiglio, si rileva che il BARNABA " Maestro *conventatus* in fisica e filosofia; 1334, 11 febbraio m. v., ... proposto con L. 10. —; approvato negli anni 1335, 1338, 1341, 1343, 1350, 1352, 1353; „ sarebbe morto nell'anno 1365.

---

(1) Considerazioni documentate sull'arte medica, e sul personale Sanitario di Venezia dal X al XV secolo. Lettura fatta nell'Agosto 1857 nella Sala dell'Archivio Generale di Venezia dal Dott. G. G. ALVISI. — In: *Giornale Veneto di Scienze Mediche*, Tom. XI, Ser. II, pagg. 463-500. *Venezia* Tipografia Andreola, 1858.

(2) La Medicina a Venezia nel 1300 (dalla « Vita dei Veneziani, nel secolo XIV »). — In: *Archivio Veneto* (Nuova Serie), Tom. XXV, pp. 361-381 e Tom. XXVI, pp. 77-111 e 251-270. *Venezia*, Tip. del Commercio di Marco Visentini 1883.

Cfr: Tom. XXV, p. 369; Tom. XXV, pagg. 80 ed 87.

Digitized by Google

DESCRIZIONE DEL MS.

Codice membranaceo del Secolo XIV. Misura del foglio: a. 271cm, l. 200cm. (Erra il VALENTINELLI mettendo a. 274). Di fogli 32 più una guardia infine non numerata, il quale (foglio di guardia) consiste in un frammento di altro codice, pure del Sec. XIV, di cui fu rasa la scrittura. Legato in assi. Nell'interno dell'asse anteriore, ricoperto di pergamena antica lineata, sta incollato l'*ex-libris* APOSTOLI ZENI. Sul *recto* del primo foglio fu incollata la descrizione del VALENTINELLI tratta dal catalogo. Nel *verso* di questo stesso foglio è l'indice dei due trattati di BARNABA contenuti nel codice ed il bollo della Biblioteca di S. Marco; ed a fol. 2a incomincia il primo di essi colle parole: LIBELLUS DE CONSERUANDA SANITATE AGGREGATUS ecc.

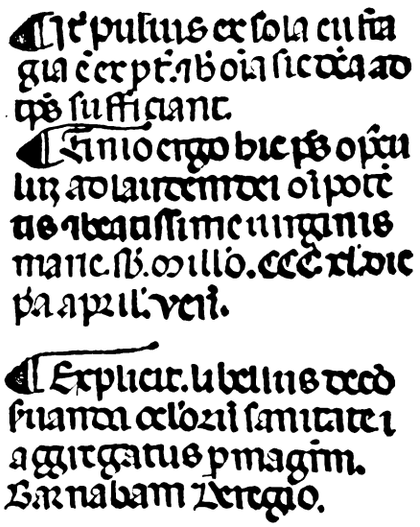
Le rubriche dei capitoli e dei libri sono in rosso ed alternatamente rosse ed azzurre sono le iniziali ed i paraffi. Scritto a due colonne; linee 31 per colonna piena. Le iniziali maggiori dei due trattati mancano e fu per essi lasciato lo spazio dall'amanuense.

Il primo trattato termina a fol. 20b colonna 1; bianchi sono i due fogli 21 e 22 intermedi fra i due trattati.

A fol. 23a col. 1 ha principio il secondo trattato il quale termina a fol. 31a col. 2 Bianchi il fol. 31b e tutto il fol. 32.

Nell'interno dell'asse posteriore, ricoperto anch'esso di un'antica pergamena, di cui fu rasa la precedente scrittura, trovansi scritte pure di mano del Sec. XIV, ma diversa da quella del codice, alcune sentenze e precetti latini.

In fine dei quaderni trovasi il richiamo al quaderno successivo. I quaderni constano di quattro fogli. Il codice è composto di due quaderni, un terno, un quaderno, e di due fogli per fine. Il conto torna, meno la guardia ultima e la guardia prima che non sono comprese nella numerazione. La numerazione del codice è per fogli ed è posta in alto nell'angolo superiore a destra, è di carattere, probabilmente, di mano del Sec. XVIII ed è scritta con numeri arabici. Il foglio (la guardia) anteriore non è numerata, come pure il foglio (la guardia) posteriore. Numerazione verificata esatta. Sono bianchi i fogli 21, 22 e 32. Il *libellus de conseruanda sanitate oculorum* incomincia fol. 28a e finisce fol. 31a. Unisco un fac-simile in foto-zincotipia delle ultime linee e dell'*explicit* (1). Nel capitolo *De coloribus Oculorum* (fol. 25a col. 1) si nota che una correzione, aggiunta in calce dall'amanuense, fu poi raschiata.



La legatura, in grosse assi, ricoperta originariamente di pelle cinerea è lacerata in parte e tarlata. Le solcature ed i canali prodotti dai tarli si estendono e penetrano anche nel legno.

Restano tuttora nell'asse anteriore le borchiette degli antichi fermagli. Il dorso fu poi ricoperto di carta, la quale, anch'essa lacerata, lascia scoperta in alcuni tratti la pelle sottostante.

Il peso totale del codice, contenente i due opuscoli, è di grammi 875.

---

(1) Nella seduta della R. Accademia delli 3 aprile 1895 vennero da me presentate e la trascrizione del codice e la fotografia dell'intero fol. 31 *recto*.

Digitized by Google

Incipit libellus de conseruanda sanitate oculorum.

Epistola.

fol. 23ª, col. 1. ‖ [Q]uem [*sic*] quatuor uirtutum cardinalium corona circondat reuerendo in xpo patri et domino domino Beltrando de Sancto Genesio dei et apostolice sedis gratia Aquiligiensi patriarce dignissimo Suus Barnabas Reginus qualisqualis arcium et physice dictus professor sanitatem hominis utriusque ℂ Quia non est census super censum salutis corporis, secundum sententiam Salomonis, optans uestri corporis sanitatem et maxime eius partis sine qua nil iocundum uel delectabile sed totum obscurum uel tenebrosum corpus existit proposui iamdiu aggregare uobis ea, quibus mediantibus, uisum incolumen poteritis conseruare, premissa semper dei gratia et uirtute. Dignemini igitur, reuerende pater, hoc presens opusculum acceptare, si placet, ut, si non incumbat uobis ejusdem necessitas, in mei honorem pocius conuertatur.

Prohemium.

fol. 23ª, col. 2. ‖ Girum celi fecit Deus et terram posuit in puncto, et hominem de terra formauit. Inde dictus est homo ab humo quod est terra; fecitque illum deus ad ymaginem et similitudinem suam ecclesiastici XVIJ capitulo. ℂ Hoc etiam apparet per damascenum dicentem quod ex uisibili et inuisibili natura creauit deus hominem propriis manibus secundum ymagynem et similitudinem suam. ℂ Fecit autem Deus ipsum hominem rectum et non alia animalia, quod apparet per philosophum in de Somno et uigilia, dicit enim quod solum animalium rectum est homo. ℂ Et sapiens dixit solummodo hoc: inueni quod deus fecit hominem rectum. Bene ergo dictus est homo antrophos, idest, sursum erectus. ℂ Et hoc quod dicit Galienus quarto, quod de juuamentis membrorum. dicit enim quod quia homo est princeps et rex omnium animalium, fuerunt ipsa demissorum capitum apud eum: ipse uero est solus capitis eleuati. ℂ Unde poeta dixit: Pronaque cum spectent animalia cetera terram. Os homini sublime dedit celumque uidere Iussit et erectos ad sidera tollere uultus. ‖ Figura igitur homo distat a brutis. ℂ Distat enim dignitate, quod apparet per philoso- fol. 23ᵇ, col. 1.

Digitized by Google

phum in libro de animalibus, dicentem quod dignissima creaturarum est homo. ℭ Item homo distat nobilitate. dicitur enim ibidem, quod homo est nobilissimum animalium. ℭ Item distat ab eis potestate et excellentia et honore, secundum quod dicitur in psalmo: Minuisti eum paulo minus ab Angelis, gloria et honore coronasti eum, domine, et constituisti eum super opera manuum tuarum. Omnia subiecisti sub pedibus eius, oues et boues et uniuersa peccora [*sic*] campi. uolueres celi et pisces maris. ℭ Figura igitur, nobilitate, dignitate, potestate et excellentia, homo differt a brutis. Unde homo merito dux et princeps et rex dicitur omnium animalium. Sed quia caput hominis creatum fuit rectum propter oculos secundum sententiam galieni nono de iuuamentis membrorum secundo capitulo et secundum Auicennam in principio tertii canonis, fuerunt ipsi in suprema parte corporis situati ut habeant eleuationem et dominationem
fol. 23ᵇ, col. 2. super omnia ‖ membra et omnibus partibus. et fuerunt duo ut forte albero paciente alterum uicem suam possit explere. ℭ Item dicit auicenna, idem quod comparatio oculi ad corpus est propinqua comparationi speculatoris ad exercitum. sicut enim speculatoribus melior et convenientior est locus altus, ita oculis melior et conuenientior est erectum caput. ℭ Et ideo dicuntur oculi nobiliores et excellentiores aliis sensibus ut apparet per philosophum in prohelo [*sic*] metaphisice circha principium. Merito igitur oculi sunt saluandi et ab omni contrario preseruandi. Lux enim oculorum non solum corpus sed animam letificat et confortat. prouerbiorum quinto decimo capitulo.

Capitula huius libri.

ℭ Presentis libelli sunt duo tractatus.

ℭ Primus est de tribus principiis essentialibus oculorum antecedentibus custodiam sanitatis eorum.

ℭ Secundus est de ipsa oculorum custodia. ℭ Primi tractatus sunt tria capitula.

ℭ Capitulum primum de uno principio essentiali oculorum ‖ quod fol. 24ᵃ, col. 1. est compositio.

ℭ Capitulum secundum de alio principio quod est complexio.

ℭ Capitulum tertium de tertio quod est diffinitio.

ℭ Tractatus secundi sunt tria Capitula.

ℭ Capitulum 1. de his que nocent oculis.

ℭ Capitulum secundum de his que iuuant.

ℭ Capitulum 3. de memoratione quarundam medicinalium rerum simplicium et compositarum uisui conferentium. ℭ Finiunt igitur ista capitula in senario numero, qui secundum philosophum est numerus perfectus.

Capitulum primum de oculorum compositione.

Principia essentialia oculorum quantum ad presens spectant, sunt tria, scilicet compositio, complexio et diffinitio. De quibus in hoc tractatu per ordinem est uidendum et primo de

Digitized by Google

compositione. ℂ Auctores concordant oculum componi ex decem rebus, scilicet ex septem tunicis et tribus humoribus. quarum tunicarum prima dicitur retina. Secunda secundina. Tertia scliros. quarta cranea. Quinta uuea. Sexta cornea et septima coniunctiua.
fol. 24ª, col. 2. Primus humor dicitur uitreus. Se‖cundus cristallinus. Tertius albugineus. ℂ De colloribus autem eorum est sciendum, quod colores oculorum sunt quatuor: niger subalbidus, varius et glaucus. ℂ Dicitur autem prima retina eo quod ex rete uenarum, et arteriarum sit composita per quas quidem ad oculi nutrimentum, uita et motus et sensus trasmittitur. ℂ Secundina uero dicitur uel quia secunda est a cerebro, seu a cristallino humore a parte intrinseca, uel quia a secundo cerebri paniculo, idest a pia matre sumit principium que cum sclirotica intre [*sic*] se claudit uitreum humorem. ℂ Sclirotica uero dicitur a scliros quod est duricies, eo quod a dura matre sumat inicium, uel quia ipsa dure est substancie et solide, ut oculum defendat ab extrinsecis nocumentis. ℂ Quarta uero dicitur aranea eo quod est subtilis ad modum tele aranee. ℂ He autem tunice iunguntur et reducuntur in orbem et intra se cristallinum claudunt humorem, qui cristallinus humor. Dicitur uisus proprium instrumentum. Et dicitur cristallinus
fol. 24ᵇ, col. 1. a cristallo, eo quod assi‖millatur cristallo in colore. ℂ Est autem iste humor secundum Auicennam, albus, lucidus, clarus rotundus in superficie planus, in medio omnium locatus. ℂ Quinta uero dicitur uuea ab humiditate quam contrahit ab albugineo humore, ut siccitatem contemperet. Hec quadam ofuscatione sunt profusa ut quod omnes predicte tunice uisus essent disgregatiue, uel sui ofuscatione uisum minus congregarent. ℂ Sexta dicitur cornea, eo quod assimilatur cornu lucido et claro. He similiter due tunice coniunguntur et faciunt semi orbem intra se et albugineum claudunt humorem. ℂ Septima uero dicitur tunica coniunctiua, quia collateraliter hinc inde alias coniungit tunicas. Hec igitur est oculi compositio. ℂ Sciendum autem quod ad oculum sic dispositum et perfecte organiçatum, defertur spiritus uisibilis per hunc modum a prora enim capitis, idest ab interiori parte, exeunt duo nerui concaui, qui dicuntur optici, qui in substantia cristallini humoris se infingunt. Hi duo nerui concaui transuersaliter
per modum ‖ crucis infinguntur in fol. 24ᵇ, col. 2. oculis, et in termino siue in puncto contractus conjunguntur, et in hoc ingeniata [*sic*] est natura, ut altero clauso inpedito, spiritus uisibilis mittitur ad alterum oculum ut perfectus suam compleat actionem. ut patet in saggitariis, qui uno oculo clauso directius signum percipiunt. ℂ Notandum est autem, quod uisus inter alios sensus est uinacior, scilicet a uiuacitate dictus. Sic enim nomen accepit, ut dicit ysidorus. ℂ Item ceteris est dignior, sicut dictum est supra, et ideo, secundum situm aliis est superior. ℂ Item aliis est subtilior, est enim in effectu tamquam quedam uis ignea, qua mediante, remotissima comprehendit, alii uero propinquiora. ℂ Item

Digitized by Google

omnibus sensibus est anime uicinior, nam in oculis quasi omne iudiçium mentis apparet, unde illaritas et perturbatio anime in oculis apparet. Similiter amor uel odium et cetere passiones. Verba sunt libri de proprietatibus rerum. ℂ Item sciendum quod actio oculi consideratur secundum accutum [*sic*] et obtusum: nam cuius uisus subtilis fuerit et multus longinqua
fol. 25ª, col. 1. et propinqua ‖ perfecte apprehendit; quia multus uidet remota, quia subtilis et accutus [*sic*] discernit uidenda.

ℂ Oculus autem parui uisus non bene uidebit a remotis, secundum philosophum. Spiritus uero multus et grossus remota uidet quia multus, sed non perfecte quia grossus. Paucus uero et subtilis uidet prope et perfecte, non enim uidet longe propter sui paucitatem, nec perfecte propter Spiritus uisibilis paucitatem, perfecte tamen propter eius subtilitatem. Paucus et grossus non uidet longe propter sui paucitatem, nec perfecte propter sui grossitudinem. Secundum ergo quod quis grossum, turbidum, tenebrosum spiritum uisibilem habet, difficiliorem habet et debiliorem actum uidendi.

De coloribus Oculorum.

Modo sequitur uidere de coloribus oculorum qui sunt quatuor, sicut dictum est supra: scilicet niger, subalbidus, uarius et glaucus. ℂ Niger fit multipliciter, secundum Io. (1) aut enim fit ex defectu uisibilis spiritus, aut ex penuria cristallini humoris, uel quia plurimum recedit intus cristallinus humor aut ex abundanti humore qui est similis albugini oui, aut ex turba- fol. 25ª, col. 2.
tione ipsius, aut ex abundantia qualitatis uuei humoris. ℂ Subalbidus uero fit ex contrariis superioribus, idest ex abundantia spiritus uisibilis et ex magnitudine cristallini humoris, uel quia plurimum residet cristallinus humor exterius aut ex minoratione humoris albugenei et qualitate ipsius et defectione uuei humoris. ℂ Vario uero et glaucus fit si conuenerint cum rebus que accidunt nigredini et subalbedini. ℂ Varius tamen color significat spiritum uisibilem magis et magis abnndare et clarescere in sua uarietate. ℂ Glaucus uero signat spiritum uisibilem minus abundare et subingrescere in sua claucedine. Verba sunt Joannicii.

Capitulum secundum de secundo principio essentiali quod est complexio.

De secundo principio essentiali oculorum quod est complexio, sunt due oppiniones, quarum prima est quod oculus est calide complexionis, eo quod in ipso dominatur ignis, cuius signum est uelox et continuus motus ipsius. Alia oppinio est quod oculus est fri- fol. 25ᵇ, col. 1.
gide complexionis ‖ et humide et magis humide eo quod in ipso dominatur aqua. ℂ Et signum secundum philosophum huius est quum perforato uel erupto oculo fluit aqua. Prima oppinio fuit platonis. Secunda aristotelis de

(1) *Leggi* Joanniccium *nominato espressamente in fine del capitolo.*

Digitized by Google

sensu et sensato. ℂ Propter hoc sciendum quod oculus potest considerari dupliciter, uno modo materialiter et ratione sue complexionis et hoc modo dominatur aqua et terra, sed plus aqua. terra enim dominatur ratione paniculorum suorum, qui omnes sunt frigide et sicce complexionis. Aqua uero dominatur magis ratione humorum qui omnes sunt de natura aque. Alio modo consideratur oculus ratione motoris ipsius, scilicet spiritus uisibilis, et hoc modo dominatur in eo ignis, nam spiritus uisibilis est splendidus ad modum ignis, quod patet quia facit oculum album si abundat. Vnde ex his patet, quod uera est sententia utriusque philosophi, nam ratione spiritus dominatur in eo calor, et sic est calide complexionis. ratione uero paniculorum et humorum ex quibus materialiter componitur, est frigide et humide complexionis, sed plus humide ut dictum est.

Capitulum tertium,
de diffinitionibus oculorum.

fol. 25ᵇ, col 2. DE oculis dantur, secundum anti‖quos due diffinitiones ad presens, quarum una est nominis, alia est rei. De prima dicit ysidorus libro XII capitulo secundo; dicit enim quod oculi quasi oculti sunt dicti, quia eos aliorum tegmina ocultant ne offensione ledantur uel quia ocultum habent lumen et secretum idest intus positum. ℂ Hi autem, secundum ysidorum inter omnes sensus uiciniores anime existunt; in oculis enim omne iudicium quasi mentis est; vnde et anime perturbatio uel ilaritas amor uel odium in oculis apparet ut uidetur ad sensum. ℂ Diffinitio uero realis est hec. Oculus est istrumentum uidendi, hec diffinitio est propria eo quod est data per causam finalem. cuiuslibet enim instrumenti finis est propria operatio. Et ideo dicit philosophus dignum est unumquodque denominari a fine. ℂ Ad huius autem diffinitionis euidentiam premittenda est diffinitio uisus, per ipsam enim notificabitur ipsa prima; [*sic*] vna enim diffinitio quandoque est causa notionis alterius secundum philosophum. Diffinitur autem uisus ab auicenna in VI de naturalibus sic. Visus est uis ordinata in neruo obtico ‖ ad apprehen- fol. 26ᵃ, col. 1.
dendum formas eius, quod formatur in humore cristallino ex simillitudinibus habentium colorem que ueniunt ad corpora radiosa in effectu ad superficiem corporum tenerorum. ℂ In hac diffinitione. iiij. notantur. ℂ Primum est de uirtute et tangitur cum dicit vis. ℂ Secundum est de istrumento; et tangitur hoc duplex istrumentum, scilicet deferens quod est neruus obticus et recipiens quod est humor cristallinus, et hoc cum dicit in humore cristallino. Aliud uero est instrumentum totale, scilicet ipse oculus qui est corpus tersum et tangitur cum dicit a superficie corporum tersorum. ℂ Tertium uero quod tangitur in hac diffinitione est obiectum uisus, cum dicit ad apprehendendum (1) illud quod formatur ex simillitudinibus corporum habentium collorem. ℂ Quartum quod tangitur est medium ipsius uisus; et

(1) *Nel codice:* ad p̄phēdendum.

Digitized by Google

hoc tangitur cum dicit que ueniunt per corpora radiosa in effectu, idest per corpus dyafanum. ℂ Sunt igitur hec que principaliter requiruntur ad uisum, scilicet uirtus, instrumenta, obiectum
fol. 26ª, col. 2. et medium, de quibus ‖ per ordinem est uidere; et primo de uirtute, de qua dico quod intelligi debet ad presens de animali, licet aliqui uelint intelligere de uitali; eo quod ipsa est prima radix omnium aliarum. ℂ De instrumentis uero dico quod sicut ex dictis apparet tria dicuntur oculi istrumenta, scilicet neruus obticus, humor cristallinus, et oculus, diuersi modi tamen, sicut dictum est. Nam neruus obticus est deferens, humor cristallinus est recipiens, et oculus est instrumentum totale, eo quod in ipso continetur tota oculi compositio. ℂ Sed de obiecto est sciendum, quod obiectum uisus ad presens est quadruplex, scilicet lux, lumen, radius et color, de quibus per ordinem et uidere. et primo de luce, que sic diffinitur ab auicenna sexto de naturalibus. Lux est qualitas que perficit corpus dyafanum, sicut aerem, aut ignem, aut aquam, et facit ipsum aptum, ut per ipsum transeant similitudines rerum uisibilium, et est qualitas que perficit per se corpus quod est per se uisibile sicut que perfec̄. per se sole dicitur uisibilis per se [*sic*]. ℂ Sciendum est autem, quod ex intuitu lucis anima gaudet, et tristatur in tenebris, quoniam spiritui qui est
fol. 26ᵇ, col. 1. sedes anime est con‖forme. illud autem contrarium. Verba sunt auicenne in libro de cordialibus. ℂ Lumen uero sic diffinitur ab eodem ibidem. Lumen est qualitas quam acquirit aliquod corpus tenebrosum a corpore diafano. Verbi gratia qualitas que est in luna dicitur lumen, quia ipsa mutat ipsum a sole, mediante diafonitate [*sic*] colorum et elementorum. Ex quo patet, quod lumen est sicut effectus lucis secundum auicennam; sed non secundum Aristotelem. dicit enim, quod lumen est color lucidi, et uocat lucidum ipsum diafanum, quando suscipit in se perfectionem a lumine. Radius autem nihil aliud est, quam quedam disgregacio, et quasi quedam rectio colorum et quedam emanatio a corporibus, sicut patet in sole, secundum quod dicit Auicennam ibidem. ℂ Color autem sic diffinitur ab eodem, et primo penes causam efficientem sic. Color est qualitas que perficitur a luce. Diffinitur etiam ab aristotele in libro de sensu et sensato sic. color est extra causas perspicu terminati; idest color est deterior (1) dispositio corporis intranslucentis. Sic igitur apparet de obiectis ipsius uisus. ℂ Sed de medio satis patet per ea que dicta sunt; quia medium uisus est ‖ omne diafanum, siue fol. 26ᵇ, col. 2.
illud sit corpus generabile et corruptibile sicut aer, aqua, et uitrum; siue incorruptibile ut corpus celi. Sic igitur per hoc est declarata diffinitio uisus et per eius declarationem habetur prime diffinitionis oculorum notitia.

(1) *Le prime tre lettere* det *di* deterior *nel codice sono espunte forse si ha a correggere* exterior.

Digitized by Google

TRACTATUS SECUNDUS HUIUS LIBELLI DE CUSTODIA SANITATIS OCULORUM PENES IUUANTIA ET NOCENTIA. CUIUS SUNT TRIA CAPITULA. CAPITUM PRIMUM DE HIIS QUE NOCENT.

SANITAS oculorum uel uisus constitit [*sic*] in triplici cura; in preseruatiua conseruatiua et curatiua. De quibus relicta tertia erit presens sermo, scilicet de preseruatiua et conseruatiua. ℂ De curatiua uero traetabo in quadam mea pratica noua de egritudinibus a capite usque ad pedes quam auxiliante deo in breui agrediar. ℂ Dico ergo quod sanitas uisus preseruatiua et conseruatiua dupliciter scilicet a iuuantibus et nocentibus. Sed quia secundum boecium non contingit malum euitari nisi sit cognitum, premittam capitulum de nocentibus capitulo de iuuantibus dicens quod ea que nocent oculis uniuersaliter sunt omnia que oppillant et que sanguinem turbant, et
fol. 27ª, col. 1. que spiritum ‖ ingrossant uis[*sic*]sibilem; per hec enim senescit oculus et debilitatur. Particularia uero oculis nocentia sunt hec; scilicet inequalitas aeris in caliditate et frigiditate, et aer fumosus, nubilosus et puluerulentus, et aer multum splendidus, et ignis, et flatus uentorum asperior. ℂ Item nocet labor plurimus uel exercicium uniuersale scilicet quantum ad totum corpus; et particulare scilicet quantum ad partes eius: stomacho inanito et repleto, nocet etiam exercicium oculorum scilicet cum minutis litteris; et circa unam et eandem rem aspectus continuus. ℂ De cibis uero et potibus nociuis uniuersaliter sunt secundum auctores omnes, fumosi, crossi, salsi, accuti, uentosi; et uniuersaliter omnia dolorem capitis facientia, et omnia orī stōi (1) nocentia; qualia sunt panis crossus et immundus, carnes boum et arietine, et porcine, et maxime salite diu et similes. ℂ Item pisces omnes secundum auicennam in suo secundo; dicit enim quod omnes pisces acquirunt oculo cecitatem; eorum tamen quidam sunt minus mali sicut infra dicetur. peiores tamen sunt pisces malarum aquarum et immundarum, sicut malorum lacuum et stagnorum. ℂ Item ‖ lac et caseus lentes fol. 27ª, col. 2.
et omnia legumina. ℂ Item de herbis et radicibus sunt caules porri cepe alea rafanum eruca anetum et lactuca. dicit enim diascorides et galienus, quod multus usus lactucarum obtenebrat uisum. ℂ Item crocus secundum mesue. dicit enim quod usus eius obtenebrat uisum. ℂ De seminibus sunt sinapis, anetum et oçimum cuius proprietas est obscurare uisum secundum raxim et coriandrum de quo dicit auicenna quod generat tenebrositatem uisus. ℂ Item nocent fructus recentes quasi omnes et dactili secundum auicennam. ℂ Item nocet uinum grossum et rubeum et acetum et frequens ebrietas et uniuersaliter secundum auicennam omnis replectio nocet uisui; et omne accutum. Accuta enim habent caput replere, ex uaporibus et fumositatibus que uisui potissime nocent et omnino existunt materia orbitatis et cecitatis; Uerba etiam sunt Auençoar. ℂ Item

(1) *Così il manoscritto, forse si ha da correggere* quæ in stomacho.

Digitized by Google

multitudo fliē [*sic*] nocet et uentosacio continua. Auicenna. ℂ Item nocet sompnu plurimus et uigilię superflue; et somnius super replectionem et propice ex cibis et potibus uaporosis et
fol. 27ᵇ, col. 1. turbi‖dis. dormire etiam super uentrem multum nocet uisui quod non facit iacere suppine. ℂ Item nocet uehementer plurimus coitus ut patet ad sensum. ℂ Item nocent acidentia animi uirtutem dissoluentia sicut est ira, tristitia et similia. Etiam fletus cum lacrimis, maxime mensuram excedens. Uolentes igitur preseruare uel conseruare oculorum sanitatem, ab his caueant quantum possunt. ℂ Solent autem dici hi uersus magistrales. ℂ Alea, uina, uenus, faba, fumus, uentus et ignis. ℂ Hec nocent oculis sed uigilare magis.

Capituli (1) de his que uisui conferunt.

EA uero que uisui conferunt ipsum preseruando et confortando sunt predictis apposita; que sunt aer temperatus, et proprie ante cibum; et etiam exercicium particulare sicut legendi litteras mediocres; hoc enim secundum aristotelem auctoritate mesue uisum coroborat, et oculorum sanitatem custodit. ℂ Item dicit quod frequentatio pectinis super caput ualet; uapores enim uisum impedientes euertit ad
fol. 27ᵇ, col. 2. cutim, ne uisui obsint. ‖ Item dixit quod post oculi fatigationem a re splendida et accuta causatam (2) confert ingredi domum obsuram, non tamen multe tenebrositatis, et intueri per fenestras in quibus sit aliquid parum uiride et intueri aquam uiridem multum confert scilicet in uase uiridi, et submergere oculos in ipsa. ℂ Item dicit abuali ut dicit mesue, quod ingredi aquam tepidam claram, et aperire oculos in ea oculorum sanitatem custodit et eorum teneram reddit substantiam, et similiter aquam uidere claram et lucidam. ℂ Item dixit Aristoteles quod aspectus rerum uiridium in loco multe temperi ei, coroborat uisum.

Item dixit quod aspicere speculum, et diu intueri super ipsum, uisum coroborat, et oculi fatigationem remouet. ℂ Item dixit auençoar, quod prospicere fortiter et accute in oculis asini siluestris, confortat uisum, et confert descensui acque ad oculum, et in hoc est mirabilis proprietas et diurna data ad conseruationem sanitatis oculorum; et dicit quod sic est sine dubio. Item dicit G. in de accidenti et morbo particula Q.ª, quod uenetus color est de-
lectabilior uisui ‖ cunctis coloribus, et fol. 28ª, col. 1.
magis iuuatiuus, si uisus non fuerit ex sole dissolutus. si enim dissolutus extiterit, et que sunt contraria eius infirmitati opus habebit; sed eo sano extante, licet fatigato, nihil ei adeo erit iuuatiuum, utpote confortatiuum, uelud uenetus color, et post eum liuidus; color enim liuidus est albus nigro comistus; venetus autem est albus seminigro commistus, quod plato testatur. hi namque colores non diuidunt uel dispergunt uisum, sic ut facit albus et splendidus, neque coadiuuant et eum astringunt, sicut facit niger. hec uerba

(1) *Correggi:* Capitulum II.

(2) *Il* tam *è espunto per errore dell'amanuense.*

Digitized by Google

sunt G. ibidem. ℂ Item odores rerum odoriferarum confortant uisum. Ideo dixit Auençoar, quod odorare poma odorifera multum uisui confert. ℂ Post hec uero de cibis et potibus dicendum. Cibi igitur et potus conuenienter sunt uniuersaliter, omnes cibi et potus temperati generantes subtilem et laudabilem sanguinem, quales sunt panis de frumento mundo subtili et bono bene fermentatus et coctus, modicum furfuris et salis habens, non calidus sed
fol. 28ª, col. 2. recens unius diei aut duorum ‖ ad plus. ℂ De carnibus uero sunt carnes pulorum, galline, caponum et gallinarum iuuenum perdicum et faxianorum; et secundum Auençoar caro pullorum collumbarum siluestrium absque capitibus et collo, preparatorum cum rapis. Et dicit quod capita istorum habent proprietatem non faciendi uidere post occasum solis sicut cerebra predictorum proprietatem habere dicuntur in augendo uel multiplicando intellectum, et uis etiam predictorum pullorum collumbarum siluestrium et gallinarum praedictis conferre dicitur. uerba sunt ipsius. ℂ Item conueniunt carnes auium minutarum, non in paludibus sed in locis sanis habitantium. Item carnes edine, carnes castratine iuuenes, uiteline, et caprioline sunt uisus conseruatiue. ℂ Diascorides autem dixit quod comedere carnes auium de rapina uisum corroborat. Et similiter sorbiciones jurium ipsarum; et alii dicunt quod uis serpentum et caro ipsorum confortant ipsum, et quod experti sunt. Item oua sunt uisus confortatiua, et precipue gallinarum et perdicum et collumba-
fol. 28ᵇ, col. 1. rum decocta ‖ cum rapis, secundum Auençoar. ℂ De piscibus autem duo, quod minus nociui sunt de marinis solie, scorpene uarones, triglie uel rusali, ceuali, aurate, arbores et similes. ℂ De non marinis sunt pisces de aqua petrosa. dicit enim galienus de petrinis piscibus, quod alimentum ex eis non solet esse bene digestibile, sed sanissimum corporibus hominum; de eis uero sunt uaroncelli, boculi, ceuedani temani lucioli carpiones trute et similes. ℂ De herbis uero sunt feniculus, de quo dicit Ioannes mesue auctoritate democriti, quod feniculus oculum abstergit, uisum clarificat secundum omnem modum ipsius. ℂ Et dicit quod serpentes et reptilia diu degentia in cauernis, huic plante approximant et utuntur ea in commestione et fricatione super oculos suos. postquam egrediuntur cauernas [*sic*] et tunc uigoratur uisus eorum. Item borago, ruta, petrosillus, saluia, menta, maiorana, enula, et rapa secundum Auençoar dicit euim quod expertus est experimento sensibili, quoniam rapa uisum accuit et subtiliat, et dicit quod
a proprietate ‖ sui uisum confortat; et fol. 28ᵇ, col. 2.
non solum ipsa per se sed etiam ea cum quibus decoquitur uisum confortant. ℂ De fructibus uero sunt amigdale secundum auicennam in secundo; dicit enim quod amigdala confortat uisum. Item poma, pira, coctana nespila et similia; he enim prohibent uapores uisum impedientientes ascendere secundum eundem tertio can. capitulo de epilessia. ℂ Sed de potu uini est sciendum, quod utilius est in hac causa uinum album subtile clarum et non acutum, sicut est et ribolium et scla-

Digitized by Google

uum. sed sicut teranum et marchianum et semper linfatum; parum autem et multum, secundum potentiam et debilitatem ipsius. Quantitas autem non negligatur nec hora. ℂ De somno autem dico quod somnus temperutus magis confert et similiter dico de coytu. ℂ De accidentibus uero animi dico, quod exercicia animi iocunda conueniunt, sicut est gaudium et letitia; dicit enim salomon quod gaudere et letari naturale et proprium est uirtutis scilicet corpus regentis; et dicit quod animus gaudens etatem floridam facit; Spiritus uero tristis essiccat ossa.

CAPITULUM TERTIUM ET ULTIMUM DE MEMORATIONE QUARUNDAM RERUM SIMPLICIUM ET COMPOSITARUM UISUI CONFERENTIUM.

fol. 29ᵗ, col. 1. ‖ SUNT post predictas res alie que mirabiliter sunt uisus confortatiue; quarum quedam sunt simplices et quedam composite. ℂ Et harum duarum quedam sunt laxatiue, et quedam non. de quibus omnibus per ordinem est uidere; Et primo de simplicibus non laxatiuis que uero quantum ad presens sunt hec scilicet aurum, argentum, ambra, celidonia, rosa, cinamomum, calamentum, gariofali, iacintus, smeraldus, çafirus, et optalinus [?], ycimel, lignum, aloes, malgarite, ruta, Siricum, Spondium, et Saturegia. ℂ Est tamen primo sciendum quod ea que cerebrum et cor confortant(ur) sunt conferentia uisui, eo quod hec membra quum sint principaliora aliis membris, suas tribuunt uirtutes, quibus mediantibus uiuunt nutriuntur et mouentur; ad confortationem igitur eorum sequitur confortatio uisus. Nichilominus preter hec sunt plura confortationi uisus appropriata ut infra uidebitur. Dio ergo incipiendo ab auro, quod aurum confortat uisum; quod apparet per auençoar dicentem, quod aurum purum confortat uisum; et Auicenna in libro de cordialibus ponit ipsum in numero cordialium, et dicit quod comparatio auri est a proprietate; et eius contrario ‖ est temperata, aliquantulum fol. 29ᵗ, col. 2. tamen uicina calori [*sic*]. Et platearius dicit quod aurum confortat membra, quamvis eis non incorporetur, nec nutriat ea, sed depurando et asperitate sua et superfluitates abstergendo. ℂ Argentium etiam confortat uisum, quia cor confortat. Dicit enim serapio, quod limatura eius confert cardice ex consequenti ergo uisui. ℂ Ambra etiam est uisus confortatiua dicit enim Auicenna ibidem, quod ipsa habet uirtutem vehementem, letificando [*sic*] et confortandi simul; Est autem ad hoc potentior propter fortitudinem sue aromatiçatis; et ideo confortatiua est substantiæ cuiuslibet spititus, et membrorum principalium, et multiplicatiua ipsius. ℂ Et serapio dicit, quod ambra fortificat cerebrum, et corroborat ipsum, et sensus omnes et cor, et confert senibus et frigidis a constitutione. est enim calida et sicca. i. 2°. ḡ. ℂ Item cynamomum est uisus confortatiuum; dicit enim Io. serapio quod de proprietate eius est, quod usus comestionis ipsius confert obscuritati uisus; et maxime eius que accidit ex humiditate. ℂ Item calamentum confert uisui; dicit enim Auicenna in de cordialibus,

Digitized by Google

quod ipsum contemperat spiritum in
fol. 29ᵇ, col. 1. cerebro existentem. ℂ Item gari‖ofali confortant uisum. dicit enim serapio quod acuunt uisum, et remouent obscuritatem ipsius. ℂ Item iacintus confert uisui; dicit enim Auicenna, quod eius est proprietas letificandi cor, et per consensum uisum. ℂ Item smaraldus confortat uisum debilem et conseruat secundum ysidorum. ℂ Item çafirus habet uim confortatiuam uisus; et sordium oculorum sine grauamine purgatiuam, ut dicitur in lapidario. ℂ De celidonia uero dicit ysidorus, quod celidon grece yrundo dicitur latine, vel celidonia dicitur, quia pullus hyrundinum confert cum eorum leduntur oculi; ex hac enim herba medicantur et sanantur. Item dixit plinius scilicet quod succo celidonie oculi hyrundinum erupti, siue lesi ad statum pristinum reuertuntur. ℂ Item rosa et aqua eius est uisus confortatiua, secundum omnem modum administrationis ipsius. Unde Auençoar dicit quod abluere oculos multotiens cum aqua rosa conseruat oculos a lippitudinum grauatione. ℂ Item dicit quod madefacere oculos cotidie cum aqua rosa çucarata, dummodo corpus sit mundum a superfluitatibus, confortat uisum. ℂ Item rotalius ut dicitur ibidem, liberat oculos ab omnibus morbis, et con-
fol. 29ᵇ, col. 2. seruat accutos ‖ uisus. ℂ Içimel est planta aromatica similis cinamomo secundum auicennam de uiribus cordis, que hodie dicitur apud nos flores canelle, quod non est uerum; ymo herba vel planta per se, sicut dicunt, ipsa est calida in secundo. et sicca in primo; inest ei ualde proprietas conseruanda [*sic*] spiritum quam adiuuat aromaticitas et stipticitas cum subtilitate, confortat igitur cor et cerebrum et alia uiscera secundum eundem; et in summa omnium uirtutum adiuuat actionem, ergo uirtutis uisiue. ℂ Lignum aloes est etiam de confortantibus uisum; appropinquat enim ambre in iuditio. tamen est ea debilius et est eius complexio temperamento propinquior [*sic*] et omnia membra confortat secundum ipsum ergo et oculum. ℂ Margarite etiam uisum confortant, nam ipse confortant cor secundum ipsum Auicennam ibidem dicentem, quod sunt omnium gemmarum candidarum precipue. quelibet sint fracte et humide habent uirtutem confortandi et omnes spiritus temperandi. ℂ Ruta est de maxime confortantibus uisum; dicit enim plinius, reprehendendo pitagoram, qui putant oculis rutam ‖ esse nociuam fol. 30ᵃ, col. 1.
erant, quoniam scultores comedent rutam causa oculorum, et eorum uisus acuitur. ℂ Et serapio dicit, quod ipsa per se et associata acuit uisum. unde solet dici. est herba ruta, que lumina reddit accuta. ℂ Siricum etiam uisum confortat, est enim secundum Auicennam de fortiter letificantibus uel confortantibus cor et uisum, quoniam confortatio eius non uni apropriatur spiritui; sed est pocius conueniens substantie cuiuscumque spiritus, ita quod confert spiritui animato; dicit etiam quod uisum confortat si oculi ex eo liniuntur. ℂ Item spodio inest proprietas confortandi uisum quoniam cor confortat et letificat secundum Auicennam, et creat luminositatem in spiritu et sic uisui confert. ℂ Saturegia

Digitized by Google

etiam corroborat uisum. dicit enim serapio quod ipsa accuit uisum debilitatum ab humiditate. ℭ Et hec de simplicibus non laxatiuis dicta sufficiant.

De Medicinis simplicibus laxatiuis.

Simplicia uero laxatiua sunt hec ad presens. Aloes, mirobolani, et sene. ℭ Aloes est de medicinis confortantibus uisum, dicit enim mesue, quod qui utitur eo non utitur in corpore
fol. 30ª, col. 2. suo ‖ neque in instrumentis sensuum suorum egritudo que non sit ab illis ad sanandum. ℭ Item dicit quod ablucio eius cum uino uel acqua rosatea, aut cum succo feñ preparato abstergit lacrimas, ipsum etiam accuit sensum et rationem; caueat tamen sumens eum a temporibus frigidis; excoriat enim, et solutione educit sanguinem, aperiendo orificia uenarum, aperitione sanguinem manare faciente secundum ipsum; hoc autem debet intelligi in preparatis ad hoc, et assuetis. ℭ De mirobolanis dicit Ioannes serapis, quod ipsi corroborant omnes sensus et memoriam et sensum. ℭ Et Ioannes mesue dicit, quod ipsi sunt ex rebus, que faciunt utentes se iuuenescere; et acquirunt eis colorem bonum et bonitatem odoris omnis et sudoris, et generant gaudium et illaritatem, et confortant cor, stomacum, et epar et extingunt inflamationem colore et precipue citrini. ℭ Item serapio auctoritate alchindi dicit, quod mirobolis [*sic*] fortificant oculos leues idest debiles; et prohibent cursum humorum ad oculos. ℭ Item dicit quod in mirobolis non est tantum de iuuamento quantum in hebulis. ℭ Item dicit quod hebuli clarificant uisum, et proprie conditi ‖ ipsi enim stomacum fol. 30ᵇ, col. 1. confortant, appetitum prouocant, digestionem procurant, sensum et rationem uigorant, uisum clarificant et utentes eis in iuuentute conseruant. ℭ Emblici enim confortant cor et cerebrum, et augent intellectum et etiam bellirici. ℭ Sene uero est de confortantibus uisum, dicit enim mesue quod ipsum mundificant cerebrum, cor, epar, splenem et membra sensus et aperit oppilationes uiscerum et confortat utentem eo in iuuentute, et generat gaudium; causam enim tristitie amputat, et dicit quod secundum omnem modum administrationis ipsius addit in uisu; et hec de medicinis laxatiuis simplicibus dicta sufficiant.

De medicinis compositis laxatiuis et non laxatiuis.

Post hec autem dicendum de medicinis compositis laxatiuis. et non laxatiuis. et primo de laxatiuis que sunt duorum modorum quantum ad presens; quedam enim sunt iere et quedam pillole; de yeris uero sunt yera Gal. yera G. est nota in antidotario etiam yera constantini. ℭ Yera uero Ioannis mesue hec est. R[ecipe] aloes boni ʒ. XV. epithi constantini ʒ. V. eufobii. croci. spice. camedress. aā. ʒ. VI. agarici ʒ. VIIIJ. garofa‖li ʒ. IJ. fol. 30ᵇ, col. 2. calaī. aro. masticis. cassie. aā. ʒ. VIIJ. xilobalsami. ʒ. IIIJ. piperis albi et nigri. gentiane. amomi. aā. ʒ. J. diagridii. optime preparati. ʒ. IJ. mellis quantum sufficit. dosis est aureus unus. ℭ Hec yera secundum ipsum

Digitized by Google

confert obscuritati uisus et uentositati grosse dominati [*sic*] super caput et stomachum et totum corpus et educit super fluitatis utriusque collere et flatis.

Dicto de yeris dicendum est de pillolis. de quibus principaliores sunt aprime pillule lucis maiores et minores secundum mesue. et pillole auree et pillole cocie que sunt note.

Medicine uero composite non laxatiue sunt he. tiriaca metridatum aurea alexandrina; triafara minor secundum mesue et nux muscata initrita cum melle. et quoddam cl̄m. Ioannes mesue quod R[ecipe] seminis feñ. 3. x. mac̄. cubebe. cinamomi. piperis longi. gar̄. añ. 3. IJ. puluiriçentur. et cribellentur et accu- mell̄. dispumati. lib. 1. succi feñ. cocti et depurati. 2. IIJ. succi rute cocti et
fol. 31ᵃ, col. 1. depurati. ‖ $\frac{1}{1}$ I. succi celidonie similiter preparata $\frac{1}{1}$ I. coquantur succi ē mell̄. usque dum mellis tenuis habeat spissitudinem, et conficiantur cum eo species, et reseruentur in uase uitreo. dosis est. 3. IIJ cum uino in sero et dimittatur cena et si cenat alleuietur cena et summatur circa mediam noctem. hoc. cl̄m. dicitur sublime conseruans sanitatem oculorum, et confortans spiritum uisibilem in claritate sua. ℂ Item est aliud cl̄m. expertum ad uisum quasi deperditum ipsum enim restaurat et stomachum confortat et superfluos humores purgat, renes mundificat, lapidem frangit et omnem uentositatem expellit. R[ecipe] seminis feñ. l. IJ. sil̄is montani l. 1. camedreos radicis celidonie añ. l. 1. seminis apii petrosilli an. $\frac{1}{1}$ IIJ. piperis circa cinamomi pullegii ysopi florum boraginis grano uiniperi sasifrage añ. $\frac{1}{1}$ IIJ puluerịçentur et cum melle dispumato conficiantur et sumatur de eo mane et sero ad quantitatem castanee. ℂ Item sunt quidam puluueres experti et boni ad conseruationem sanitatis oculorum quorum unus est hic. R[ecipe] betonice. rute ce‖lidonie. saturegie. saxi- fol. 31ᵃ, col. 2.
frage. eufraxie. leuistici. pullegii. añ. cinamomi añ. $\frac{1}{1}$ 1. cardamoī ç̄ç feñ. petrosilli ysopi origani silicis montani añ. 3. IIJ. gallange 3. V. zucari albissimi. $\frac{1}{1}$ IIJ. pulueriçentur subtiliter.

ℂ Alius R[ecipe] baccarum lauri interiorum. cinamomi. cubebe. añ. 3. IJ. feñ. silicis u. s. montani. pullegie eufragie. rute omnium añ. $\frac{1}{1}$ 1 pulueriçentur et usui reseruentur. hic enim est conseruans oculos in propria claritate. uisum amissum recuperat et habitum accuit. ℂ Item pulvis ex sola eufragia est expertus. et hec omnia sic dicta ad tempus sufficiant.

ℂ Finio ergo hic presens opusculum ad laudem dei omnipotentis et beatissime uirginis marie sub Millesimo. CCC. xl. die prima aprilis. veñ.

ℂ Explicit libellus de conseruanda oculorum sanitate aggregatus per magistrum Barnabam Deregio.

Digitized by Google

Digitized by Google

STUDI SPERIMENTALI

SULL'EMISSIONE DEL CALORE

NEL CORPO UMANO

I.

In questi ultimi tempi se molti ed importantissimi sono stati gli studi sulle variazioni del grado di calore interno nello stato normale e patologico, e sull'uomo e sugli animali, altrettanto ponno dirsi scarsi ed incompleti quelli che sono stati fatti per ricercare e conoscere il quantitativo di calore in calorie, che una data parte, o tutta la superficie del corpo emettono nella unità di tempo.

I libri di fisiologia più moderni si ripetono citando i calcoli d'Helmholtz, di Dulong e d'altri ricavati in modo indiretto dal computo delle calorie sviluppate dalla combustione degli elementi combustibili contenuti nei nostri alimenti, e dalla quantità introdotta di questi.

Ma tali calcoli per quanto precisi ci danno non solo un idea vaga della quantità del calore emesso dal corpo, ma si riscontrano poi molte difficoltà pratiche a volerli applicare ad ammalati. — Danno un idea incompleta del calore emesso dal corpo sano, perchè non possono tener conto dei cambiamenti che in esso sopravvengono, per le varie condizioni e dell'alimentazione e del caldo o del freddo ambiente, e dello stato di

Digitized by Google

salute e di malattia, e dello stato normale del sistema nervoso del soggetto sperimentato, cose tutte che sono di moltissima importanza in tali studii.

D'altra parte sembra che questi calcoli siano inquinati d'errore fin dal loro iniziarsi. D'Arsonval (1) grazie all'impiego d'un apparecchio calorimetrico che simultaneamente registra il calore sviluppato e il calore proveniente dalle combustioni respiratorie ha reso evidente che il calore del corpo non è solo prodotto dalla combustione degli alimenti.

Questo fatto fu poi convalidato in seguito da altri osservatori e specialmente da Berthelot (2) il quale dimostrò che la fissazione dell'ossigeno nel sangue produce calore. Egli ammette però che in causa della temperatura dell'aria penetrante nei polmoni quasi sempre inferiore a 37°, il sangue si rafreddi passando per essi sicchè si compensi presso a poco il calore prodotto.

D'altra parte poi il valutare come hanno fatto taluni (Dulong) che l'idrogeno degli idrati di carbonio bruci esattamente in acqua è ipotetico, come ben fa notare il Landois. E da ultimo il carbonio combinato nei suoi idrati ha una posizione salda, sicchè è probabile che si renda latente del calore per distaccarnelo e prodursi CO^2.

Checchè ne sia gli studii sulla quantità di calore emesso dall'uomo ed eseguiti in questa maniera non possono certo essere applicati su ammalati, perchè in questi l'aumento o la diminuzione del calore non dipendono tanto dalla quantità e qualità dei cibi introdotti, quanto assai spesso, da combustioni di certe sostanze (grassi) altra volta immagazzinati nell'organismo come provviste di riserva.

Per queste ragioni si sono tentate le determinazioni dirette, e queste mantenendo tutto il corpo o una parte del corpo del-

---

(1) D'Arsonval, *Recherches sur la chaleur animale* in Compts-rendu Accad. des sciences. Paris 11 luglio 1881.

(2) Berthelot, *Chaleur degagé par l'action de l'oxygène sur le sang.* Nei Compts rendu Accad. des sciences. Paris 25 nov, 1889.

Digitized by Google

l'uomo o dell'animale, rinchiuso in un calorimetro in modo da valutare il calore assorbito in un certo tempo dal calorimetro stesso, e quindi emesso nello stesso tempo dal corpo o da parte di esso.

Questo metodo diretto che dovrebbe pur dare risultati attendibili e precisi, è sempre molto complicato, di difficile pratica applicazione e i risultati ottenuti finora non sono stati gran chè.

Abbiamo è vero le ricerche di D'Arsonval, le più antiche (1) e le più recenti (2) — poi le eleganti ricerche compite da Richet (3) coi suoi calorimetri ad aria, e delle quali ci occuperemo in seguito, ma in tutti i casi, e unendole anche ad altre fatte in altri paesi (4) finiscono per risultare ben scarsa cosa, e sopra tutto di uso pratico difficile e di precisione molto contestabile.

Un perfezionamento alla calorimetria forse lo avranno apportato i dottori Butte e Deharbe (5). Questi misurano col termometro il calore prodotto da un animale posto dentro a un calorimetro di rame a doppia parete. Poi tolto l'animale, lasciano che il calorimetro ritorni alla temperatura primitiva e allora vi introducono una sorgente di calore facilmente misurabile e la fanno agire fino a che essa abbia prodotto lo stesso aumento di temperatura.

Ad onta di tutto questo la calorimetria così applicata resta un privilegio pei gabinetti e per gli animali, difficilissima od impossibile da applicarsi all' uomo sano e malato.

---

(1) D' Arsonval, *Recherches sur la Chaleur Animale.* Nei Traveaux du laboratoire du Docteur Marey 1878-79. Paris, Masson editeur.

(2) D' Arsonval, Società di Biologia di Parigi. Seduta 16 febbraio 1894.

D' Arsonval, Società di Biologia di Parigi. Seduta 23 giugno 1894.

D' Arsonval et Charrin. *Variazioni della termogenesi sotto l' iniezione di prodotti bacterici.* Archiv. de Phisiologie, Juillet 1894.

(3) Richet, *La chaleur animale.* Paris F. Alcan, 1889.

(4) Quelle di Hirn p. es, citato dal Landois.

(5) Butte et Deharbe, Societé de Biologie de Paris. Seance du 20 octobre 1894.

Digitized by Google

Eppure ognuno comprende quanto interesse scientifico e pratico potrebbe avere il verificare direttamente, nelle varie condizioni in cui può trovarsi il corpo d'un animale e specialmente il corpo d'un malato, gli aumenti o le diminuzioni dell'emissione del calore nelle varie parti di esso, in relazione col grado di calore reale della massa di sangue.

Io ho lungamente studiato questo argomento di cui comunicai appena un cenno già al XI congresso Medico internazionale che si tenne a Roma nel 1894 (1) ed ora ritorno su di esso con più abbondante e ricca serie di fatti e di considerazioni.

II.

Se invece, di rinchiudere in un calorimetro una parte della superficie del corpo, o il corpo tutto, potessimo rinchiudere con una parte della superficie del corpo un calorimetro, noi potremo, tenendo conto del tempo d'applicazione del calorimetro e della quantità di calorie che egli avesse in questo tempo assorbito, conoscere quante calorie avesse emesso nello stesso tempo la parte di superficie del corpo che lo aveva involto.

Il problema parmi si riduca dunque a trovare un calorimetro che si lasci involgere completamente da parecchie parti del corpo.

E qui ci si presenta la prima difficoltà: Quali sono le condizioni fisiche che si richiedono per avere un calorimetro che possa dimostrare la quantità di calore che egli assorbe?

Occorre uno strumento che sia composto di parti di cui sia già conosciuto il calore specifico; occorre conoscere il peso singolo di queste parti, ed occorre conoscere ad ogni istante e con precisione la loro temperatura.

---

(1) C. Bergonzini. *Sul modo di valutare la quantità di calore emessa da una regione del corpo*, in: Atti del XI congresso medico internazionale. Volume 2.°, pag. 47.

Digitized by Google

Io credo che un termometro ordinario a serbatoio sferico del quale si conosca esattamente il peso del mercurio e il peso del vetro del bulbo, si presti meglio d'ogni altro per questo scopo, poichè sarà facile calcolare il raggio del serbatoio e la sua superficie.

III.

Assumiamo come unità di calore la caloria grande ossia la quantità di calore che si richiede per innalzare da 0° ad 1° centigradi un Kilogr. d'acqua. Quantunque la caloricità dell'acqua, vari colla temperatura, per il nostro studio ammetteremo che sia costante da 0° a 50° cosa del resto che in pratica si ammette sempre.

Ciò posto il numero delle calorie che occorrono per elevare da 0° a $t°$ gradi m chilogrammi di acqua sarà:

$$mt$$

e il calore che occorrerà per elevare da 0 a t gradi un numero m di Kilogr. di un corpo di calorico specifico c, fatto 1 il calorico specifico dell'acqua sarà:

$$cmt.$$

Quindi il calore Q che occorrerà per elevare dalla temperatura t alla temperatura t' un numero m di Kilogr. d'un corpo di calorico specifico c sarà:

$$Q = cm\,(t' - t).$$

Se ora noi abbiamo un termometro a mercurio a bulbo sferico, esattamente calibrato in modo da sapere dal fabbricante che il peso del suo mercurio è m e il peso del vetro del suo bulbo è m', se indichiamo con c il calore specifico del mercurio e con c' quello del vetro, quando questo termometro si porterà da t a t' gradi, egli avrà evidentemente assorbito un calore che

Digitized by Google

sarà uguale al calore assorbito dal suo mercurio, più il calore assorbito dal vetro del suo bulbo e quindi in calorie verrà rappresentato dalla formula seguente in cui m ed m' devono rappresentare Kilogr. o frazioni di Kilogr.

$$Q = cm\,(t' - t) + c'm'\,(t' - t)$$

e raccogliendo il fattore comune $t' - t$ abbiamo come formula definitiva del numero di calorie assorbite da quel bulbo in un certo tempo l'espressione seguente:

$$Q = (cm + c'm')\,(t' - t).$$

Se il termometro sarà stato applicato ad una parte del corpo che possa involgerne il bulbo completamente, (come per esempio l'ascella, il cavo popliteo, fra coscia e scroto, la palma della mano chiusa, la piegatura dei gomiti, fra le 2 piante dei piedi), tante saranno le calorie che egli avrà acquistato, quante saranno le calorie che avrà perdute nello stesso tempo quella superficie di pelle che lo involgeva.

Qui ci occorre quindi conoscere precisamente la superficie del bulbo del nostro termometro che corrisponderà con grande approssimazione e senza errore sensibile alla superficie della pelle che lo ha involto.

Ora noi non conosciamo nel nostro termometro che i dati che il fabbricatore ci ha forniti del peso del mercurio e del peso del vetro.

Giacchè la massa divisa per la densità dà il volume, essendo m il peso del mercurio, d la sua densità, sarà v il suo volume e si ricaverà dalla formula seguente

$$v = \frac{m}{d}$$

ed essendo m' la massa o il peso del vetro del bulbo d' la densità del vetro, il suo volume v' sarà

$$v' = \frac{m'}{d'}.$$

Digitized by Google

Questi due volumi sommati assieme daranno il volume totale del bulbo

$$V = \frac{m}{d} + \frac{m'}{d'}.$$

Se, come abbiam detto il bulbo è una sfera abbiamo anche che

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

dalla quale formula potremo ricavare il valore di r che potremo poi controllare con un compasso di PALMER o meglio con adatto sferometro. Conosciuto r calcoleremo la superficie della sfera colla formula

$$S' = 4\pi r^2.$$

Bisogna però notare che questo ci darà la superficie della intera sfera-bulbo ma non la superficie utilizzabile del bulbo che va veramente a contatto della pelle, perchè ve ne è una piccola porzione uguale alla superficie della sezione della bacchetta del bulbo (che per essere più facilmente calcolabile deve essere cilindrica) che deve venir tolta. Preso, direttamente col compasso di Palmer, il diametro della bacchetta calcoleremo l'area del suo circolo colla formola

$$S'' = \pi r^2$$

e quindi $S' - S'' = S$ superficie utilizzabile del bulbo.

Ciò posto se

$$(cm + c'm')(t - t)$$

rappresenta la quantità di calore in calorie che assorbe il nostro apparecchio con una superficie bulbare di S centim. quad. la formula

$$\frac{(cm + c'm')(t' - t)}{S} \qquad \text{(I)}$$

Digitized by Google

ci somministra la quantità di calore assorbito per ogni centimetro quadrato della sua superficie o ciò che torna lo stesso quanto calore ha emesso un centim. quad. di pelle nella località esplorata. Ciò non ci basta ancora pel nostro scopo, perchè dobbiamo tener calcolo anche del tempo che il bulbo del termometro ha impiegato per passare da t a t'. Se esprimo questo tempo A in minuti e voglio ridurre il risultato all' unità di tempo, per la quale assumo l' ora, dovrò considerare che se in A minuti la quantità di calore assorbita è q ed in un' ora è Q, avrò il valore di Q, ossia della quantità di calore corrispondente all' ora, mediante la proporzione

$$A : q = 60 : Q$$

$$Q = q \frac{60}{A}.$$

Quindi moltiplicando la (I) per $\frac{60}{A}$ avremo quanto calore avrebbe emesso un centim. quad. di pelle di quella speciale località in un ora, ossia sarà

$$Q = \frac{60\,(cm + c'm')\,(t' - t)}{S \cdot A}.$$

E se invece di un centim. quad. di pelle ci credessimo autorizzati a ricavare da questa formola la quantità di calore che emetterebbe un decimetro quadro di pelle analoga, nello stesso tempo d' un ora essa diventerebbe

$$\frac{60\,(cm + c'm')\,t' - t)\,100}{S \cdot A}.$$

Per conseguenza la

$$\frac{(cm + c'm')\,(t' - t)}{SA}$$

ci fa conoscere quanto calore è stato realmente assorbito da 1

Digitized by Google

centim. quad. di superficie del bulbo del termometro in un minuto, e cioè quanto calore è stato emesso in un minuto da un centimetro quadrato di pelle.

Ora questa formula può decomporsi in due parti così:

$$\frac{cm + c'm'}{S} \times \frac{t' - t}{A}.$$

La parte

$$\frac{cm + c'm'}{S}$$

di questa formola è costante per lo stesso strumento.

La seconda è variabile ed è quella che moltiplicata per la costante dà il quantum di calore emmesso, in ogni speciale osservazione, da quella data superficie di pelle, in un minuto.

Quando noi abbiamo calcolata una volta per sempre la costante, noi non faremo in tutti i casi speciali che moltiplicarla per

$$\frac{t' - t}{A}$$

ed otteremo la quantità di calore emessa da una certa estensione di quella speciale superficie in un minuto. Questa variabile poi ci dimostra, se alcuno mai avesse potuto dubitarne, che la quantità di calore assorbita in un minuto dal termometro, è in ragione diretta della differenza fra le due temperature iniziale e terminale, ed in ragione inversa del numero dei minuti che il bulbo stesso al corpo è stato applicato.

Se noi trascurassimo la costante, o per comodità, di calcolo o per non averla potuta ottenere, potremo pur sempre colla valutazione della variabile ottenere dei numeri relativi che ci indicheranno la maggiore o minore emissione del calore della parte, ma questi numeri varieranno da termometro a termometro e saranno solo confrontabili coi dati forniti dallo stesso termometro.

Digitized by Google

In ogni caso non potrebbe mai fornirci un idea esatta della quantità vera del calore emesso (1).

(1) Grasset di Montpellier nella 1.ª seduta del congresso di medicina interna francese, tenutosi a Lione dal 25 al 27 ottobre 1894 (*Progr. Méd.* 3 novembre 1894) crede che sia utile avere alla mano un processo spicciativo per conoscere il potere emissivo del corpo pel calore specialmente nei febbricitanti. Egli crede che se ne possa fare un'idea considerando la rapidità di ascensione del mercurio nel termometro in un tempo dato. E perciò egli prende la temperatura dopo il 1.° minuto d'applicazione del termometro T', poi lascia il termometro fino che non salga più T. Egli somma assieme queste due temperature e ne fa una media dividendo per $2\ \frac{T' + T}{2}$. Questo numero indicherebbe la maggiore o minore emissione di calorico dal corpo. Mi pare che questo metodo pecchi fra l'altro nel non tener conto della temperatura iniziale che chiamerò T^0 del termometro: se T^0 è elevata T' sarà maggiore; se T^0 sarà molto bassa T' sarà minore. Quindi variabilità nei risultati anche collo stesso termometro.

Forse a qualche cosa di meglio si verrebbe col seguente ragionamento:

La quantità di calore emessa da un corpo è uguale al suo potere emissivo in funzione della ampiezza della supeficie che emette, ed in funzione del disequilibrio di temperatura fra i corpi circostanti e il corpo che emette calore. Potremmo dunque chiamando Q la quantità di calore emesso, E il potere emissivo del corpo, T la temperatura del corpo, t la temperatura del termometro al momento d'applicazione (essendo evidentemente $t < T$), e S la superficie di pelle che emette calore (questo S è uguale alla superficie utilizzabile del bulbo del termometro)

$$Q = ES(T - t)$$

tenendo a mente che ciò succede nel tempo 1 (un minuto).

Ora giacchè abbiamo sopra dimostrato che la quantità di calore assorbito dal termometro in un certo tempo d'applicazione è

$$Q = (cm + c'm')(t' - t)$$

potremo avere $$ES(T - t) = (cm + c'm')(t' - t)$$

e quindi $$E = \frac{(cm + c'm')(t' - t)}{S(T - t)}$$

se noi leviamo la costante $\frac{cm + c'm'}{S}$

resta la variabile $$E = \frac{t' - t}{T - t}$$

che dovrebbe indicare non in modo assoluto, ma relativo il potere emissivo del corpo.

Ma qui però c'è un errore fondamentale, poichè si ammette come trasmissione per radiazione, ciò che è trasmissione per contatto.

Digitized by Google

IV.

Constatata l'utilità delle formule su riferite, per la ricerca del calore emesso da una parte del corpo, noi dobbiamo applicare praticamente questo metodo. Per poter avere da esso risultati attendibili, occorre però risolvere alcune quistioni preliminari che facilmente si presentano.

Prima di tutto: quale sarà la temperatura iniziale del calorimetro quando lo applicheremo alla pelle?

È ovvio comprendere come a determinare la quantità del calore assorbito dal calorimetro, specialmente nei primi minuti, abbia una influenza notevolissima la differenza che passa tra il suo calore e quello della pelle di cui viene a contatto. Se la differenza sarà grande, il calorimetro assorbirà nello stesso tempo assai più calore, che se la differenza fosse molto piccola.

Nessuna importanza ha questo fatto, quando noi sperimentiamo su corpi inorganici che hanno una speciale temperatura, la quale va diminuendo man mano che il calorimetro acquista calore, mentre poi non ci preoccupiamo del tempo che ha impiegato l'esperimento a compiersi.

Ma nel caso di sperimentare su un animale o su un uomo, che sono una continua sorgente di calore, bisogna tener calcolo del tempo impiegato, perchè in questo caso, la temperatura del corpo che si studia, non diminuisce sensibilmente, mentre cede continuo calore al calorimetro.

Questa difficoltà del resto può farsi per qualunque calorimetro applicato anche intorno al corpo d'un animale o a parte di esso. Se noi applicheremo il calorimetro ad una temperatura più bassa della temperatura ambiente che circonda il soggetto d'esperimento, o la parte sperimentata, noi creeremo una condizione artificiale al soggetto o alla sua parte e lo obbligheremo per la legge di Newton ad emettere da prima maggior quantità di calore.

Se noi applichiamo al corpo il calorimetro colla stessa tem-

Digitized by Google

peratura dell' ambiente, non ci saremo ancor messi (nel nostro caso di un calorimetro circondato da una parte di corpo) nelle condizioni naturali in cui si trova il corpo, perchè al corpo sono applicate le vestimenta che hanno evidentemente una temperatura più alta dell'ambiente, e alle parti scoperte è aderente uno strato d' aria che per lo più ha una temperatura ancora superiore a quella dell' ambiente.

Per essere precisi noi dovremo dunque applicare il nostro termometro calorimetro, nelle parti coperte, alla temperatura degli oggetti di vestiario, nelle parti scoperte alla temperatura dello strato d' aria aderente immediatamente alla parte.

Per fare queste determinazioni occorre un termometro sensibilissimo e a bulbo molto piccolo, mentre invece per la determinazione calorimetrica, occorre un termometro a bulbo piuttosto grosso, perchè sia maggiore il tempo che egli impiega ad arrivare alla temperatura finale.

Sarà pure necessario di sperimentare in località dove non siano correnti d' aria, perchè queste evidentemente altererebbero i risultati degli esperimenti.

La seconda difficoltà che dobbiamo risolvere è la seguente.

Dobbiamo noi lasciare il calorimetro applicato per tutto il tempo che occorre per darci la temperatura vera e reale del corpo, cioè fino a quando il calorimetro non assorbe più calore, essendosi messo in equilibrio colla temperatura della parte sperimentata, oppure dobbiamo levarlo e notare la temperatura che ha raggiunto in un tempo molto minore?

Io credo che si debba notare la temperatura che acquista il nostro termocalorimetro applicato per pochi minuti e sospeso l' esperimento prima che abbia raggiunta la temperatura vera del corpo o della parte sperimentata.

E la ragione è questa: Per molti accurati esperimenti che ho eseguito mi sono convinto che nel primo e nel secondo minuto, l' ascesa del termometro è più rapida: e che per salire gli ultimi due o tre decimi e mettersi in equilibrio colla temperatura del corpo, impiega quasi tanto tempo quanto ne è occorso in principio per due o tre gradi.

Digitized by Google

V.

Allo scopo di mettere in pratica questi principii mi rivolsi al sig. VICTOR CHABAUD di Parigi rilevatario della casa ALVERGNIAT Freres onde mi fabbricasse un termometro calibrato che fosse addatto al mio scopo.

Dopo alcuni mesi, avendosi dovuto ricuocere lo strumento, per evitare lo spostamento dello zero, mi fu mandato il termometro che fu di piena mia soddisfazione. E qui descrivo il mio termometro.

1.° — La bacchetta del termometro è lunga . . cm. 27
Ha un diametro di . . . . . mm 5.2
* Pesa . . . . . gr. 17.025 (1)

È graduata sotto zero fino a — 2; sopra 0 dopo un piccolo rigonfiamento, da 24° a 47°. Ogni grado è diviso in decimi che riescon larghi ciascuno $\frac{4}{5}$ di millimetro per cui è possibile valutare ad occhio, anche le frazioni di decimo di grado.

2.° — Il bulbo è perfettamente sferico
* Il peso del suo mercurio è . . . . . gr. 15.975
* Il peso del vetro del bulbo è . . . . . gr. 1.190
Il volume del mercurio è di . . . . . cm.^{3} 1.1746
Il volume del vetro del bulbo . . . . . cm.^{3} 0.397
Il volume di tutto il bulbo è . . . . . cm.^{3} 1.5716
Il diametro del bulbo è . . . . . mm. 14.44

La superficie della sfera *bulbo* di diam. mm. 14,44 è di mm.^{2} 654.7327 ossia di centim. quad. 6.547327.

La superficie di sezione della bacchetta che occupa una piccola calotta sferica del bulbo, tanto piccola che può considerarsi quasi piana, è di centim. quad. 0.212264.

(1) Il peso che si otterrebbe calcolando la lunghezza e la circonferenza della base, prendendo 3 per peso specifico del vetro e calcolando la bacchetta massiccia. sarebbe 17.19338. La diminuzione reale è dovuta al tubo capillare e ai due rigonfiamenti uno terminale e uno fra i 2° e i 24° che ha questo termometro.

Digitized by Google

Levando questa piccola superficie dalla superficie totale della sfera bulbo, resta di superficie utilizzabile di questa per assorbire calore cm.^{2} 6.335.

I dati segnati con asterisco * mi sono stati forniti dal fabbricatore. Tutti gli altri li ho io rilevati col calcolo e quando si poteva col calcolo avvalorato dalla misura diretta. In una appendice in fine per chi potesse desiderarli, riporterò per esteso i calcoli fatti, per trovare tutti gli elementi di questo termometro.

Con questi dati e ricordando che

il peso specifico del mercurio è	13.6
il peso specifico del vetro	3.0
il calore specifico del Hg è	0.032
il calore specifico del vetro	0.19769

ne abbiamo abbastanza per tradurre in numeri concreti le nostre formule.

La formula fondamentale che ci dà quante calorie sono state realmente assorbite da 1 centim. quad. di superficie del bulbo del calorimetro in un minuto è

$$\frac{cm + c'm'}{S} \times \frac{t' - t}{A}.$$

Qui basta calcolare, una volta per tutte, la costante che dà

$$\frac{cm + c'm'}{S} = 0{,}00011770.$$

Questo è il numero per cui si deve moltiplicare

$$\frac{t' - t}{A}$$

(variabile) per avere la quantità di calore assorbito da 1 centim. quad. di superficie del bulbo del calorimetro in un minuto, e la quantità di calore emesso nello stesso tempo da 1 centim. quad. di pelle.

Se si vuol sapere proporzionatamente, quanto questa ne avrebbe emessa in un ora si adoprerà la costante, × per 60 il

Digitized by Google

che darà

$$0.0001177 \times 60 = 0.0070620.$$

E se si volesse estendere anche di più valutando l'emissione di un decim. quad. di pelle in un minuto (pelle che emetta come quei 6 centimetri stati in contatto col bulbo del calorimetro) bisognerà moltiplicare la formula fondamentale per cento cioè:

$$0.0001177 \times 100 = 0.01177.$$

E se non si vorrà sapere solo per un minuto ma per un ora quanto avrebbe emesso un decimetro quadro di pelle nelle stesse condizioni del centim. calcolato per un minuto, la costante diventerà 60 volte più grande e sarà:

$$0.01177 \times 60 = 0.70620.$$

Se moltiplichiamo ancora per 24

$$0.70620 \times 24 = 16.9448.$$

Questo numero darà in funzione della variabile, il quantitativo di calore emesso dalla pelle in un giorno da un decimetro quadrato di essa superficie.

In questo studio io mi sono servito della grande caloria. Chi volesse servirsi della microcaloria ($\frac{1}{1000}$ di caloria) per computi esatti del calore emesso da piccole parti del corpo, non avrebbe che a moltiplicare per mille i numeri precedenti: e la costante si trasformerebbe così

per	1	centim. quad	e per un minuto. . . .	0.1177
»	1	» »	e per 60 minuti	7.062
»	1	decim. quad.	e per un minuto. . . .	11.77
»	1	» »	e per un ora	706.20

Questi numeri moltiplicati per la variabile

$$t' - t$$

daranno la quantità di calore emesso in microcalorie

Digitized by Google

VI.

Fra i molti ed importanti argomenti che si presentano da risolvere, avendo fra mano un mezzo che vi possa dare una risposta attendibile, scegliamo per primo quello che riguarda la quantità di calore emesso dall'uomo nelle 24 ore da tutta quanta la superficie della pelle, come quello che è stato più studiato dai Fisiologi.

Il Landois (1) riporta i calcoli di Helmholtz fatti valutando la quantità di CO^2 espirato nelle 24 ore e la quantità di idrogeno bruciato nello stesso tempo. Da questo risulterebbe che la quantità di calore prodotta dal corpo sarebbe di 2732 calorie (macrocalorie o calorie vere): di queste ne sarebbero emesse per la pelle il 75 o l'80 per cento.

Riporta ancora i calcoli di Dulong che si basano sul fatto che 1 gr. d'idrogeno bruciando produce 34,46 calorie e 1 gr. di carbonio 8,04 calorie, e viene alla conclusione che l'uomo fabbrica in un giorno 2464 calorie, delle quali 1792 irradia per la cute, sicchè per questa ne emette il 77 % circa.

Riporta lo stesso Landois da ultimo, i calcoli di Frankland il quale avendo bruciato direttamente nel calorimetro le sostanze alimentari trovò che

1 gr. d'albumina	dà	4.998 calorie
1 gr. di glucosio	»	3.277 »
1 gr. di grasso	»	9.069 »

Il Frankland nota però, e giustamente, che l'albumina viene trasformata soltanto in urea e perciò bisogna levare il calore di combustione di quest'ultima, cosicchè per un grammo di albumina si avrà

1 gr. albumina	4.263 calorie

(1) L. Landois, *Manuale di Fisiologia dell'uomo*, traduzione sull'8.ª edizione tedesca — Milano, F. Vallardi edit. 1895.

Digitized by Google

Con questi dati egli conclude ragionevolmente che con diversa alimentazione vi deve essere diverso sviluppo di calore nel corpo. Ed invero RANKE ottenne:

con vitto carneo	2779.524 calorie
con vitto privo di N.	2059.506 »
con vitto misto	2200.000 »
Stando un giorno a digiuno e consumando il materiale accumulato di riserva	2012.816 »

Secondo il GAERTNER (1)

1 gr. d'albumina	produce	4.2	calorie
1 gr. d'idrato di carbonio . . .	»	4.1	»
1 gr. di grasso	»	9.4	»

Lo stesso autore viene alla conseguenza che l'uomo in riposo produce al giorno 2300 calorie e l'uomo con un lavoro pesante 3400.

Siccome poi il corpo evapora circa 900 gr. d'acqua al giorno pei polmoni e con questa disperde il 25% del suo calore, così il calore emesso dalla pelle sarebbe solo il 75% del sopranotato.

Secondo DUVAL (2) il calore prodotto dall'organismo umano in 24 ore varia da 3250 a 2700 calorie a seconda dello stato di riposo o di movimento, perchè l'uomo produce come dimostrò HIRN 112 calorie per ora in riposo, e 271 durante il movimento.

Tutti questi dati sono abbastanza concordanti e rigorosamente ricavati perchè noi possiamo fidarcene. E possiamo quindi concludere che se il 75% del calore prodotto è solo quello che spetta alla emissione cutanea noi dovremo avere col nostro termocalorimetro delle cifre che si avvicinino a queste.

Stabiliamo intanto che l'emissione del calore per la pelle sarebbe dunque da 2025 al giorno a 2437.

---

(1) Gaertner, *Manuale d'igiene*, tradotto dal Prof. Maggiora, Milano, F. Vallardi, 1894.

(2) Duval Mat., *Cours de Physiologie* — Paris, Librerie Bailliere, 1892.

Digitized by Google

Per fare questo studio mi sono servito d'un uomo robusto di 44 anni del peso di 70 Kilogr. della statura di 163 centimetri, uomo che essendo in posizione agiata non si occupa di lavori manuali faticosi.

La sera del 12 giugno '95 alle ore 20 egli dopo aver pranzato alle 18 ed aver fatto una passeggiata per la città si preparava ad andare a letto quando io feci su di lui i miei esperimenti. La temperatura della camera era 24°.6. La temperatura dell'individuo presa alla sua bocca era 37°.6. — Il numero delle pulsazioni 78 p. minuto. — Il numero delle respirazioni 18.

1.° Il primo esperimento lo feci applicando il mio termo calorimetro nella fossa sopra clavicolare, facendo tenere piegato il collo in modo che tutto il bulbo fosse involto dalla pelle.

La temperatura dell'aria in contatto colla parte sperimentata era 34°.0. Il termocalorimetro fu applicato quindi a 34° temperatura che si ottenne facilmente con un po' di riscaldamento colla mano e col fiato della bocca.

L'ascensione della temperatura si fece così:

Dopo il 1.°	minuto	35.6
» il 2.°	» . . .	36.5
» il 3.°	»	37.0

e qui sospesi l'esperimento.

La formula variabile

$$\frac{t' - t}{a} \text{ diventava } \frac{3}{3} = 1$$

Questo numero moltiplicato per la costante 16.9448 che ci dà quanto calore è emesso da un decim. quad. di pelle in analoghe condizioni di quella esplorata e durante le 24 ore dava pel nostro caso

calorie 16.9448.

Descrivo brevemente i successivi esperimenti.

2.° Applico il termometro all'ascella a 35°.0. La temperatura della camicia in questa regione era 35°.0.

Digitized by Google

La temperatura sale così

Dopo il 1.° minuto	35.7
» il 2.° »	36.1
» il 3.° »	36 3

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{36.3 - 35}{3} = \frac{1.3}{3} = 0.43$$

$$0.43 \times 16.9448 = 7.287$$

che sono calorie emesse dalla ascella per decim. quad. e per giorno.

3.° Applico il termometro a 35° alla piegatura del gomito. La camicia in questa regione aveva appunto 35°.0 di temperatura.

La temperatura sale così

Dopo il 1.° minuto	35.8
» il 2.° »	36.2
» il 3.° »	36.4

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{36.4 - 35}{3} = \frac{1.4}{3} = 0.47$$

$$0.47 \times 16.9448 = 7.964$$

che sono calorie emesse dalla regione della piega del gomito.

4.° Applico il termometro alla mano. La temperatura dell'aria vicinissima alla mano non sale oltre 31.2. — Applico il termometro alla mano che faccio chiudere a 31°.2.

La temperatura sale così

Dopo il 1.° minuto	35.9
» il 2.° » . . .	36.9
» il 3,° »	37.3

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{37.3 - 31.2}{3} = 6.1 : 3 = 2.03$$

$$2.03 \times 16.9448 = 34.3969$$

che sono le calorie per decim. quad. che emetterebbe la mano in un giorno.

5.° Applico il termometro fra coscia e scroto. La località

Digitized by Google

è leggermente umida perchè sudata. — La camicia segna 35°.0. Applico il termometro a 35°.

La temperatura sale così

Dopo il 1.° minuto 36.7
» il 2.° » 37.0
» il 3.° » 37.2

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{37.2 - 35}{3} = \frac{2.2}{3} = 0.73$$

$$0.73 \times 16.9448 = 11.5444$$

che son calorie che emette un decim. quad. di pelle di questa regione in 24 ore.

6.° Applico il termometro alla piega del poplite. La temperatura delle mutande è 35°.0 Applico il termometro a 35°.

La temperatura cresce così

dopo il 1.° minuto 35.9
» il 2.° » 36.2
» il 3.° » 36.3

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{36.3 - 35}{3} = \frac{1.3}{3} = 0.43$$

$$0.43 \times 16.9448 = 7.287$$

che sono le calorie che emette un decim. quad. di pelle del poplite in 24 ore.

7.° Faccio mettere assieme le due piante dei piedi appena spogliate delle calze in modo che la prominenza della parte sottostante all'alluce del piede destro, combini colla concavità plantare del piede sinistro. Fra loro colloco il termometro.

La temperatura delle calze sulla pianta appena allontanate dal piede era 34°.5. Quella delle scarpe 30°.0. Applico il termometro a 34°.5.

La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto 34.8
» il 2.° » 35.1
» il 3.° » 35.3

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{35.3 - 34.5}{3} = 0.8 : 3 = 0.23$$

$$0.23 \times 16.9448 = 3.8973$$

Digitized by Google

che sono calorie emesse da un decim. quad. di pelle della pianta del piede in 24 ore.

La mattina seguente alle 6 antimeridiane continuo, anzi ripeto le stesse valutazioni calorimetriche sullo stesso individuo. Esso ha dormito bene dalle 23 in cui andò a letto fino alle 4 ant. Poi è restato in letto sonnecchiando. In questo tempo ha bevuto in una sol volta circa 250 gr. d'acqua. È leggermente sudato. La temperatura della stanza che è restata a finestre chiuse è 23°.0. La temperatura della bocca dell'individuo è 37°.2. È in letto coperto dalla camicia e da un semplice lenzuolo senza rimboccatura, nè alla parte superiore nè alla inferiore. La temperatura dell'aria sotto i lenzuoli e lontana un po'dal corpo è 30°.

1.° Al collo. — La temperatura dell'aria, del lenzuolo e della camicia che lo toccano è di 33°.0. Applico il termometro nella località di ieri sera a 33°.

La temperatura sale così

dopo il	1.°	minuto	35.6
» il	2.°	»	36.1
» il	3.°	»	36.4

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{36.4 - 33}{3} = 3.4 \qquad 3.4 : 3 = 1.13$$

$$1.13 \times 16.9448 = 19.148$$

calorie per decim. quad. di pelle del collo e per giorno.

2.° Applicazione del calorim. all'ascella. — Temperatura della camicia 35°.0. Applicazione del calorim. a 35°.

La temperatura si comporta come segue:

dopo il	1.°	minuto	36.4
» il	2.°	»	36.7
» il	3.°	»	36.8

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{36.8 - 35}{3} = 1.8 \qquad 1.8 : 3 = 0.6$$

$$0.6 \times 16.9448 = 10.167$$

calorie che emetterebbe un decim. quad. di pelle dell'ascella in 24 ore.

Digitized by Google

3.° Applicazione del calorimetro alla piega del gomito. Temperatura della camicia 34°.0. Calorim. a 34°.

Andamento della temperatura.

dopo il 1.° minuto 35.2
» il 2.° » 35.6
» il 3.° » 35.9

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{1.9}{3} = 1.9 : 3 = 0.63$$

$$0.63 \times 16.9448 = 10.675$$

La piega del gomito emette dunque 10.675 calorie per decim. quad. e per giorno.

4.° Applicazione alla mano. Temperatura dell'aria contenuta nel cavo della mano ripiegando un po' le dita 31°.0. Il termocalorim. si applica a 31°.

Andamento della temperatura

dopo il 1.° minuto 33.3
» il 2.° » 34.4
» il 3.° » 34.9

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{3.9}{3} = 3.9 : 3 = 1.3$$

$$1.3 \times 16.9448 = 22.02$$

calorie che emette un decim. quad. di pelle di mano nelle 24 ore.

5.° Applicazione fra coscia e scroto. Temperatura della camicia in vicinanza della parte 35°.0. Applico il calorimetro a 35°.

Andamento della temperatura

dopo il 1.° minuto 36.7
» il 2.° » 37.0
» il 3.° » 37.1

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{37.1 - 35}{3} = 2.1 : 3 = 0.7$$

$$0.7 \times 16.9448 = 11.861$$

calorie che emette un decim. di pelle fra coscia e scroto in un giorno.

6.° Applicazione al poplite. Temperatura del lenzuolo e dell'aria ambiente sotto il lenzuolo 32°. Applicazione del calorim. a 32.

Digitized by Google

Andamento della temperatura

dopo il 1.° minuto 33.2
» il 2.° » 33.6
» il 3.° » 34.0

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{34 - 32}{3} = 2 : 3 = 0.66$$

$$0.66 \times 16.9448 = 11.184$$

calorie emesse da un decim. quad. di pelle del poplite.

7.° Applicazione fra le piante dei due piedi come è descritto nel 7.° esperimento della sera precedente. Temperatura dell'aria ambiente sotto il lenzuolo e del lenzuolo in contatto dei piedi 32.°0. Applicazione del calorim. a 32°.

Andamento della temperatura

dopo il 1.° minuto . . . . 34°
» il 2.° » 34.6
» il 3.° » 34.9

$$\frac{t' - t}{a} = \frac{34.9 - 32}{3} = \frac{2.9}{3} = 0.93$$

$$0.93 \times 16.9448 = 15.759$$

15.759 calorie emesse da un decim. quad. di pelle della pianta dei piedi.

(L'individuo ha i piedi sempre caldi anche d'inverno, meno rare eccezioni).

Riassumendo i risultati di questa duplice serie di esperimenti e prendendone le medie si avrebbe:

1.ª Serie — *Sera*

collo	16.944
ascella	7.287
piega del gomito	7.964
mano	34.397
tra coscia e scroto	11.544
poplite	7.287
piedi (pianta dei)	3.897
	89.320

$$89{,}320 : 7 = 12.76$$

La media quindi dei risultati delle esplorazioni della sera da-

Digitized by Google

rebbe che quel corpo emetteva in media 12.76 calorie per decim. quad. e per 24 ore. Ammettendo con SAPPEY che la superficie d'un corpo umano adulto sia di 150 decim. quad. si avrebbe avuto per tutto il corpo e per le 24 ore

$$150 \times 12.76 = 1914 \text{ calorie.}$$

2.ª Serie — *Mattina*

collo	19.148
ascella	10.167
piega del gomito	10.675
mano	22.020
tra coscia e scroto . .	11.861
poplite	11.184
piedi	15.759
	100.814

$$100.814 : 7 = 14.402.$$

La media quindi dei risultati della esplorazione della mattina darebbe che quel corpo emetteva in media calorie 14,402 per decim. quad. in un giorno. Anche qui moltiplicando per 150 si avrebbe quanto calore nelle 24 ore sarebbe emesso da tutta la superficie del corpo

$$14.402 \times 150 = 2160 \text{ calorie.}$$

I risultati di queste due serie di esperienze concordano abbastanza bene coi risultati ottenuti da altri scienziati per altra via, cosicchè noi possiamo anche da ciò ricavare la convinzione che il metodo adoperato può servire per valutare sempre e con precisione il calore emesso da una parte del corpo.

Infatti HELMHOLTZ darebbe

	Emesse per la cute . . .	2049	calorie
DULONG . . .	Emesse per la cute . . .	1792	»
GAERTNER . .	Emesse per la cute . . .	1725	» in riposo
		2450	» con lavoro pesante
DUVAL	Emesse per la cute . . .	2025	» in riposo
		2437	» in movimento

Digitized by Google

Secondo i miei esperimenti avrei ottenuto

1914 » alla sera
2160 » alla mattina

numeri che corrispondono abbastanza bene a quelli dati dagli autori per un uomo in riposo.

VII.

Questa doppia serie di 14 esperimenti eseguiti col mio termo calorimetro ci può suggerire facilmente alcune domande.

1.° Perchè l' emissione del calore è risultata minore nella sera che non nella mattina? Il riposo in letto non avrebbe dovuto diminuire il numero delle calorie emesse?

Io credo che sia facile rispondere. Ammesso che si disperde più calore quando si lavora di più e meno quando si riposa non ne viene per questo che tali due condizioni siano le sole che variano l' emissione del calore.

Non dimentichiamo che il nostro soggetto d' esperimento alla sera aveva una temperatura di 37°.6, al mattino l' aveva di 37°,2 e che la temperatura della giornata era piuttosto calda se fra la sera e la mattina variò fra 24°.6 e 23°.

Ora si capisce come alla sera coperto dagli abiti riscaldati l' emissione del calore dovesse essere scarsa in tutto il corpo, meno che nella mano scoperta che era di 34,397 calorie per decim. quad.: e come la mattina colla sola camicia ed un lenzuolo leggiero sul corpo, l' emissione di calore dovesse essere maggiore, tanto vero che restando invariate tutte le altre condizioni, al mattino la temperatura era anche un poco più bassa.

L' essere nella sera, quando l' individuo fu esplorato, nel periodo della digestione stomacale, non può aver valore per questa quistione, perchè egli avendo fatto un altro pasto abbondante al mezzodì, aveva già materiali combustibili nel sangue

Digitized by Google

provenienti dalla colazione. E la mattina dopo egli bruciava poi quelli introdotti col pasto delle 18.

2.° Osservando questi esperimenti si vede già, quello che è stato enunciato da altri, che le parti periferiche e scoperte emettono più calore delle parti della nostra pelle che restano coperte. Ora si domanda: come mai la pelle della pianta dei piedi emetteva nella sera solo un po' meno di 4 calorie per decim. quad. in confronto di 34 e più che ne emetteva la mano?

Ricordiamo per ciò che la temperatura dei piedi come quella di altre parti periferiche non sale mai o quasi mai alla temperatura interna. Che ciò non pertanto le calze appena allontanate dalla pianta erano a 34°.5 e che la temperatura dell' aria delle scarpe era a 30. Queste in modo speciale dovevano impedire molto la dispersione del calore che subivano i piedi e quindi la pianta del piede, considerata anche la temperatura esterna, doveva emettere poco calore.

La stessa pianta dei piedi poi ritorna al suo stato normale nella esplorazione del mattino, in cui i piedi completamente nudi e ricoperti da un solo sottile lenzuolo, emettono già più di 15 calorie per decim. quad. di pelle e fatto il computo per le 24 ore, molto più della ascella e della località fra coscia e scroto che sono per la loro stessa conformazione anatomica molto disposte a perdere poco calore.

3.° L' ultima obiezione che si potrebbe fare, ma alla quale è molto facile il rispondere, è questa. Se alla sera si emetteva minor calore dall' individuo sperimentato, che non alla mattina, perchè la mano nella sera emetteva 34 e più calorie per decim. quad. e per 24 ore, mentre nel mattino ne emetteva soltanto 22 nelle stesse condizioni? È evidente che nella sera la mano doveva emettere più calore trovandosi sempre a contatto d' un aria che quantunque a 24°.6 veniva spesso cambiata, meno lo straterello per adesione assolutamente aderente alla mano. Mentre al mattino le mani erano sotto i lenzuoli ove la temratura dell' aria era 30° e dovevano quindi certamente perdere meno calore.

Digitized by Google

VIII.

Si potrebbe anche domandare perchè ho scelto 3 minuti per la durata di tutti i miei esperimenti, e perchè non 4 o 2, e la risposta è questa, che per il volume del mio termometro, e per il tempo che esso impiegava ad arrivare alla temperatura del corpo, dopo lunga esperienza mi parve la più utile. Con termometri di dimensioni diverse si potrà addottare un altro tempo. I primi miei studii li feci lasciando il termometro in posto fin tanto che fosse arrivato alla temperatura del corpo. Con ciò si impiegavano 8 o 10 minuti o anche più. Ma mi accorsi ben presto che era un metodo sbagliato perchè come ho detto di sopra, in causa della differenza di calore fra il calorimetro e il corpo nei primi minuti l'ascesa del termometro è più rapida, negli ultimi si fa lentissima. E quando il calorimetro è a 37°, e il calore del corpo è 37°.2 per esempio le indicazioni del calorimetro per la quantità di calore emesso in funzione del tempo, non possono che esser prive di interesse pratico, perchè mai si trova il nostro corpo a 37°.2 a contatto di abiti o di un atmosfera scaldata a 37°.

Stando rigorosamente a questo principio si avrebbe dovuto lasciare applicato il termometro solo 1 minuto, e da quell'aumento ricavarne le calorie emesse dalla parte in quel tempo. Ma nemanco questo mi pare che possa soddisfare al nostro scopo. Perchè è vero che io applico il termometro alla temperatura degli abiti che coprono la parte, o dell'aria che più da vicino la ciconda, ma per esplorare questo calore io ho bisogno di allontanare gli abiti dalla parte, o di non toccare mai la pelle nelle esplorazioni delle parti scoperte, così la mia temperatura che verifico col termometro piccolo, e che deve essere l'iniziale del termometro calorimetro, può anche essere inferiore al vero, e darmi una emissione, nel 1.° minuto, maggiore del vero. Quando il termometro ha già raggiunto, dopo l'applicazione, una tem-

Digitized by Google

peratura un po' più elevata è allora principalmente che si fanno gli scambi di calore fra parte e termometro come propriamente nel vivo, fra il corpo e l'aria ambiente o gli abiti. Se poi continuiamo ancora oltre i 3 o 4 minuti, con un termometro della grandezza del mio, si comincia già come dicevo ad avvicinarsi troppo alla temperatura del corpo e la emissione di calore per parte della pelle diventa minore del vero.

Questa è la ragione dei miei tre minuti. Ma siccome stà sempre la verità della nostra formula qualunque sia A, cioè il tempo d'applicazione, così risultati attendibilissimi purchè non si pretendano d'esattezza matematica si hanno pure adoperando un tempo maggiore d'applicazione del termo calorimetro.

Anzi nel primo anno in cui ho compito questi miei studii lasciavo sempre in posto il termometro 5 minuti e siccome non notavo nelle cartelle il procedere della temperatura, così ho perduto l'utilità del risultato di quasi un centinaio d'esperimenti. Ma se io ne scelgo e ne presento alcuni agli studiosi si vedrà che anche quelli potevano servire per risolvere un numero notevolissimo di problemi di calorimetria.

1.° Esperimento fatto il 15 giugno 1894. — *Ascella.* Temperatura ambiente 20° — Soggetto d'esperimento. Uomo sano e robusto d'anni 40, statura 162 cent. — Temperatura della bocca 37°,6 — Temperatura degli abiti in contatto coll'ascella 34°

$$t = 34.0 \qquad t' = 36.1 \qquad A = 5$$
$$t' - t = 2.1 \qquad 2.1 : 5 = 0.42$$
$$0.42 \times 16.9448 = 7.1168$$

calorie per decimetro quadrato di pelle e per giorno.

2.° Esperimento — 15 giugno 1894. Stesso uomo dell'esperimento precedente. *Mano.*

$$t = 29.0 \qquad t' = 36.5 \qquad a = 5$$
$$t' - t = 7.5 \qquad 7.5 : 5 = 1.5$$
$$1.5 \times 16.9448 = 25.42$$

calorie per decim. quad. di pelle e per giorno.

Digitized by Google

3.° Esperimento — 15 giugno 1894. Stesso individuo dell'esperimento precedente. Fra *coscia* e *scroto*

$t = 34.2$ $t' = 36.6$ $t' - t = 2.4$ $2.4 : 5 = 0.48$

$0.48 \times 16.9448 = 8.133$

calorie per decimetro quadrato e per giorno.

Chi guardi questi tre esperimenti e li metta a confronto coi tre corrispondenti della 1.ª serie, precedentemente riferita, vedrà la poca differenza ottenuta

		Esperim. di 3 min.	Esperim. di 5 min.
all'ascella	calorie	7.287	7.117
alla mano	»	34.397	25.42
fra coscia e scroto	»	11.54	8.133

E si noti la diversità fra i due individui e la diversità anche di temperatura in cui si trovavano.

In conseguenza di questo, io riferirò per lo più esperimenti fatti in tre minuti nel prossieguo di questi studii, ma considererò capaci di dare buone indicazioni anche quelli fatti in 5 minuti, quando non possa più avere l'opportunità di rifarli.

IX.

Una seconda serie di esperimenti ho fatto sulla calorimetria nei bambini e prima di tutto nei neonati.

Si sa già che i piccoli animali sviluppano a volume uguale più calore che i grossi. La quantità di calore emesso da un animale cresce a vero dire a misura che l'animale cresce di volume e di peso, ma in rapporto all'unità di peso, diminuisce col crescere dell'animale stesso.

Queste cose, che sono già state messe fuori di dubbio da sperimentatori precedenti, dipendono da che, ciò che determina la maggiore o minore dispersione del calore nell'uomo e negli animali, non è proprio il loro volume, o la loro massa, ma è la

Digitized by Google

superficie esterna del loro corpo. In confronto del loro volume gli animali piccoli hanno una superficie molto estesa di pelle, i grossi animali l' hanno invece molto scarsa.

Secondo Richet (l. c.) i bambini a parità di superficie emettono maggiore calore degli adulti. Questo concetto è in gran parte accettato da Langlois (1) che dice: Un fanciullo di 7 Kilogr. perde per unità di peso, 2 volte e mezzo più calore che un adulto di 60 Kilogr., ma questa differenza dispare quando si osservano quantità uguali di superficie.

Io mi riservo in seguito di controllare questa asserzione. Intanto ciò premesso occupiamoci dei neonati.

Quando ho trattato degli adulti ho ammesso senza discussione che la superficie media del corpo d' un uomo adulto sia di 150 centim. quad. Si capisce che questa misura è molto relativa e deve notevolmente variare per la statura, per la obesità ecc. Comunque sia, dovendoci ora occupare dei bambini conviene prima di tutto conoscere la superficie vera della loro pelle. Ho esaminato molti libri di anatomia e di fisiologia su questo argomento, e a dir vero ho trovato assai poco; sicchè mi sono deciso a fare alcune ricerche originali prima di intraprendere lo studio della calorimetria nei bambini.

X.

Per valutare con grande approssimazione nei casi speciali la superficie del corpo d' un neonato o d' un bambino pare a me che si possano usare due modi, un po' lunghi a dir vero ma dai quali si ottengono risultati abbastanza precisi e sempre comparabili fra loro.

(1) Langlois, *Études de la chaleur de l' homme*, nel Journal de l' anat. et de la phisiologie, juillet 1887.

Digitized by Google

In un primo modo che chiamerei della proiezione, io prendo un ampio foglio di carta che distendo su un tavolo. Faccio prendere il bambino nudo da due assistenti che me lo tengono fermo sul foglio di carta ed io rapidamente con un lapis tenuto perpendicolare alla carta contro la periferia del corpo, degli arti e del capo, disegno la proiezione di tutto il corpo del bambino sulla carta stessa.

Se si considera che in questo modo la proiezione di una sfera è un circolo massimo, e la proiezione di un cilindro o d'un cilindroide è un rettangolo, e che tutto il nostro corpo può essere ridotto a sfere e a cilindri con molta approssimazione, si vedrà che basterà praticamente moltiplicare per 4 la superficie della proiezione della testa e per 3 le altre superfici di proiezione dei cilindroidi che formano il resto del corpo per avere la superficie totale del corpo (1).

Ma si dirà: come si fa a valutare la superficie precisa di simili proiezioni che sono spesso irregolari e tutt'altro che riducibili a rettangoli precisi da potere matematicamente misurarli? Io misuro l'area con un planimetro, ma se mancassi di questo, addotterei il seguente metodo che dà, con sufficiente approssimazione quanto si cerca.

Esiste in commercio una carta sottilissima trasparente che chiamasi millimetrata. In essa sono segnate con linee sottilissime longitudinali e trasversali i millimetri quadrati, e con linee più grossette i centimetri quadrati. Un metro quadrato di questa carta costa pochissimo. Voi non dovete che sovrapporre alla proiezione, la carta millimetrata trasparente e voi contate con

(1) L'area d'un rettangolo che ha a per base e b per altezza è ab. La superficie curva d'un cilindro retto regolare che ha a per diametro della base e b per altezza è πab. Se gli arti fossero cilindri perfetti si dovrebbe moltiplicare direttamente la loro proiezione per π ossia 3.14, ma giacchè sono cilindroidi un po' schiacciati per cui la loro superficie verrà ad essere più piccola confrontata con quella di veri cilindri di ugual proiezione, credo che in pratica valga meglio preferire il numero 3.

Digitized by Google

molta facilità i centimetri ed i milimetri quadrati della vostra proiezione.

Facciamo un esempio pratico che io devo alla gentilezza del prof. GIOVANARDI.

Cadavere di bambino di 8 giorni, un po' denutrito. Peso Gr. 2250. Lunghezza 49 cent. La proiezione fatta come ho detto sulla carta dà

testa	cm.²	77
tronco con due linee che eliminano le spalle, e la linea della piega inguinale che elimina la coscia e parte della natica	»	204
arto superiore	»	64
arto inferiore	»	66

Nell' arto superiore è compresa la mano in supinazione a diti stretti, nell' arto inferiore il piede di profilo.

Con questi dati noi ricaviamo:

testa	77 × 4 = 308	cm²
tronco	204 × 3 = 612	»
arto superiore	64 × 3 = 192	»
altro arto superiore . . .	64 × 3 = 192	»
arto inferiore	66 × 3 = 198	»
altro arto inferiore . . .	66 × 3 = 198	»
Totale	1700	

Avrebbe quindi una superficie di 1700 centimetri quadrati ciò che torna 17 decimetri quadrati. Questa misura come vedremo è appena inferiore al normale che troveremo con mezzi più precisi in seguito, ma bisogna pensare che il bambino pesa solo 2250 gr., che è denutrito, e che è morto.

Per ritrovare col calcolo la superficie del corpo d' un bambino o d' un adulto occorre considerare: come una sfera il capo, da cui deve sottrarsi la base del cilindro collo, ed un cilindro il collo, il tronco, le braccia, le gambe colle mani e coi piedi. In questo modo basta prendere la circonferenza del capo, l' altezza di ciascun cilindro e la sua media circonferenza per poter valutare la superficie di ciascuna parte e quindi di tutto il corpo.

Digitized by Google

Se mi si obbietasse che queste parti non sono veri cilindri e che il nostro conto non è preciso, risponderei che l'inesattezza è poca davvero e lo dimostrerò a suo luogo.

Intanto ecco i risultati dei calcoli fatti:

N. 1. Bambino di giorni 3. Lunghezza cm. 49, peso gr. 3120.

circonf. del capo	cm.	35
» del collo	»	19
altezza » »	»	1
circonf. del tronco	»	33
altezza torace addom.	»	23
circonf. media arto superiore	»	9
lunghezza » »	»	20
circonf. media arto inferiore	»	13
lunghezza » »	»	21

Con questi dati ho ottenuto:

per la testa considerata come sfera	cm² 389.88	
meno la superficie della base del collo	» 28.73	
rimane come superficie vera della testa	cm²	361.15
pel collo	»	19.00
pel tronco	»	759.00
per i due arti superiori	»	360.00
per i due arti inferiori	»	546.00
	cm²	2045

ossia per tutto il corpo del neonato avrei trovato cm² 2045 pari a dm² 20.45.

N. 2. Bambina di giorni 3. Lunghezza cm. 48, peso gr. 2930.

circonf. del capo	cm.	34
» del collo	»	19
altezza » »	»	69
circonf. del tronco	»	33
lunghezza »	»	21
circonf. media arto superiore	»	9
lunghezza » »	»	20
circonf. media arto inferiore	»	12
lunghezza » »	»	21

Con questi dati ho ottenuto:

Digitized by Google

per la testa considerata come sfera	cm.² 368.32	
meno la superficie della base del collo	» 28.76	
rimane come superficie vera della testa . .	cm²	339
pel collo	»	17
pel tronco	»	693
per i due arti superiori	»	360
per i due arti inferiori	»	504
il che dà un totale di . .	cm²	1913

ossia di decim.² 19.13.

Io non ho prolungato ulteriormente queste ricerche sui neonati perchè mi pareva che bastassero.

I miei risultati sono dunque stati:

superficie del corpo del neonato morto di 8 giorni .	dm²	17.00
» » del neonato vivo di 3 giorni .	»	20.45
» » della neonata viva di 3 giorni.	»	19.13

Da che si può ricavare che la superficie del corpo del neonato varia secondo la statura e il peso da 18 a 20 dec. q.

Con questi dati passiamo a vedere i risultati dei miei studii calorimetrici.

XI.

1.° Esperimento — 2 gennaio 1894. Bambina di 3 giorni, lunghezza 48 cm., peso 2890 gr. — (Clinica ostetrica Prof. Fabbri). — Temperatura ambiente 14°. — Temperatura all'ascella 36°.3. — Temperatura della camiciola in contatto colla pelle 30°.0.

All'*ascella*. Applico il calorimetro a 30°.0. In 5 minuti sale a 35°.0.

$$t' = 35.0 \qquad t' - t = 5.0 \qquad 5 : A = 1$$
$$1 \times 16.9448 = 16.9448$$

Digitized by Google

dunque dall' ascella emette in un giorno e per decim. quad. calorie 16.94.

Al *poplite* — Applico il calorimetro a 30.0, in 5 minuti sale a 35.2

$$t' - t = 5.2 \qquad 5.2 : a = 1.04$$
$$1.04 \times 16.9448 = 17.623$$

dunque al poplite emette per decim. quad. e per giorno calorie 17.623.

Esplorando altre parti del corpo si ricavano presso a poco gli stessi risultati. Quindi una media di 17 calorie per giorno e per decim. quad.

Computando 19 decim. quad. in tutto il corpo si avrebbe un totale di emissione giornaliera di 323 calorie.

2. Esperimento — (Clinica ostetrica) — 2 gennaio 1894. Bambina di 7 giorni, lunghezza 49.5 cm., peso 3100 gr. — Temperatura ambiente 14°. — Temperatura ascellare 36°.9. — Temperatura della camiciola e degli involucri a contatto della pelle 30°.

All' *ascella*. Applico il calorimetro a 30°. In 5 minuti sale a 36°.6

$$t' - t = 6.6 \qquad 6.6 : 5 = 1.32$$
$$1.32 \times 16.9448 = 22.37$$

All' *inguine*. Applico il calorimetro a 30°. In 5 minuti sale a 36°.3

$$t' - t = 6.3 \qquad 6.3 : 5 = 1.26$$
$$1.26 \times 16.9448 = 21.35$$

Numeri presso a poco uguali ritrovo esplorando la mano e il poplite per cui conchiudo che la media emissione di calore in questo bambino è circa 22 calorie per decim^2 e per giorno.

Computando 19 decim. quad. in tutto il corpo si avrà $19 \times 22 =$ a 418 calorie per le 24 ore.

3.° Esperimento — (Clinica ostetrica) — 2 gennaio 1894. Bambino di 47 giorni, lunghezza 52 cm., peso 3450 gr.

Digitized by Google

allattato alla mammella. — Temperatura ambiente 14°. — Temperatura ascellare 37°.1. — Temperatura della camiciola e dei lenzuoli 31°.

All'*ascella*. Applico il calorimetro a 31. In 5 minuti sale a 36°.9

$$t' - t = 5.9 \qquad 5.9 : 5 = 1.18$$
$$1{,}18 \times 16.9448 = 19.99$$

si può dire che emette 20 calorie per decim. quad. e per giorno ammettendo 21 centim. quad. di superficie (per la sua età) si avrà che l'emissione totale sarà di $21 \times 20 = 420$ calorie per giorno.

In altre parti presso a poco lo stesso risultato. Mantengo quindi la media generale di 420 calorie per giorno.

4.° Esperimento — (Maternità) — 20 luglio 1895. Bambina di 3 giorni, allattata dalla madre, lunghezza 44 cm., peso gr. 2683. I diametri del capo dimostrano che non è a termine. — Temperatura ambiente 26°.5. — Temperatura della bocca 36°.9. — La bambina è in letto nuda col semplice lenzuolo, e una pezzuola fra le gambe. — Temperatura dell'aria circostante, la bambina sotto il lenzuolo, 33.°0.

All'*ascella*. Applico il calorimetro a 33°.0 per 3 minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto	35.7
» il 2.° »	36.1
» il 3.° »	36.5

$$t' \ 36.5 - t \ 33°0 = 3.5 \qquad 3.5 : 3 = 1.17$$
$$1.17 \times 16.9448 = 19.826$$

che rappresentano le calorie emesse in un giorno da 1 decim² di pelle.

Se si valuta a 17 i decim. quad. di pelle di tutto il corpo stante la lunghezza e il peso della bambina si avrà

$$19.826 \times 17 = 337.04 \text{ calorie al giorno.}$$

Digitized by Google

5.° Esperimento — (Maternità) — 20 luglio 1895. Bambino di 7 giorni, allattato al seno della madre, lunghezza 51 cm., peso 3250 gr. — Temperatura ambiente 26°.5. — Temperatura della bocca 37°. — Il bambino è in letto nudo coperto solo dal lenzuolo. La temperatura dell'aria sotto il lenzuolo è di 32°.

All' *ascella*. Applico il termocalorimetro all' ascella a 32° per 3 minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto	35.7
» il 2.° »	36.4
» il 3.° »	36.6

$t' - t = 4.6 \qquad 4.6 : 3 = 1.53$

$1.53 \times 16.9448 = 25.92$

25.92 calorie emesse dalla pelle da una superficie di 1 decim² in un giorno. — Se calcoliamo 20 decim² di pelle avremo

$$25.92 \times 20 = 518.40$$

ossia 518 calorie e mezzo in un giorno.

All' *inguine*. Applico il termocalorimetro a 32° per 3 minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto	35.3
» il 2.° »	36
» il 3.° »	36.2

$t' - t = 4.2 \qquad 4.2 : 3 = 1.4$

$1.4 \times 16.9448 = 23.723$

sarebbero dunque calorie 23.722 per decim² di pelle e per giorno il che moltiplicato per venti darebbe

$$23.723 \times 20 = 474.460$$

ossia 474.460 al giorno. In media 496.4, ossia quasi 500 calorie al giorno.

Digitized by Google

6.° Esperimento — (Maternità) — 20 luglio 1895. Bambina di 31 giorni, allattata al seno, lunghezza 50 cm., peso 3840 gr. — Temperatura ambiente 27°. — Temperatura della bocca 36°,8. La bambina è in letto nuda coperta dal solo lenzuolo. — Temperatura dell'aria sotto il lenzuolo 32°.

All'*ascella*. Applico il calorimetro a 32° per 3 minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto . . 35.8
» il 2.° » 36.4
» il 3.° » 36.7

$t' - t = 4.7 \quad 4.7 : 3 = 1.57$
$1.57 \times 16.9448 = 26.60$

26.60 dunque sarebbero state le calorie emesse da 1 decim² di pelle in un giorno. — Se calcoliamo 20 decim. quad. di pelle per tutto il corpo si avrebbe avuto un emissione giornaliera di 532 calorie.

All'*inguine*. Applico il termocalorimetro per 3 minuti a 32° La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto 35.5
» il 2.° » 36.2
» il 3.° » 36.4

$t' - t = 4.4 \quad 4.4 : 3 = 1.47$
$1.47 \times 16.9448 = 24.91$

calorie emesse da un decim² in un giorno $24.91 \times 20 = 498.20$ che sarebbero le calorie emesse in un giorno.

Qui la media supererebbe ancora le 500 calorie.

7.° Esperimento — (Maternità) — 1.° agosto 1895. Bambina di 3 giorni, allattata al seno, lunghezza 48 cm., peso 2930 gr.

(È la bambina di cui ho determinato la superficie totale del corpo in decim² 19.13 riportata a pag. 33).

Digitized by Google

Temperatura ambiente 26°. — Temperatura della bocca 37°.4. La bambina è in letto nuda coperta dal lenzuolo. La temperatura dell' aria sotto il lenzuolo è 34°.0.

All' *ascella*. Applico il calorimetro all' ascella a 34° per 3 minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto	36.8
» il 2.° »	37.0
» il 3.° »	37.2

$t' - t = 3.2 \qquad 3.2 : 3 = 1.07$

$1.07 \times 16.9448 = 18.131$

che sono calorie emesse da un decim. quad. di pelle per giorno. Questa bambina aveva 19.13 decim² di superficie cutanea: avrà emesso quindi in un giorno circa 350 calorie.

8.° Esperimento - (Maternità) — 1.° agosto 1895. Bambino lungo 49 cm., pesante 3120 gr.

(È il bambino di cui ho determinato la superficie totale del corpo in cm² 20,45 a pag. 33).

Temperatura ambiente 26°. — Temperatura della bocca 36°.6. Il bambino è nudo sotto il lenzuolo. L'aria sotto al lenzuolo ha 33°.0.

All' *ascella*. Applico il termocalorimetro a 33°. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto	35.8
» il 2.° »	36.2
» il 3.° »	36.4

$t' - t = 3.4 \qquad 3.4 : 3 = 1.13$

$1.13 \times 16.9448 = 19.15$

cioè 19.15 calorie per decim² e per giorno.

All' *inguine*. Temperatura dell' aria sotto il lenzuolo 33°.0. Applico il calorimetro a 33° per 3 minuti. La temperatura sale a 35°.6

$t' - t = 2.6 \qquad 2.6 : 3 = 0.87$

$0.87 \times 16.9448 = 14.74$

Digitized by Google

cioè 14.74 calorie per decim² e per giorno. Facendo la media fra il precedente risultato e questo abbiamo

$$19.15 + 14.74 = 33.89 \qquad 33.89 : 2 = 16.94.$$

Sapendosi che la superficie del corpo del bambino era 20.45, $16.94 \times 20.45 = 346.5$ calorie per tutto il corpo.

XII.

Riassumendo il risultato dei miei studii calorimetrici sui neonati, ammesso che la superficie del loro corpo varii fra 18 e 20 cm.² di superficie possiamo notare quanto segue:

							per dec²	totali
1.°	Esperimento	♀	3	giorni,	in 24	ore, calorie	17	323
2.°	»	♀	7	»	»	»	22	418
3.°	»	♂	47	»	»	»	20	420
4.°	»	♀	3	»	»	»	19.8	337
5.°	»	♂	7	»	»	»	25.8	496
6.°	»	♀	31	»	»	»	25.2	504
7.°	»	♀	3	»	»	»	19	350
8.°	»	♂	3	»	»	»	16.9	346

Da questo specchietto credo che si possa rilevare quanto segue:

1.° che nei primissimi giorni dopo la nascita il numero delle calorie emesse da un dec.² della superficie del corpo è sempre minore di quello dei giorni successivi. Questo forse in relazione colla perdita di peso che nei primi giorni subiscono i neonati.

In questo primo periodo l'emissione del calore sarebbe di 17 a 20 calorie per decim. quad. al giorno: da tutto il corpo in un giorno, di 320 a 400 calorie in cifre tonde.

Passato questo primo periodo e fino ad un mese e mezzo d'età, la emissione cresce per decim.² di superficie del corpo e sembra superare sempre le 20 calorie. Almeno dai miei esperi-

Digitized by Google

menti risulterebbe per questo 2° periodo una variazione fra 20 e 26 calorie al giorno per decimetro quadrato di superficie del corpo, ed una variazione fra 400 e 500 calorie per il totale della superficie del corpo.

E qui, di passaggio, notiamo intanto che in confronto dell'adulto, considerando quantità uguali di superficie, i neonati emettono molto più calore. Ciò è in relazione prima di tutto colla piccolezza della loro statura, e quindi colla maggiore estensione della loro superficie disperdente, in confronto del loro peso: in secondo luogo in relazione coi fenomeni di combustione organica, che per causa del rapido accrescimento, devono essere più attivi nei bambini che negli adulti, quantunque in quelli molto scarso sia il lavoro muscolare, una delle fonti principali di produzione del calore.

Se nei nostri studii severi, fosse permesso qualche volta batter la campagna delle associazioni di idee che si formano osservando i fatti, si potrebbe supporre che i poteri regolatori del calore, uguali nell'adulto come nel bambino, dovendo anche in questo mantenere una temperatura non superiore ai 37° e qualche decimo come nell'adulto, eccitassero le combustioni organiche in via fisiologica onde sopperire al maggior disperdimento che il piccolo volume e la relativamente grande superficie importano nel bambino. In questo concetto le combustioni eccitate e gli scambi molecolari accellerati in via fisiologica sarebbero la causa dell'accrescimento del bambino, il quale perciò troverebbe la causa del suo sviluppo nel nervoso potere regolatore della temperatura.

Ma una obbiezione ovvia a questo modo di vedere è questa: E allora come crescono i vertebrati che non hanno poteri regolatori? Per dare una risposta adeguata, occorrerebbero studii sui così detti vertebrati omeotermi, che determinassero esattamente la temperatura che presentano a seconda delle varie temperature ambienti e la loro calorimetria, e quindi poter stabilire se è proprio vero che non abbiano poteri regolatori. Ma giacchè pochissimo è stato fatto su quest'argomento, e non ho inten-

Digitized by Google

zione, per sostenere l' idea che ora ho emessa, di intraprendere studii di questo genere, così lascio il giudizio della sua importanza al lettore.

XIII.

Dopo i bambini di età non superiore ai 45 giorni mi sono applicato a ricercare la calorimetria dei più grandicelli. Anche qui vi era la difficoltà di conoscere la loro superficie del corpo e perciò ho fatto qualche studio preliminare:

Bambina (Maternità) mesi 6 e pochi giorni: lungh. cm. 62, peso gr. 6530, 8 — agosto 1895.

Questa bambina era nata sifilitica da madre sifilitica, aveva avuto eczemi crostosi, piaghe profonde alle natiche e ad altre parti del corpo. Colla cura mercuriale (calomelano a piccole dosi, bagni di sublimato) e quantunque allattata artificialmente, presenta ora un magnifico sviluppo, ed un ottimo stato di nutrizione.

circonf. del capo	cm²	44
» del collo	»	27
altezza » »	»	2
» del tronco	»	27
circonf. media del tronco	»	45
lunghezza arto superiore	»	22
circonf. media arto superiore	»	12.5
lunghezza arto inferiore	»	25
circonf. media arto inferiore	»	16.7

Col computo solito io ricavo

per la testa	cm²	558
pel collo	»	54
pel tronco	»	1215
per i due arti superiori	»	550
per i due arti inferiori	»	834
	cm²	3211

ossia decim.² 32.11 per tutta la superficie del corpo.

Digitized by Google

La quantità di calorico emesso da questa bambina fu valutata il 20 luglio '95 con una temperatura ambiente di 26°.5 e con una temperatura della bambina nella bocca di 37°.2. Essa è nuda sotto i lenzuoli. Temperatura dell' aria vicino al corpo 33°.5.

Ascella. Applico il termocalorim. a 33°.5 per tre minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto 35.9
» il 2.° » 36.5
» il 3.° » 36.8

$t' - t = 36.8 - 33.5 = 3.3 \quad 3.3 : 3 = 1.1$
$1.1 \times 16.9448 = 18.64$

calorie per decim.^{2} e per giorno.

Poplite. Applico il termocalorim. a 33°.5 per tre minuti. La temperatura sale così

dopo il 1.° minuto 35.7
» il 2.° » 36.3
» il 3.° » 36.5

$t' - t = 36.5 - 33.5 = 3 \quad 3 : 3 = 1$
$1 \times 16.9448 = 16.9448$

emette quindi calorie 16.9448 per dec. quadrato di pelle nelle 24 ore.

Facendo la media dei due esperimenti

$$\begin{array}{r} 18.64 \\ 16.94 \\ \hline 35.58 \end{array} \qquad 35.58 : 2 = 17.79$$

sarebbero circa 17.79 calorie emesse nelle 24 ore per dec^2.

Conoscendosi la superficie del corpo in dec.^{2} 32.11 avremo un totale per tutto il corpo e per il giorno

$$17.79 \times 32.11 = 571.24$$

Ho detto di sopra che Langlois sostiene che un fanciullo di 7 Kilogr. perde per unità di peso 2 volte e mezzo più calore che un adulto di 60 Kilog.: ma che questa differenza

Digitized by Google

sparisce quando noi guardiamo quantità uguali di superficie. La nostra bambina pesava 6 Kilogr. e mezzo. Per Kilogr. emetteva dunque 88 circa calorie che darebbero per un adulto 44 calorie per Kilogr. Ora un uomo di 60 Kilogr. se emette 2000 calorie al giorno ne emette solo 33.3 per Kilogr. Si vede dunque che la proporzione di Langlois non regge in questo caso. Così pure non regge la uguaglianza della emissione a parità di superficie, perchè un uomo anche di 150 cm², emetterebbe solo 14.3 calorie per cm² e non 17.79 come la nostra bambina.

XIV.

Gli ulteriori dati ottenuti col mio metodo sopra bambini di età maggiore e che io qui riassumo senza presentare il calcolo per non riuscire troppo prolisso sono stati i seguenti:

1.° Temperatura ambiente 27°.

Bambino d' anni 2 ½. Peso K. 18.3. Statura 83 cm. — Superficie valutata a 46.58 dm.² — Media di 4 esplorazioni (ascella, inguine, mano, piegatura del gomito).

Per decim.² e per giorno emissione calorie 15.6. Per tutto il corpo e per giorno calorie 697.7.

2.° Temperatura ambiente 26.2.

Bambino d' anni 6. Peso K. 21.2. Statura cm. 113. — Superficie valutata dm². 71.90 — Media di 4 esplorazioni (c. s.).

Per decim.² e per giorno calorie 16.4. Per tutto il corpo e per giorno 1179 calorie.

3.° Temperatura ambiente 25°.

Bambina d' anni 10 ½. Statura cm. 129. Peso K. 34.200. — Superficie valutata 104.81 decim². — Media di 4 esplorazioni c. s.

Per decim.² e per giorno calorie 12.65. Per tutto il corpo calorie 1325.9.

4.° Temperatura ambiente 24°.

Uomo anni 20. Peso K. 67.50. Altezza totale cm. 170. — Superficie valutata 167 decim². — Media di 4 esplorazioni c. s.

Digitized by Google

Per decim² e per giorno 13,74 calorie. Per tutto il corpo 2295 calorie e per giorno.

5.° Temperatura ambiente 26°.

Uomo d'anni 44. Peso K. 70. Altezza 162.8. — Superficie valutata 150.95 decim². — Media di esplorazioni c. s.

Per decim² e per giorno 14.25. Per tutto il corpo e per giorno 2150 calorie.

6.° Temperatura ambiente 25°.

Donna d'anni 40. Altezza 142 cm. Peso . — Superficie valutata 128 decim². — Media di 4 esplorazioni c. s.

Per decim² e per giorno 12,74. Per tutto il corpo e per giorno 1295.3.

XV.

Volendo riassumere i risultati dello studio precedente sulla calorimetria delle età potremo dire che nel neonato l'emissione del calore è notevolmente superiore a quella dell'adulto a parità di superficie di pelle. Nei primi giorni però è alquanto minore e solo dopo il settimo giorno di vita si mette ad una costante, che è sempre maggiore a parità di superficie in confronto coll'adulto. Questo fatto continua più o meno regolarmente diminuendo fin verso i sei anni. Da questa età la emissione di calore per uguale superficie è quasi uguale a quella dell'adulto.

E se vogliamo tradurre in cifre questo risultato possiam dire che mentre l'adulto in riposo emette in media da 12 a 14 calorie per ogni decim² della superficie del suo corpo in 24 ore, il bambino nei primi anni di vita ne emette dalle 16 alle 25 nello stesso tempo e per lo stesso spazio di superficie. Nei bambini più grandicelli e nelle età successive l'emissione del calore si avvicina sempre più a quella dell'adulto e ne è quasi uguale a 10 anni.

Digitized by Google

XVI.

A chi osservi attentamente i risultati degli esperimenti fin ora riportati non sarà certo sfuggito un fatto che a prima giunta potrebbe parere paradossale, che cioè le esplorazioni delle parti più calde al termometro (ascella, inguine) hanno dato una minore emissione di calore che non le più fredde come la mano e in genere le parti scoperte. Questo fatto è in contraddizione col fatto fisico ben noto, che un corpo più caldo messo nello stesso ambiente con uno più freddo, a parità di tempo, perde maggior quantità di calore dell' altro più freddo.

Ma la contraddizione non è che apparente. Il nostro corpo non è come un corpo inorganico che avendo in sè stesso un certo calore è obbligato a perderlo con la legge matematica stabilita da Newton. Il nostro corpo è una perenne sorgente di calore e il veicolo di questo calore è il sangue che ha una certa temperatura presso a poco costante in tutto l' albero circolatorio. D' altra parte non è vero che tutte le parti del nostro corpo che sono poste nello stesso ambiente siano nelle stesse condizioni.

Le parti coperte dagli abiti emettendo calore scaldano gli abiti e si formano tutt' attorno una atmosfera calda. Le parti scoperte hanno a diretto loro contatto l' aria esterna la quale coi suoi movimenti e pei movimenti delle parti stesse del corpo si rinnova sempre e non può scaldarsi gran fatto. Perciò le parti scoperte devono perdere maggior calore ed essere più fredde e le parti coperte perdere minor calore ed essere più calde.

Questo del resto è stato già provato coi calorimetri comuni che involgono una parte d' un animale o tutto un animale. Un animale rasato perde per unità di tempo maggior calore che uno col pelo ed è più freddo di questo.

Un esperimento semplicissimo fatto col mio metodo prova la cosa all' evidenza.

Digitized by Google

Esperimento 1.° — 13 agosto 1894. Uomo adulto, anni 40. — Temperatura ambiente 25°. — Temperatura della bocca 37°.2.

Piega del gomito braccio coperto. Temperatura degli abiti in contatto della parte sperimentata 33°. Applico il calorimetro a 33°. In tre minuti sale a 35.6.

Facendo il solito calcolo ottengo che da un decim² di pelle di questa regione per giorno si emetterebbe calorie 14,642.

Ottenuto questo, denudo il braccio fino alla spalla e lo lascio per 10 minuti in contatto dell' aria ambiente (25°).

Vicino alla parte sperimentale trovo l' aria alla temperatura di 29°.5. Applico quindi il calorimetro alla piega del gomito a 29°.5. In tre minuti sale a 35°.1.

Fatto il solito calcolo ottengo che un decim² di pelle di questa regione per giorno emetterebbe invece se fosse scoperta calorie 31,48.

XVII.

Una quistione molto importante per quel che riguarda la fisiologia della emissione del calore dal nostro corpo è certo quella che studia le sue variazioni in ambienti caldi ed ambienti freddi, d' estate e d' inverno.

Richet nel suo citato lavoro sul calore animale avverte questo fatto: a temperature elevate l' animale emette poco calore, a temperature medie ne emette di più, a temperature basse torna ad emetterne meno. Egli non si sa spiegare la diminuzione di emissione a temperatura bassa, tanto più che è noto che più il mezzo esterno è a bassa temperatura più gli scambii chimici sono intensi, ed anche più fa freddo e più l' animale consuma d' ossigeno e sviluppa d' acido carbonico.

Duval (1) dopo avere detto che il calore prodotto in tutto l' interno dell' economia è regolarmente ripartito nel corpo dalla

(1) Duval, *Cours de Physiologie*. Paris, Librerie Baillière 1892.

Digitized by Google

circolazione del sangue, cosichè le parti più vascolarizzate sono le più calde, aggiunge che si fa dispersione di calore alla superficie del corpo quando il mezzo ambiente è ad una temperatura inferiore alla nostra: che però l'economia presenta delle disposizioni eminentemente atte a diminuire i risultati di queste disposizioni, l'inviluppo corneo, i peli, il pannicolo adiposo, e delle correnti sanguigne molto ricche che circolano nelle località dove si può avere molto raffreddamento.

Al sistema nervoso poi Duval attribuisce grande importanza per la ripartizione e la dispersione od emissione del calore.

Prima causa di disperdimento è il sudore che colla sua evaporazione produce freddo. Poi abbiamo la circolazione cutanea che disperde calore più o meno secondo il calore dell'ambiente. Una circolazione cutanea più attiva che eleva la temperatura della pelle determina un abbassamento della temperatura centrale. Se invece c'è anemia alla pelle e questa è fredda è evidente che emette meno calore e che l'anemia dei vasi cutanei ha per effetto minor raffreddamento del sangue.

Frédericq (2) crede che il freddo agisca direttamente nei vasi cutanei facendo contrarre direttamente le loro fibre muscolari, o meglio che agisca per via riflessa sui centri vaso costrittori eccitati dal grado di bassa temperatura dei nervi sensitivi della pelle.

Il caldo agirebbe producendo una paralisi dei vaso costrittori, o per via riflessa per mezzo dei nervi sensitivi, o anche direttamente sui centri disperditori del calore eccitati da un sangue troppo caldo. È noto invero che l'indigestione di bevande calde produce maggior afflusso di sangue alla pelle e spesso anche sudore.

Vediamo che risultato mi hanno dato i miei esperimenti e quali conseguenze si possono trarre da essi.

---

(2) Fredericq L. *Sur la température chez les animaux a sang chaud* (Arch. de Biolog. de var Beneden 1892).

Digitized by Google

Dapprima io mi sono interessato di vedere quali effetti produceva la traspirazione cutanea sull' emissione del calore ed ho fatti i seguenti sperimenti sopra un giovane.

Uomo robusto d' anni 20. Peso Kilog. 67.50. Altezza 170 cm. Superficie del corpo decim² 170.63, circa 171. Il giorno scelto per la seguente serie d' esperimenti è stato il 12 luglio 1894 in cui la temperatura esterna all' ombra era di 32 (ore 2 pom.) e la temperatura dell' ambiente in cui si facevano gli esperimenti era 25°.4.

L' individuo che si prestava all' esperimento aveva fatto una piccola passeggiata all' esterno di 15 minuti senza evitare il sole che era cocente. Aveva il corpo lievemente sudato. Temp. della bocca 37°.2.

Appena entrato nell' ambiente d' esperimento faccio questi tre rilievi:

1.° Applicazione del calorimetro all' ascella a 34°. In tre minuti sale a 36°.7. Facendo il solito calcolo trovo che l' ascella emetteva per un decimetro quadrato di pelle e per un giorno calorie 15.25.

2.° Applicazione del calorimetro tra coscia e scroto ancora a 34°. In tre minuti sale a 36°.6. Facendo il solito calcolo trovo che in questa regione emetteva per ogni decim² di pelle e per un giorno calorie 14.74.

3.° Applicazione del calorimetro alla mano a 30°. In tre minuti la temperatura sale da 30° a 34.8 il che dà calorie 27 per decim² di superficie della mano in 24 ore.

Dopo di che faccio restare nello stesso ambiente a 25°.4 l' individuo per 2 ore occupandosi semplicemente di leggere e scrivere e ripeto gli esperimenti. Temp. bocca 36.8.

1.° Applicazione del calorimetro all' ascella a 34°. Dopo 3 minuti è salito a 36°.3 il che mi dà 13.047 per decim² di pelle nel giorno.

2.° Applicazione del calorimetro fra coscia e scroto a 34: in 3 minuti sale a 36.2 il che mi dà 12.370 calorie per decim² di pelle nel giorno.

Digitized by Google

3.° Applicazione del calorimetro alla mano per 3 minuti a 30. — La temperatura sale a 33°.9 il che mi dà 22.02 calorie per decim.^{2} e per giorno.

Confrontando questi risultati si vede come a corpo non sudato l'individuo emettesse molto meno calore che a corpo sudato. Del resto questo si verifica sempre e in proporzioni anche maggiori come nel caso seguente:

10 settembre 95. — Temperatura esterna 30°.8.

Individuo di 44 anni peso 70 Kilog. altezza 162 cm. Ha passeggiato per mezz'ora all'esterno ed ha il corpo sudato. La sua temperatura alla bocca e 37°.8. Il termo calorimetro applicato all'ascella alla temperatura degli abiti 34°.5 sale in 3 minuti a 37.3 il che mi dà 19.198 calorie per decim.^{2} quadrato di pelle e per giorno.

Questo individuo esplorato molte altre volte non sudato e sempre d'estate emetteva invece soltanto dalle 12 alle 14 calorie dalla superficie di un decimetro quadrato della pelle dell'ascella calcolata per un giorno.

Io dovrei qui continuando riferire degli esperimenti da me raccolti e che sto raccogliendo per determinare quanto calore si emette nell'estate e nell'inverno in bagno caldo e bagno freddo, e di ciò che si può rilevare in febbricitanti ed in malati di vario genere; ma per essere precisi il lavoro è enorme e per ora mi basta di avere tracciata la strada sperando col tempo di potere tornare su questo importantissimo argomento.

C. Bergonzini.

Digitized by Google

CATALOGO
DEGLI ECHINIDI FOSSILI

DELLA

COLLEZIONE MAZZETTI

ESISTENTE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

Generalità.

Gli Echini che fanno parte di questa collezione, furono raccolti quasi tutti da me stesso nella montagna Modenese: soltanto alcuni pochi pervengono da Pantano (Montagna Reggiana), ed altri da Villa d' Ajano (montagna Bolognese).

E se nel raccogliere tali Echini, ho poi avuto qualche cura, è certamente stata quella di notare con diligenza le provenienze loro generali, e quelle particolari della loro località. Così cotesti Echini, mentre servono in genere per lo studio geologico delle varie plaghe dalle quali derivano, possono anche in caso esser utili per quello dell' " Abitat „ particolare a ciascuno di essi.

Di più fra i prenominati Echini, vi si trovano molte specie già note da tempo, confuse con non poche altre, che da quanto mi è noto, non furono ancora nè indicate, nè descritte da alcuno. Ora per iscansare ogni incertezza su la vera loro qualità, mi sono intanto dato pensiero di classificare le prime, attenendomi alle descrizioni e figure migliori di quegli fra gli Echi-

Digitized by Google

nologi, che prima d' ora ne hanno fatto oggetto de' loro studî: ho poscia cercato di esaminare anche le altre; ma di queste però non ho ardito di determinare se non quelle poche, che presentavano allo studio caratteri generico-specifici meno incerti e dubbiosi.

Se non che, nè quanto alla classificazione delle prime di coteste specie, nè rapporto alla determinazione delle seconde, intendo punto di pronunziare un giudizio sicuro, certo ed inappellabile; e ciò tanto più, perchè fra tutti gli esemplari rappresentanti tali Echinidi, non ve n' è forse uno solo che non sia più o meno corroso, più o meno deforme, o altrimenti deturpato o guasto.

Ed ora, ecco intanto il promesso Catalogo.

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Guiglia: Monte Orsello	Guiglia: Castellino delle Formiche	Guiglia: Rocca Malatina	Zocca: Verruccbia	Zocca: Rosola	Montese: Semelano	Montese: Salto	Montese: Montese	Montese: Maserna	Montese: Iola	Terreno: Cretaceo	Terreno: Eocene	Terreno: Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
			Echini regolari														
			Famiglia delle Cidariti														
1			**Cidaris**; Klein	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	1	1	» verticillum; Mazz	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	
	2	2	» Melitensis; Forb.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Malta.
	3	3	» hirta; E Sism.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	»	Colline di Torino.
	4	4	» papillata; Lesk.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	»	Mar Rosso.
	5	5	» Avenionensis; Desmoul.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	»	S.te Croix (Vaud).
	6	6	» belgica; Cott.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Brabante settentrionale.
			Famiglia degli Echinidi														
2			**Tripneustes**; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	7	7	» Parkinsoni; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	S. Maura (Corsica), Foz.
3			**Psammechinus**; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	8	8	» monilis?; Desor.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	S.te Maure (Faluns).
			Echini irregolari														
			Famiglia degli Spatangidi														
1			**Spatangus**; Klein.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	9	1	» arcuatus; Mazz.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Villa d'Ajano.
	10	2	» Desmaresti; Munst.	»	.	»	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Tert. De Bund (Westfalia).
	11	3	» delphinus; Defr.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	»	Rocca S. Maria, Malta.
	12	4	» corsicus?; Desor.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	»	.	.	»	Balistro (Corsica).
	13	5	» meridionalis (Risso) spinosiss.; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	Cont. di Nizza, Mediterraneo.
	14	6	» Philippi; Desor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	Roma (Monte Mario).
	15	7	» spinosissimus (Desor); Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	Palermo, Roma (Monte Mario).
	16	8	» regina; Gray.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Crag. corall. d'Inghilterra.

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Monte Orsello	Castellino delle Formiche	Rocca Malatina	Verruccchia	Roccla	Semelano	Salto	Montese	Maserna	Iola	Cretaceo	Eocene	Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
				Guiglia			Zocca		Montese					Terreno			
	17	9	Spatangus hemisphaericus; Mazz.	»													
	18	10	» subconicus; »														Pantano.
	19	11	» Pagliarolensis »														Villa d'Ajano.
	20	12	» chitonosus; E. Sismond.						»							»	
	21	13	» ocellatus; Defr.	»												»	Rocca S. Maria.
	22	14	» aequedilatatus; Mazz.							»	»						
	23	15	» podex; »								»						
	24	16	» discoidalis; »														Villa d'Ajano (Monte Bulgaro).
	25	17	» brissoides; »														Rocca S. Maria.
	26	18	» Semelanensis; »						»								
	27	19	» cor; »								»						
	28	20	» austriacus; Laub.	»	»											»	Pantano, Bayersdorf.
	29	21	» Rissoi?; Desor.						»								
	30	22	» hemiornatus; Mazz.			»				»	»						
	31	23	» Mutinensis; »														Sabbie gialle del Modenese.
	32	24	» purpureus; (Müll.?) Agass.							»						»	
	33	25	» purpureus (Lesk) spinosiss.; Mazz.							»						»	Semese.
2			**Micraster**; Agass.														
	34	26	» brevisulcatus; Agass.							»	»			»			Villa d'Ajano, Montecchio Magg.re
	55	27	» coranguinum?; (var. juv.?).											»			Villa d'Ajano, Craie bl. d' Inghilt.
3			**Hemiaster**; Desor.														
	36	28	» nux (Desor) Ditremaster							»					»		Saverbrunn (Schwite).
	37	29	» bufo?; Desor							»				»			Craie Chlor. de Villars-sur-mer.
	38	30	» Buklandi; Desor.							»					»		Craie Marn. d' Essen.
	39	31	» acuminatus.; Desor.							»						»	
	40	32	» declivus; Mazz.							»							
	41	33	» truncatus; »							»							
	42	34	» hemiglobus; »							»							
	43	35	» semirostratus; »							»							
	44	36	» rosrtatus; »							»							

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Monte Orsello	Castellino delle Forniche	Rocca Malatina	Verruchia	Rosola	Semelano	Salto	Montese	Maserna	Iola	Cretaceo	Eocene	Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
				Guiglia			Zocca		Montese					Terreno			
	45	37	Hemiaster varus; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	46	38	» gibbus; »	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	.	.	.	
4			**Pericosmus;** Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	47	39	» latus; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Corsica, Malta, Colline di Torino.
	48	40	» aequalis; Desor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Dego (mioc. inferiore).
	49	41	» Edwardsi; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Corsica, Malta, Coll. di Torino.
	50	42	» affinis; Laub.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	»	Sievering.
	51	43	» Malatinus; Mazz.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
5			**Macropneustes;** Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	52	44	» Meneghinii (Desor) Hypsospatangus	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terreni numm. del Vicentino.
6			**Schizaster;** Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	53	45	» trigonalis; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	54	46	» convexus; »	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	.	.	.	
	55	47	» exagonalis »	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	.	
	56	48	» oviformis »	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	57	49	» Laubei; Bitt.	.	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	»	.	Monte Postale.
	58	50	» affinis Archiaci; Cott.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	S. Giovanni Ilarione.
	59	51	» rotundus; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	Villa d'Ajano.
	60	52	» Scillae; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Corsica, Malta, Asti, Perpignano.
	61	53	» canaliferus; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	
	62	54	» aff. vicinalis; Bitt.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Montecchio Maggiore.
	63	55	» D'Urbani; Forb.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Barton, Argine di Londra.
	04	56	» ambulacrum; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	S. Giovanni Ilarione.
	65	57	» rimosus; Desor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terr. numm. de Biaritz.
	66	58	» Desori; Wright.	.	»	»	.	.	.	.	.	.	.	.	.	»	Corsica, Malta.
	67	59	» Parkinsoni; Agass;	.	.	»	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Malta, Moll. des Martigues.
	68	60	» Baylei; Cott.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	S. Mauro.
	69	61	» Lorioli; Pau.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Contorni di Buda.
	70	62	» Beloutchistanensis?; D'Arch.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Monte Postale.
	71	63	» princeps; Bitt.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Monte Postale di Bolca.

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Monte Orsello	Castellino delle Formiche	Rocca Malatina	Verrucchia	Rosola	Semelano	Salto	Montese	Maserna	Iola	Cretaceo	Eocene	Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
				Guiglia			Zocca		Montese					Terreno			
	72	64	Schizaster foveatus; Desor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terr. numm. prés Dax.
	73	65	» globulus; Dam.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	S. Giovanni Ilarione.
	74	66	» pumilius; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	75	67	» cristagalli; »	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	76	68	» Archiaci; Cott.	.	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	»	.	S. Giovanni Ilarione.
	77	69	» Studeri; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Terr. numm. di Verona, S^t-Palais.
7			**Linthia;** Mérian	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	78	71	» cavernosa; De Lor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terr. numm. de l'Egypte.
	79	72	» inflata; Cott.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Calc. gross. des environs de Paris.
	80	73	» aurisleporis; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	81	74	» Arizensis?; Cott.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terr. numm. de l'Ariège.
	82	75	» insignis; Meri	.	.	.	.	.	»	»	»	.	.	.	»	.	Saverbrunn.
	83	76	» batyolcos; Dam.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	S. Giovanni Ilarione.
	84	77	» Cuoghii; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	85	78	» subelliptica; Mazz.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	86	79	» Capellinii; De Lor.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Camerino.
	87	80	» perplexa; Mazz.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	88	81	» Locardi Turnov.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	Corsica.
8			**Brissopsis;** Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	.	
	89	82	» lyriphera; Agass	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	»	
	90	83	» crescenticus; Wright.	.	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	.	»	
9			**Brissus;** Klein	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	91	84	» specie (bellissimo esemplare)	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
10			**Heterobrissus;** Mazz.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	92	85	» Montesii cl.; Mazz.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
			Famiglia degli Echinocoridi														
1	93		**Hemipneustes;** Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
		1	» italicus; Mazz.	.	.	»	.	»	»	»	.	.	.	.	.	.	Pavullo, Rocca S. Maria.

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Monte Orsello	Castellino della Formiche	Rocca Malatina	Verrucchia	Rosola	Semelano	Salto	Montese	Maserna	Iola	Cretaceo	Eocene	Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
				Guiglia			Zocca		Montese					Terreno			
			Famiglia dei Cassiduli														
2			**Hemipatagus;** Desor.														
	94	1	» Grignonensis (Desm.) Maretia							»					»		
3			**Echinanthus;** Breyn.														
	95	2	» marginatus; Mazz.							»							
	96	3	» angulatus; »							»							
4			**Pygorhynchus;** Agass.														
	97	4	» Colombi; Desor.							»						»	Corsica, Malta.
5			**Nucleolites;** Lam.														
	98	5	» pyramidalis; Mazz.							»							
6			**Echinolampas;** Gray.														
	99	6	» depressus; Gray.								»					»	
	100	7	» affinis; Desmoul.							»	»				»		Calc. gross. de Grignon.
	101	8	» similis; Agass.							»	»				»		Calc. gross. des envir. de Paris.
	102	9	» eurisomus; Agass.								»				»		Terr. numm. d' Einseidein.
	103	10	» angulatus; Meri								»					»	
	104	11	» subangulatus; Herk.								»						
	105	12	» subcylindricus; Desor.								»				»		Tuf. di Castione.
	106	13	» globulus; Laub.								»				»		» »
	107	14	» Escheri?; Agass.								»	»			»		Terr. numm. d' Appenzel.
	108	15	» productus; Mazz.								»						
	109	16	» rostratus; Mazz.								»						
	110	17	» subquadrangulatus; Mazz.								»						
	111	18	» subellipticus; Pavay.								»				»		Marne selciose di Buda.
	112	19	» ellipticus; Desor.								»				»		Terr. numm. del Kressenberg.
	113	20	» Kleini; Desmoul.								»					»	Tert. de Bunde.
	114	21	» Studeri; Agass.								»				»		Terr. numm. d' Appenzel.
	115	22	» conicus; Laub.							»	»				»		S. Libera di Maso.
	116	23	» discus; Desor.							»	»				»		Terr. numm. del Vicentino.

Digitized by Google

Generi	N.° progr. delle specie	Specie	NOME dei Generi e delle Specie	Monte Orsello	Castellino delle Formiche	Rocca Malatina	Verrucchia	Rosola	Semelano	Salto	Montese	Maserna	Iola	Cretaceo	Eocene	Miocene	LOCALITÀ DIVERSE fuori della montagna Modenese a destra del Panaro
				Guiglia			Zocca		Montese					Terreno			
	117	24	**Echinolampas** hemisphaericus; Ag.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Molas. de sat. Jean de Royan.
	118	25	» scutiformis; Desmoul.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Corsica, Cont. de Neuchâtel.
	119	26	» patellaris; Mazz.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
	120	27	» sphaericus »	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
	121	28	» pilus; »	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	Semese, Pavullo.
	122	29	» hemipilus; »	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
	123	30	» Blainvillei; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	Calc. gross. de la Dordogne.
	124	31	» Beaumonti; Desor.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Montecchio Maggiore.
	125	32	» magnificus; Mazz. 1888	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
	126	33	» stelliferus; Desmoul.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Calc. gross. de Blaye.
7			**Conoclypeus**; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	127	34	» ovum; Gratel.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	»	.	.	Craie de Bazin (Landes).
	128	35	» anacoreta; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Calc. a numm. d'Yberg (Schwytz).
	129	36	» plagiosomus; »	.	.	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	»	Corsica, Malta, Sardegna.
	130	37	» semiglobus; Desor.	.	.	.	.	.	.	»	»	.	.	.	.	»	Clermont, Montforts (Landes).
	131	38	» Duboysi; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Terr. numm. de Salghir (Crimea).
	132	39	» subcylindricus; Agass.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	»	.	Terr. numm. de Kressenberg.
	133	40	» Bordae; Agass.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	»	.	Terr. numm. de Dax.
	134	41	» depressus; Mazz.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	
	135	42	» Montesiensis; Mazz.	.	.	.	.	.	.	.	»	.	.	.	.	.	

Digitized by Google

CONFRONTI E NOTE BIBLIOGRAFICHE.

N. 1. **Cidaris verticillum;** Mazz. — Cenno monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 5.

Osservazioni. — Cotesta specie era conosciuta anche dal Lesk, che di un identico aculeo ne diede una figura nella Tavola 52.ma del suo " Addit. ad Klenii naturalem disposit. Echinodermatum „ (1).

Località. — Iola nel Castagneto detto le Vedette.

N. 2. **Cidaris Melitensis;** Forb.-Mss. n. sp. — Wright. " Descrip. of the foss. Maltese Echinod. Tavola 4, fig. 1 *a-c* „.

Località. — Montese presso e a N.-O. del Molino omonimo.

N. 3. **Cidaris hirta;** E. Sism. — Append. etc.; " Accadem. di Torino, ser. 2.a, Tom. 4, pag. 388, Tav. 3.a, fig. 7.

Località. — Iola nel Castagneto detto le Vedette.

N. 5. **Cidaris papillata;** Lesk. — Addm. ad Klenii Echinod. pag. 61, Tav. 39, fig. 2.

Località. — Iola.

N. 5. **Cidaris Avenionensis;** Desmoul. — Tableau des Echinid. pag. 306: " Cidaris stemmacantha „; Agass. — Descript. des fossiles de la Suisse, pag. 73, Tav. 21, fig. 4.

Località. — Iola nel Castagneto detto le Vedette.

N. 6. **Cidaris belgica;** Cott. — Descript. des Echinid. tert. de la Belgique, pag. 10, Tav. 1, fig. 1-14.

Località. — Montese nel sito detto la Volpara su la sinistra del Rio grosso di S. Martino.

---

(1) È la specie fossile della vivente « Cidaris verticillata; Lam. » Fu così denominata per distinguerla da essa.

Digitized by Google

N. 1 **Tripneustes Parkinsoni;** Cott. — Descript. des Echin. de la Corse: " Tripneustes Parkinsoni „; Agass et Desor. — Cat. rais des Echin. pag. 60, " Ann. des Scienc. nat. ser. 3.ª *t. b* „.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi — S. Maura, Corsica, Isola di Malta.

N. 1. **Psammechinus monilis?** Desor — Synops. des Echin. foss. pag. 121, Tav. 18, fig. 10-12.

Località. — Montese (S.te Maure).

N. 1. **Spatangus arcuatus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese; " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, Tav. 1.ª, fig. 2, Modena, 1885.

Osservazioni. — Lo " Spatangus arcuatus „ è molto prossimo allo " S. Desmaresti „; Munst.: ma il primo si distingue sempre dall' altro, per essere meno alto, per avere il solco boccale intaccante più largamente la faccia anteriore, e gli ambulacri pure anteriori disposti in maniera diversa.

Località. — Pressi di Montese in Villa d'Ajano (Bolognese).

N. 2. **Spatangus Desmaresti;** Munst. — In Goldf. " Petref. Germ. pag. 153, Tab. 47, fig. 4 „. Forma elevata, e più alta davanti che non di dietro: ambulacri lunghi, lanceolati, con gli anteriori molto divergenti, e sensibilmente rivolti in avanti: sommità ambulacraria quasi centrale: solco boccale largo, ma non molto profondo: tubercoli piccoli, rari; e come asserisce lo stesso Munster " flexuo seriatis „.

Osservazioni. — Dubito molto, che l' esemplare di Montese qui conguagliato collo " S. Desmaresti „ rappresenti proprio questo medesimo Spatango; tuttavia per quei pochi caratteri, che la cattiva sua conservazione lascia ancora intravedere, pare però che non vi si discosti totalmente.

Località. — Nizza, Bordeaux, sabbia dell' Astigiano.

N. 3. **Spatangus delphinus;** Defr. — Dict. sc. natur. Corpo rigonfio, tozzo: ambulacri stretti, lunghi, affilati, colla zona porifera esterna degli anteriori arcata e molto stretta alla sommità: turbecoli piuttosto grossi, ed alquanto seriati.

Digitized by Google

Osservazioni. — v. Mazzetti. Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 9; Modena, 1885.

Località. — Guiglia, Semelano, Rocca s. Maria, Marola? Malta, Molassa de Saint-Paul Trois-Châteaux.

N. 4. **Spatangus corsicus;** Desor. — Lo " S. corsicus „ è molto vicino allo " S. Desmaresti Munst: è soltanto un po' più declive in avanti, ed ha gli ambulacri anteriori più stretti, non che i posteriori più ravvicinati fra loro: Agass. et Desor. Cat. rais des Echinid. pag. 7. " Ann. des scienc. nat. ser. 3.ª „. (Zoologia).

Osservazioni. — L' esemplare, a cui qui si accenna, stante la cattiva sua conservazione, viene molto dubitativamente identificato per lo " S. corsicus „; e ciò tanto più, in quanto che il medesimo ha anche qualche somiglianza collo " S. Desmaresti „ Munst. Ad onta di questo mi sembra tuttavia, che anche dai soli tubercoli, che più grossi e più numerosi dello " S. Desmaresti „ porta su tutti i cinque interambulacri della faccia superiore, si possa sempre con facilità riconoscere, che esso non appartiene certo a quest' ultima specie.

Località. — Madonna di Montese, Balsistro (Corsica), Saint-Paul Trois-Châteaux (Drôme).

N. 5. **Spatangus spinosissimus;** (Desor) — Cat. rais. des Ech. p. 6; Vedi tavola fig. 3.

Località. — Salto, Semese.

Osservazioni. — Se non erro, a cotesta specie appartengono poscia tanto lo " Spatangus purpureus „; Lam. che lo " Spatangus siculus „; Desor, e lo " Spatangus meridionalis „ Risso. Il Desor nel creare questa sua specie, lo " Spatangus spinosissimus „, avvertì che essa si distingueva dallo " Spatangus purpureus „, (Mull.?) Agass. " par un nombre beaucoup considerable de turbecules à la face supérieure „. Ora siccome questo carattere è pur anche quello, che appunto serve ancora a distinguere, non solo quest' ultimo Spatango, lo " Spatangus purpureus „; (Müll?) Agass. dallo " Spatangus siculus „ Desor, ma ben anche lo stesso " Spatangus meridionalis „; Risso; così

Digitized by Google

pare doversi anche ritenere, che cotesti Spatanghi, lo " Spatangus purpureus Lesk — siculus, Desor. — meridionalis, Risso, piuttosto che tre specie differenti, non sieno in realtà che tre puri esemplari, appartenenti ad una sola e medesima specie, alla specie dello " Spatangus spinosissimus „; Desor. Vedi Tavola, fig. 3, 5, 6.

N. 6. **Spatangus meridionalis;** Risso. (V. " Spatangus spinosissimus „; Desor).

N. 7. **Spatangus Philippii;** Desor. — Echinid. foss. de la Suisse — specie grande; solco anteriore largo, e fortemente carenato ai lati; tubercoli ineguali, e senza disposizione regolare.

Località. — Montese, pressi di Palermo, Monte Mario.

N. 8. **Spatangus regina;** Gray. — Ann. nat. Hist. 2.ª ser., vol. 7, pag. 130.

Osservazioni. — Anche l'esemplare qui riferito allo " S. Regina „ manca di una metà circa; l'altra però è abbastanza ben conservata per poterlo identificare con qualche sicurezza allo Spatango predetto.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Crag corall. d'Inghilterra).

N. 9. **Spatangus hemisphaericus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese; Modena, 1887.

Osservazioni. — Cotesta specie si distingue benissimo dallo " S. Desmaresti „: Munst. perchè è di taglia molto più forte: perchè ha gli ambulacri più trasversali, più affilati, e colla zona porifera esterna arcata sensibilmente indietro: perchè porta tubercoli più numerosi, più grossi, meno seriati; perchè il suo solco anteriore è meno svasato, e la carena del suo interambulacro impari molto meno pronunciata, ed alta.

Località. — Monteorsello.

N. 10. **Spatangus subconicus;** Mazz. — Echinod. foss. di Montese (Echinodermi di Pantano): Ann. della Soc. dei Natur. di Modena; Ann. 15, Fasc.. 1.°, 1881.

Digitized by Google

Osservazioni. — La particolarità di avere le zone ambulacrarie alquanto impresse, e le interambulacrarie rigonfie nel mezzo e quasi costellate, distinguono nettamente questa bella e superba specie di Spatango da tutte le altre sue congeneri a me note; così la forma degli ambulacri stessi, non che il solco suo boccale, servono ancora a distinguerlo da certe specie di Conoclypei, coi quali stante la sua forma circolare ed elevata, mostrerebbe aver pure molto attinenza.

Località. — Pantano (Reggiano)

N. 11. **Spatangus Pagliarolensis**; Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 8 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — L'indicata specie è alquanto prossima allo " S. purpureus „; Müll.; ma quest'ultimo però è meno circolare, ha ambulacri più larghi, solco boccale meno profondo al bordo, e la faccia posteriore smussata e non troncata. Dello " S. Requieni „; Agass. poscia, col quale io lo avea già identificato, ha la forma e disposizione degli ambulacri; e fors' anche potrebbe essere la stessa specie.

Località. — Pagliarolo, luogo del Bolognese sui confini di Montese.

N. 12. **Spatangus chitonosus;** E. Sism. — Echin. foss. del Piemonte, Tav. 1.ª, fig. 6-7. — Spatangus euglyphus (Laub.) Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 11; Modena, 1888.

Osservazioni. — L'esemplare qui sopra indicato, l'unico che possedessi, essendo mancante per metà, e l'altra metà molto alterata dalle ammaccàture sofferte, indotto in errore dalla forma degli ambulacri della parte rimasta, erroneamente lo riferii la prima volta che mi occupai di esso, allo " S. euglyphus „; Laub. se non che prese di nuovo in considerazione, la disposizione delle sue placche coronali, la sua forma meno circolare, e più compressa; non che il suo solco boccale più ampio, più profondo, mi fecero tosto comprendere, che il detto esemplare, in-

Digitized by Google

vece che allo " S. euglyphus „ andava piuttosto riferito allo " S. chitonosus „.

Località. — Semelano, Coll. di Torino, Monteviale (Vicentino).

N. 13. **Spatangus ocellatus;** Defr. — Dict. Stor. Nat. " Spatangus Nicoloti „; Agass. — Echin. Suiss. 1, pag. 23, Tab. 4, fig. 7-8.

Località. — Monteorsello, Rocca S. Maria, (Neuchâtel, Molassa de Saint-Paul Trois-Châteaux).

N. 14. **Spatangus aequedilatatus;** Mazz. — Echinod. foss. di Montese: " Ann. della Soc. dei Nat. di Modena; Ann. 15, Tav. 3, fig. 6 „.

Località. — Castagneto dei Cinghi.

N. 15. **Spatangus podex;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 8 (Appendice) „; Modena, 1887.

Osservazioni. — Lo " Spatangus „ qui accennato è prossimissimo allo " S. Rodi „; Cott.: ci sembra però più piccolo, più tozzo: che abbia ambulacri più stretti, più lanceolati; e che la sua faccia superiore sia meno regolarmente voltata, e meno alta.

Località. — Montese.

N. 16. **Spatangus discoidalis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 6 (Appendice) „; Modena, 1887.

Osservazioni. — L' esemplare che servì di tipo alla costituzione di questa specie, si mostra realmente alla faccia superiore molto schiacciato; ma essendosene trovato dopo un' altro esemplare, nella parte ancor rimasta, abbastanza ben conservato, colla faccia superiore invece sensibilmente convessa, è perciò manifesto che la forte schiacciatura di detto esemplare, proviene più che altro dalla forte pressione sofferta.

Località. — Monte Bulgaro (Villa d' Ajano Bolognese), Guiglia.

Digitized by Google

N. 17. **Spatangus brissoides;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 4 (Appendice) „; Modena, 1887.

Osservazioni. — Allorchè descrissi questa specie, non conoscevo ancora la figura, che porta il Dames dello " S. loncophorus „; Menegh. Dames " Die Echiniden der Vicentinischen und Veronisischen; 1877 „; stante che più che a qualunque altra forma di Echinide, si avvicina a quello di quest' ultimo Spatango: anzi si direbbe che è un bellissimo esemplare di cotesta stessa specie, se lo " S. brissoides „ non fosse ornato nelle aree interambulacrarie della faccia superiore di due sorta di tubercoli; cioè di alcuni abbastanza grossi e scrobiculati, e di altri affatto mutici. Vedi tavola fig. 4 ridotta a $^2/_3$.

Località. — Rocca S. Maria.

N. 18. **Spatangus Semelanensis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 7 (Appendice) „; Modena, 1887.

Osservazioni. — La specie qui sopra accennata ha più la forma di Pericosmo, che non di Spatango; e se l'ho messa fra gli Spatanghi, è stato soltanto perchè porta alla faccia superiore tubercoli piuttosto grossi, scrobiculati, e negl' interambulacri pari alquanto raggruppati in serie come nei veri Spatanghi.

Località. — Semelano.

N. 19. **Spatangus cor;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 8 (Appendice) „; Modena, 1887.

Osservazioni. — L' esemplare che servì di tipo per questa specie, dubito molto che non sia invece un esemplare molto alterato dello " S. Philippii „.

Località. — Montese.

N. 20. **Spatangus Austriacus;** Laub. — Die Echinoiden osterreischish-Ungarischen obern Tertiaerablagerungen, Tav. 19, fig. 1-3.

Osservazioni. — Da quanto ho potuto osservare, lo " S. Austriacus „ varia alquanto nella sua forma. Di questi ve ne sono

Digitized by Google

alcuni di forma circolare, alta e quasi conica; mentre quella di alcuni altri è piuttosto allungata, e soltanto largamente convessa.

Località. — Contorni di Guiglia, Pantano nel Reggiano, Bayersdorf, Gross-Höffein.

N. 21. **Spatangus Rissoi?** Desor. — Specie rigonfia, declive in avanti: solco anteriore lievemente carenato, e intaccante mediocremente il bordo: petali larghi, e molto appariscenti a cagione dei pori molto marcati: tubercoli senza molta regolarità. È intermedio fra lo " S. meridionalis „ e la " S. Philippii „; Desor. Echinid. foss. de la Suisse.

Osservazioni. — L' esemplare che abbiamo qui qualificato per uno " S. Rissoi „ lo abbiamo certamente così denominato con molta perplessità, e solo in riguardo alla larghezza de' suoi petali; i quali benchè schiacciati dalla pressione sofferta dall' Echinide, son sempre tuttavia molto larghi e appariscenti.

Località. — Semelano.

N. 22. **Spatangus hemiornatus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, Tav. 1.ª, fig. 3 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — L' esemplare, che servì per la formazione di questa specie è di piccola taglia; ma si vede che era un individuo giovane, essendosene poscia raccolto dopo un altro esemplare, che è anzi di statura piuttosto forte.

Località. — Contorni di Montese.

N. 23. **Spatangus Mutinensis;** Mazz. — " Atti della Soc. dei Nat. di Modena (Rediconti delle Adunanze con Tav. e Fig.): ser. 3.ª, vol. 1 „; Modena 1883.

Osservazioni. — Cotesto bellissimo esemplare fu raccolto dal Doderlein, come egli stesso lasciò scritto sul medesimo, nelle sabbie gialle delle Colline del Modenese. Un' altro esemplare identico al predetto, proveniente dal Vicentino, ed ora esistente nel Museo di Pisa, fu pure collezionato da esso medesimo.

Località. — Colline del Modenese, e (Vicentino).

N. 24. **Spatangus purpureus;** (Müll?) Agass. — Revis. of the Echinidi part. 3.ª, pag. 165, Tav. 19, fig. 5-6.

Digitized by Google

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi e Spazzi, Montese.

Osservazioni. — Cotesto Spatango l' ho trovato fossile nelle or' ora indicate località, e vive tuttora nel Mediterraneo, come nel mare di Norvegia. Un bellissimo esemplare di un tale Spatango, pescato su le coste di Napoli, lo posseggo io pure; e mi fu donato dal mio diletto amico Della Valle prof. Antonio. Vedi tavola fig. 6 ridotto a metà.

N. 25. **Spatangus purpureus;** Lesk. — Addit. ad Kleini Disposit. Echinoder. pag. 191, Tav. 45, fig. 5.

Località. — Salto, Semese.

Osservazioni. — Mi posso ingannare; ma checchè se ne dica, non veggo proprio, come tanto lo " Spatangus purpureus „ figurato dal Lesk (loco cit.), quanto quello rappresentato nell' Encyclopedie Méthodique, Tav. 127, fig. 1-4; e l'altra ancora nel Dizionario di Storia naturale, Tav. 1078, fig. 1, possono aver che fare col vero " Spatangus purpureus „ (Müll.)? Agass., già descritto e figurato da quest' ultimo nella sua " Revis. fo the Echin. part. 3, pag. 165, fig. 5-6 „.

E per capacitarsi pienamente di questo fatto, basta soltanto osservare le quantità e qualità dei tubercoli, che essi portano nella rispettiva loro faccia superiore: poichè nello " Spatangus purpureus „ Müll.? Agass. Tav. Fig. 5 del mare del Nord, cotesti tubercoli sono tutti tra loro stessi disuguali, e meno che nell' interambulacro impari, nel quale i tubercoli un po' più grossi si estendono quasi fino al bordo, negli altri interambulacri di tali tubercoli non se ne scorge più nessuno oltre alla metà loro superiore; mentre al contrario nello " Spatangus purpureus „; Lam. del mare Mediterraneo, cotesti medesimi tubercoli sono invece tutti simili l' un l' altro, e ugualmente sparsi su tutta la superficie de' suoi interambulacri stessi fino a toccarne le loro estremità. Ora dopo un carattere tanto chiaro, e così distintivo fra i due prenominati Spatanghi, come mai si potrebbero dire ancora identici? No: ripeto che mi potrò ingannare; ma per me tanto lo " Spatangus purpureus „; Lam., piuttosto che

Digitized by Google

essere tutt' uno collo " Spatangus purpureus „ (Müll.?) Agass., non è proprio altro che lo " Spatangus spinosissimus „; Desor. " Cat. rais. des Echin. pag. 6 „, Di questo esso ha sì tutti i caratteri; ma non già dello " Spatangus purpureus „; Lesk.

Del resto poi anche gli Echinologi passati non erano certo neppur essi tanto sicuri dell' identità di questi due Spatanghi: e questo si rileva ancora chiaramente dalla moltitudine di nomi diversi, che sono stati loro man mano appiccati, non solo da più autori; ma ben anche da un unico di essi, e a più riprese: Agass. " Revis. of the Echin. part. 1, pag. 158-159 „.

N. 1. **Micraster brevisulcatus;** Agass. — Cat. syst., pag. 2. Vedi tavola fig. 2.

Località. — Montese.

N. 1. **Hemiaster gibbus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 18, Tav. 1.ª, fig. 8 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Fino ad ora non conosco nessun' altra specie di " Hemiaster „ che neanche lontanamente possa confondersi colla specie qui sopra accennata.

Località. — Semelano, Castagneto dei Cinghi.

N. 2. **Hemiaster varus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 19, Tav. 1, fig. 6; Modena, 1885: negli " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, ser 3.ª, vol. 4 „.

Osservazioni. — Mi pare che per discernere questa specie di " Hemiaster „ da ogni altro congenere, basta osservare anche solo la forma particolare de' suoi ambulacri posteriori.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 3. **Hemiaster rostratus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 19, Tav. 1, fig. 7; " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Cotesta specie ha forse qualche rapporto coll' " Hemiaster acuminatus „ Desor: se non che l' " Hemiaster rostratus „ Mazz. è declive sensibilmente in avanti, ed ha l' apparecchio apiciale eccentrico indietro.

Località. — Cà di zocco presso Montese.

Digitized by Google

N. 4. **Hemiaster semirostratus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 20, Tav. 1.ª, fig. 10: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — In lontananza questa specie somiglia un po' all' " Hemiaster varus „: ma quest' ultima è meno gonfia alla sommità, meno declive in avanti, ed un po' meno circolare.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 5. **Hemiaster hemiglobus;** Mazz. —. Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 20: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La specie ora indicata si distingue dall' " Hemiaster nux „; Desor, per essere carenato nell' interambulacro impari, per avere la sommità ambulacraria più centrale, e gli ambulacri anteriori più divergenti.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 6. **Hemiaster truncatus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 21: " Atti della Società dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 7. **Hemiaster declivus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 22, Tav. 2, fig. 2: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La specie preindicata differisce dall' " Hemiaster Cotteani „; Wright, avendo gli ambulacri meno flessuosi, il solco boccale più largo, e la sommità ambulacrale meno centrale.

Località. — Pagliarolo, sito in Villa d'Ajano.

N. 8. **Hemiaster acuminatus;** Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin., pag. 18: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „ (1).

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Ter. de Cassel, Calc. de Bourg, de Bordeaux).

---

(1) A scanso di confusione, a questa e ad altre specie gli si sono lasciati i nomi vecchi, già da me usati in altri lavori di questo genere.

Digitized by Google

N. 9. **Hemiaster Cotteaui;** Wright. — Foss. Echinod. from the islandof Malta, Tav. 7, fig. 2.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Malta).

N. 10. **Hemiaster Buklandi?** Desor. — Cat. rais. des Echin., pag. 17; " Spatangus Buklandi „; Goldf. — Paetref. Germ., Tav. 47, fig. 6.

Località. — Lago Vrazzano, (Cr. marn. d' Essen).

N. 11. **Hemiaster bufo?** Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin. pag. 16: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3ª, t. 8 „; " Micraster bufo „; Agass. — Cat. syst., pag. 2.

Osservazioni. — Se è stato attribuito l' Echinoide in discorso all' " Hemiaster bufo „ Agass., vi è fatto soltanto in riguardo alla sua forma generale, non che dietro la traccia di due de' suoi ambulacri pari, uno anteriore e l' altro posteriore, ancora visibile, mancando esso di quasi tutto il suo integumento esterno. È poi anche di mole assai forte.

Località. — Contorni di Montese, (Cr. chlor. de Villers).

N. 1. **Maretia Pareti;** Mazz. — Echinodermi foss. dello Schlier, delle colline di Bologna, Tav. 1.ª, fig. 1-2; Tav. 4.ª, fig. 33-39.

Osservazioni. — Per non ingenerare confusione si lascia l' indicato Echinide sotto il nome di " Maretia „: ma non è certo la vera " Maretia del Gray „, mancando di uno dei principali caratteri che la distinguono dalle altre specie di Echinidi.

Località. — Contorni di Guiglia, Pantano, S. Maria Vigliana.

N. 1. **Pericosmus latus;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin. pag. 19: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 6., Tav. 16, fig. 1.ª (Zoologia).

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (S. Maria Vigliana, Miocene di S. Bonifacio, Malta, Colline di Torino).

N. 2. **Pericosmus callosus;** Mazz. — Echinodermi foss. dello Schlier, delle colline di Bologna, Tav. 1.ª, fig. 3-7.

Località — Villa d'Ajano, S. Maria Vigliana.

N. 3. **Pericosmus aequalis;** Desor — Synopsis des Echinid. foss. pag. 397.

Digitized by Google

Località. — Monterotondo, Semelano? (Miocene inferiore di Dego).

N. 4. **Pericosmus Edwardsi;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin. pag. 20: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „; " Schizaster Agassizi „; Eug. sism. — Echini foss. del Piem., Tav. 1.ª fig. 1-3.

Località. — Pressi di Montese, e S. Biagio presso Felina nel Reggiano, Colline di Torino.

N. 5. **Pericosmus affinis;** Laub. — Echinoiden der Osterreich-Ungarischen oberen Tertiaerablag. Taif. 17, fig. 2.

Località. — Monterotondo? Semelano, (Leithakalken von Saivering).

N. 6. **Pericosmus? (an Micraster?)** Spec.

Località. — Villa d'Aiano al Pagliarolo.

N. 7. **Pericosmus malatinus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 13 „; Modena, 1889.

Osservazioni. — Il " Pericosmus malatinus „ è nella forma molto vicino al " Pericosmus Edwardsi „; però esaminati bene ambedue cotesti Pericosmi, almeno per un complesso di modificazioni loro assai sensibili, sembra che per esse si possono sufficientemente distinguere tra loro stessi senz' altro.

Località. — Rocca Malatina.

N. 8. **Pericosmus dilatatus;** Pav. — Die fossilen Seeigel des Ofner Mergles, pag. 293, Tav. 9.ª, fig. 3.

Località. — Guiglia.

N. 1. **Macropneustes Meneghini;** Desor — Synops. des Echin. foss., pag. 411.

Osservazioni. — Cotesta specie fa ora parte del nuovo genere " Hypsospatangus „ creato dal Pomel nel 1883.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Monte Viale, nel Vicentino).

N. 1. **Schizaster trigonalis;** Mazz. — Cenno intorno alla Fauna foss. di Montese, Tav. 2, fig. 1.ª, pag. 23: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Digitized by Google

Osservazioni. — L' Echinide preindicato si distingue dallo " Schizaster canaliferus „ Agass., per avere gli ambulacri più stretti, meno divergenti, ed il solco boccale ancora meno ampio nè anteriormente scavato.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 2. **Schizaster convexus;** Mazz. — Cenno intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 24: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Cotesta specie differisce dallo " Schizaster Lorioli „ Pav., per essere meno circolare e meno depresso.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 3. **Schizaster exagonalis;** Mazz. — Cenno intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 24, Tav. 2, fig. 3: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Località. — Semelano.

N. 4. **Schizaster oviformis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 25, Tav. 2.ª, fig. 4: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Meno la sua forma più allungata e largamente ovale, ed i suoi ambulacri un po' meno sinuosi, questa specie è simile in tutto allo " S. Lorioli „; Pav.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 5. **Schizaster Laubei;** Bittn. — Beitrage zur Kenntniss Echinodermen der Südalpen, Tav. 2.ª, fig. 1.ª

Località. — Credo sotto la Rocca di Montese, (Montepostale nel Vicentino).

N. 6. **Schizaster** aff. **Archiaci** (var. lata); Bittn. — Beitrage zur Kenntniss Echinodermen der Südalpen, Tav. 2.ª, fig. 11.

Località. — Montese, (S. Giovanni Ilarione nel Vicentino).

N. 7. **Schizaster rotundus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 25: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Anche questa specie, se non avesse la faccia superiore più convessa, più rigonfia, non che gli ambu-

Digitized by Google

lacri relativamente più larghi, più infossati, non differirebbe punto dallo " S. Lorioli „, col quale l'avea anzi primitivamente individuata.

Località. — Contorni di Montese, (Zea in Villa d'Ajano).

N. 8. **Schizaster Scillae;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 21: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „. " Spatangus scillae „; Desmoul. — Études sur les Echin., pag. 392, n. 24.

Località. — Montese, Guiglia, Rocca S. Maria, Terz. di Palermo.

N. 9. **Schizaster canaliferus;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 20: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „. " Spatangus canaliferus „; Lam. — Anim. sans vert. t. 3, pag. 227.

Località. — Contorni di Montese, e Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 10. **Schizaster vicinalis;** Bittn. — Beitrage zur Kenntniss Echinodermen des Südalpen, Tav. 11, fig. 4.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Montecchio Maggiore nel Vicentino).

N. 11. **Schizaster d'Urbani;** Forbes. — Monogr. of the Echinodermata of the British. tert. (fig. 1.ª, " in calce libri „): " Schizaster canaliferus „; Mazz. — Echinodermi foss. di Montese: " Ann. della Soc. dei Nat. di Modena, Anno, 14, Fasc. 1.° „; Modena, 1881.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Barton).

N. 12. **Schizaster ambulacrum;** Agass. — Cat. syst., pag. 2: " Spatangus ambulacrum „; Desh. — Coq. carat. Tav. 7.ª, fig. 4.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (S. Giovanni Ilarione Vicentino, Terreno numm. di Biaritz).

N. 13. **Schizaster rimosus;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 22: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „.

Località. — Salto nei Castagneto dei Cinghi. Terr. numm. de Biarritz.

Digitized by Google

N. 14. **Schizaster Desori;** Wright. — An. foss. Echinod. from the Island Malta, pag. 48. — Mazz. Echinod. foss. di Montese, Tav. 3, fig. 4: " Ann. della Soc. dei Nat. di Modena, Anno 14, Fasc. 1 „; Modena, 1881.

Località. — Castellino delle Formiche nel territorio di Guiglia, Isola di Malta.

N. 14. **Schizaster Parkinsoni;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 22: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „;

Località. — Rocca Malatina, S. Maura (Corsica)

N. 16. **Schizaster Baylei;** Cott. — Descript. des Echin. de la Corse, Tav. 13, fig. 3-5.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, S. Maura (Corsica).

N. 17. **Schizaster Lorioli;** Pau. — Die fossilen Scheigel des ofner Mergles, pag. 277, Tav. 10, fig. 2-6. — Mazz. " Echinod. foss. di Montese, pag. 9, Tav. 3, fig. 1 „; Modena, 1881.

Località. — Contorni di Montese. Buda.

N. 18. **Schizaster Beloutchistanensis?** D'Arch. — Descript. des Animaux foss. du grup. numm. dè l'Inde, Tav. 15, fig. 9 *a-b.*

Località. — Contorni di Montese (Monte postale nel Vicentino).

N. 19. **Schizaster princeps;** Bitt. — Beitrage zur Kenntniss Echiniden faunen der Südalpen, Tav. 12, (8), fig. 3.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Monte Postale).

N. 20. **Schizaster foveatus;** Agass. — Cat. syst. pag. 3: " Hemiaster foveatus „; Desor. — Synopsis des Echin. foss. pag. 374.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Terr. numm. de Montfort près Dex).

N. 21. **Schizaster globulus;** Dames. — Die Echiniden der Vicentinischen un Veronesischen, Tav. 9, fig. 8.

Digitized by Google

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (S. Giovanni Ilarione).

N. 22. **Schizaster pumilius;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 28, Tav. 2.ª, fig. 6: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1883.

Osservazioni. — La specie prenominata è vicina allo " Schizaster Studeri „ Agass.: parmi però distinguersi da quest'ultima specie, per essere assai più piccola, più cilindrica, e per avere ancora gli ambulacri più corti, meno flessuosi, non che il solco boccale più lineare.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 23. **Schizaster cristagalli;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 28, Tav. 2.ª, fig. 5: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Questa specie è prossima allo " Schizaster Scillae „ Agass. Si distingue però da quest'ultima specie, per essere assai più piccola e più angolosa, per avere il solco boccale relativamente più largo, la carena dorsale più rilevata, non che la faccia superiore più rapidamente declive in avanti.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 24. **Schizaster Archiaci;** Cott. — Echin. foss. des Pyrenèes, pag. 130. " Schizaster vicinalis „; D'Arch. — Descript. des foss. recuel. par M. S. P. Pratt., Tav. 11, fig. 4.

Località. — Contorni di Montese, (S. Giovanni Ilarione).

N. 25. **Schizaster Studeri;** Agass. — Cat. Syst., pag. 3.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. di Verona, Priabona, Caucaso, Saint-Palais).

N. 1. **Linthia insignis;** Mérian — In Desor: " Act. Soc. Helv. Scienc. nat. 38.ma Sess. Porrentruy, pag. 278 „.

Località. — Dintorni di Montese, Castagneto dei Cinghi, (Blangg, Sauerbrunn).

N. 2. **Linthia subglobosa;** Desor — Act. Soc. Helv. Scienc. nat. 38.ma Sess. Porrentruy, pag. 272: " Hemiaster subglobosus „; Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin. pag. 18: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „.

Digitized by Google

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Steinbach Sauerbrunn).

N. 3. **Linthia Locardi?** Tourn. — In Litt. 1874: " Cat. Descript. des Echin. (de la Corse), Tav. 12, fig. 1-2 „.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi (S. Maria Vigliana, S. Maura).

N. 4. **Linthia perplexa;** Desor: " Prenaster perplexus „; Mazz. — Echin. foss. di Montese, Tav. 3.ª, fig. 2.

Località. — Verrucchia, presso Rocca.

N. 5. **Linthia Capellinii;** De Loriol. — Descript. des Echin. des envir. de Camerino, pag. 21, Tav. 1.ª, fig. 10-11 (1882). " Prenaster falax „; Mazz. — Echinod. foss. di Montese, pag. 12, Tav. 1.ª, fig. 5 (1881); " Linthia Capellinii „; Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 14 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Un anno prima che il De Loriol si occupasse di questa specie, essa era già stata raccolta da me, figurata e descritta, come già si vede nei due precitati miei lavori.

Località. — Cà di Zocco presso Montese.

N. 6. **Linthia subelliptica;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 16, Tav. 1.ª, fig. 4 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Per la forma e disposizione degli ambulacri, non che per la sua carena dorsale, questa specie è alquanto vicina alla " Linthia Capellini „ il suo profilo però è molto diverso da quello di quest' ultima specie.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 7. **Linthia Cuoghii;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 16 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Cotesta specie si distingue dalla " Linthia subelliptica „ alla forma de' suoi ambulacri, che sono più larghi, e meno chiusi alle loro estremità.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

Digitized by Google

N. 8. **Linthia batyolcos;** Dames. — Die Echiniden der Vicentinischen und Veronesischen. Tav. 7, fig. 3.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (S. Giovanni Ilarione).

N. 9. **Linthia Arizensis?** Cott. — Echin. foss. des Pirenées, pag. 126, Tav. 6.ª, fig. 10-13: " Hemiaster Arizensis „; D' Arch. — Sur le foss. numm. de l'Ariége: " Boll. Soc. géolog. de France, 2.me ser., t. 16, pag. 804 „.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Val Scaranto Vicentino).

N. 10. **Linthia aurisleporis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Nodena, pag. 17, Tav. 1.ª, fig. 5 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La " Linthia aurisleporis „ è prossima alla " Linthia cavernosa „ De Loriol: credo però che l' una si distingua nettamente dall' altra dalla forma e disposizione reciproca dei loro ambulacri.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 11. **Linthia inflata;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, pag. 18 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La specie qui sopra indicata si distingue dalla " Linthia aurisleporis „ per essere molto più piccola, meno alta, più regolarmente circolare, non che per avere gli ambulacri anteriori assai più divergenti, ed i posteriori relativamente più corti.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi.

N. 12. **Linthia cavernosa;** De Loriol — Descript. des Echin. conten. dans les conch. Num. de l' Egypte, Tav. 8.ª, fig. 8-10.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (e buche d' Équillette).

N. 1. **Brissopsis lyriphera;** Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin., pag. 15: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 8 „; " Brissus lyripherus „; Forb.-Brit. Starf., pag. 187.

Digitized by Google

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Mari de. Nord).

N. 2. **Brissopsis Ottnangensis;** F. Hörn. — Die Faune des Schlier von Ottnang. pag. 389, Tav. 12, fig. 4, Tav. 15, fig. 2-7.

Località. — S. Venanzio nel Com. di Maranello.

N. 3. **Brissopsis crescenticus;** Wright. — On. foss. Echinoderms from the Island of. Malta, Tav. 4, fig. 2 *a-c*: " Toxobrissus elegans „; Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 80: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1883.

Località. — Pressi di Montese, Isola di Malta.

N. 1. **Brissus** spec; Manzoni e Mazzetti. — Atti della Soc. Toscana di Scien. nat., Fasc. 2, Tav. 19, fig. 3-5.

Località. — Contorni di Montese.

N. 1. **Heterobrissus Montesii;** Manz. e Mazz. — Atti della Soc. Toscana di Scien. nat., Fasc. 2, Tav. 19, fig. 2.

Osservazioni. — Piuttosto che di Montese, questa specie si sarebbe dovuto chiamare di Rocca Malatina, perchè a Montese è rarissimo, mentre a Rocca Malatina è invece abbondantissimo (1).

Località. — Contorni di Montese, Rocca Malatina.

N. 1. **Hemipneustes italicus;** Manz. e Mazz. — Atti della Soc. Toscana di Scien. nat., Fasc. 2, Tav. 19, fig. 1.

Osservazioni. — La specie qui indicata è di forma molto variabile: fra i miei esemplari, alcuni sono molto schiacciati e allungati sensibilmente, mentre altri sono in cambio quasi perfettamente circolari, e alla faccia superiore più sensibilmente convessi. Ciò mi aveva quasi indotto a farne due specie differenti.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, (Contorni di Pavullo, e Rocca Malatina).

(1) Cotesta specie a Montese è rarissima: ma in certi posti di Rocca Malatina e singolarmente a nord e nord-ovest della Chiesa parrocchiale, e non tanto ancora lontano da essa, quasi tutti i sassi ne portano per mo' di dire l'impronta.

Digitized by Google

N. 1. **Hemipatagus cordiformis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, Tav. 2, fig. 7, pag. 31: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Località. — Lago Vrazzano, Montese.

N. 2. **Hemipatagus Grignonensis;** Desor. — Synops. des Echinid. foss. pag. 416.

Osservazioni. — Cotesta specie si distingue dall' " Hemipatagus cordiformis „; Mazz., per essere di forma più allungata, ed essere troncata e non smussata di dietro.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi, Seine-et-Oise (Belgio), Grignon, Chaumont, Henonville.

N. 1. **Echinanthus marginatus;** Mazz. — Echinidi foss. di Montese, pag. 14, Tav. 1.ª, fig. 1.ª; Modena, 1881.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi presso Lago Vrazzano.

N. 2. **Echinanthus angulatus;** Mazz. — Echinodermi foss. di Montese, pag. 15, Tav. 1, fig. 2; Modena, 1881.

Osservazioni. — L'esemplare, a cui diamo ora questo appelativo è quello stesso, che negli Echinodermi fossili di Montese superiormente citati venne descritto col semplice nome di " specie „.

Località. — Salto nel Castagneto dei Cinghi presso Lago Vrazzano.

N. 1. **Pygorhyncus Colombi;** Desor — Synops. des Echin. foss. pag. 298: " Mazz. — Echinodermi foss. di Montese, Tav. 1.ª, fig. 4, pag. 38 „; Modena, 1881.

Località. — Contorni di Montese (Malta, Corsica).

N. 1. **Nucleolites pyramidalis;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 33, Tav. 2, fig. 8: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La forma elevata e subpiramidale della sua faccia superiore, mi pare distinguere questa specie da tutte le sue congeneri a me sin' ora note.

Località. — Contorni di Montese.

N. 1. **Echinolampas depressus;** Gray. — Ann. Mag. N. H. pag. 38. — Cat. Rec. Echin. pag. 36, Tav. 2, fig. 4.

Località. — Contorni di Montese.

Digitized by Google

N. 2. **Echinolampas affinis;** Desmoul. Tab. syn., pag. 344: " Clypeaster affinis „; Goldf. — Petref. Germ., Tav. 42, fig. 6.

Località. — Contorni di Montese, (Calc. gross. de Grignon, Sante-Croix, Chateau-Thierry, Maye).

N. 3. **Echinolampas similis;** Agass et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 165: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 2 „.

Località. — Contorni di Montese, (Calc. gr. des environs de Paris, Blaye).

N. 4. **Echinolampas eurysomus;** Agass. — Descript. des Echin. foss. de la Suisse, Tav. 9, fig. 1-3.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. d'Einsiedein).

N. 5. **Echinolampas angulatus;** Mérian. In Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin., pag. 166: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 7.

Località. — Contorni di Montese, (Camerino, Molasse de Saint-Just au midi de Saint-Restitut).

N. 6. **Echinolampas subangulatus;** Herk. e Jungh. — Echinod. foss. recueill. des terr. tert. de l'Ile de Java, Tav. 3.ª, fig. 4-4*a*-4*b*.

Località. — Contorni di Montese, (Miocene di Pjidamar).

N. 7. **Echinolampas subcylindricus;** Desor. — Archiv. des Scienc. phys. et natur. de Genève, t. 24, pag. 143: " Echinolampas elongatus „; Laub. — Echinodermen des Vicentinischen Tertiär-Gebietes, Tav. 5, fig. 3.

Località. — Contorni di Montese.

N. 8. **Echinolampas globulus;** Laub. — Beitrage zur Kenntniss des Echinodermen des Vicentinischen, Tertiär-Gebietes, Tav. 5, fig. 3.

Località. — Contorni di Montese, (Ghichelina, Castione).

N. 9. **Echinolampas Escheri?** Agass. — Descript. des Echinod. foss. de la Suisse, Tav. 3.ª, fig. 7-9.

Località. — Maserna nei pressi dei Lazari, (Terr. numm. d'Appenzel, et de Saint-Gall).

Digitized by Google

N. 10. **Echinolampas productus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, Tav. 2, fig. 9: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — La specie qui indicata è prossima all' " Echinolampas ellipticus „; Desor: essa però è più piccola di questa, meno rigonfia, e meno declive in avanti.

Località. — Contorni di Montese.

N. 11. **Echinolampas rostratus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 35, Tav. 2, fig. 10: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Cotesta specie è vicinissima all' " Echinolampas productus; Mazz.: si distingue soltanto da essa, per essere marcatamente rostrata alla faccia posteriore, e per avere il margine più angoloso.

Località. — Maserna nei pressi dei Lazari.

N. 13. **Echinolampas subellipticus;** Pav. — Die fossilen Scheigel des ofner Mergles, Tav. 1, fig. 9 *n-b.*

Località. — Contorni di Montese, (Marnes siliceuses de Bude).

N. 14. **Echinolampas subquadrangulatus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 36, Tav. 2, fig. 11: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1883.

Osservazioni. — Il profilo allungato, subcilindrico, non che la lunghezza e strettezza relativa de' suoi ambulacri distinguono chiaramente questa specie dell' " Echinolampas angulatus „; Mérian.

Località. — Contorni di Montese.

N. 15. **Echinolampas ellipticus;** Desor — Synops. des Echin. foss., pag. 303: " Clypecester ellipticus „; Munst. in Goldf.: Petref. Germ., Tav. 42, fig. 8.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. de Kressenberg).

N. 16. **Echinolampas Kleini;** Desmoul. — Tav. syn., pag. 146: " Clypeaster Kleni „; Goldf. — Petref. Germ., pag. 133, Tav. 42, fig. 3.

Località. — Contorni di Montese, (Tert. de Bunde).

Digitized by Google

N. 17. **Echinolampas Studeri?** Agass. — Echin. Suiss. 1, p. Tav. 9, fig. 4-6.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. terz. dell'Astigiano, numm. di Appenzell.).

N. 18. **Echinolampas conicus;** Laub. — Echinodermen des Vicentinischen Tertiar. Gebeites, Tav. 5, fig. 2-4 *a.*

Località. — Contorni di Montese, (Schio, Monte Viale).

N. 19. **Echinolampas discus?** Desor — Synops. des Echin. foss., pag. 307.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. del Vicentino).

N. 20. **Echinolampas hemisphaericus;** Agass. — Prodr. d' une Monogr. des radiar.: " Mem. Soc. Scienc. nat., de Neuhcätel, V. 1, pag. 137 „ : " Clypeaster hemisphaericus „ ; Lam. — Anim. sans vert., t. 3, pag. 16.

Località. — Contorni di Montese, (S. Maria Vigliana, Molassa de Dax, Tert. de Martigny).

N. 21. **Echinolampas scutiformis;** Desmoul. — Tav. synot., pag. 348: " Echinolampas Francii „ ; Desmoul. — Tav. synot., pag. 280.

Località. — Contorni di Montese, (Lonigo, Nizza, Tert. Molasse de Martigny).

N. 22. **Echinolampas patellaris;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 38, Tav. 2.ª, fig. 12: " Atti della della Soc. dei Nat. di Modena „ ; Modena, 1885.

Osservazioni. — Uno dei caratteri più specifici di questa specie è di avere le piastre coronali regolarmente incavate e concave, sempre però che questo non si debba a mera accidentalità.

Località. — Contorni di Montese.

N. 23. **Echinolampas sphaericus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 38: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „ ; Modena, 1885.

Osservazioni. — Questa piccola e graziosissima specie non si distingue dall' " Echinolampas patellaris „ ; Mazz., se non

Digitized by Google

perchè è più regolarmente sferica, e non ha incavate le placche costituenti il suo guscio.

Località. — Contorni di Montese.

N. 24. **Echinolampas pilus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 38: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1885.

Località. — Contorni di Montese, Pavullo.

N. 25. **Echinolampas hemipilus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 39: " Atti della Soc. dei Nat. di Modena, Tav. 2, fig. 13 „; Modena, 1885.

Osservazioni. — Cotesta specie differisce particolarmente dall' " Echinolampas pilus „; Mazz., per essere meno alta, meno regolarmente rotondata, e più grande.

Località. — Contorni di Montese.

N. 26. **Echinolampas Blainvillei;** Agass. et Desor — Cat. rais. des Echin., pag. 203: " Ann. des Scienc. nat., ser. 3.ª, t. 7 „.

Osservazioni. — Cotesta specie non è che la " specie fossile „ dell' " Echinolampas oviformis „ Agass., tutt' ora vivente; nè differisce da questo che negli ambulacri, che pajono alquanto più larghi.

Località. — Maserna nei contorni della Mascherella, (Terr. di Nizza).

N. 27. **Echinolampas Beaumonti;** Desor — Synops. des Echinod. foss., pag. 203.

Località. — Contorni di Montese, (Tert. pisol. di Verona).

N. 28. **Echinolampas magnificus;** Mazz. — 1888.

Specie alta, conica: sommità ambulacraria centrale: ambulacri subpetaloidi, a fior di testa, zone porifere strette: spazio interporifero invece largo, e largo press' a poco tre volte una zona porifera: faccia inferiore concava: bordo crasso: bocca subpentagonale: ano subtriangolare.

Osservazioni. — La figura di questa specie è quella di un " Conoclypeus „; osservando però bene la forma de' suoi am-

Digitized by Google

bulacri, si capisce subito appartenere esso invece al genere a cui è stato ascritto.

Località. — Contorni di Montese.

N. 29. **Echinolampas stelliferus;** Desmoul. — Tav. syn., pag. 348.

Osservazioni. — Cotesta specie è rimarchevole per la sua forma alta, e pe' suoi ambulacri sporgenti sul guscio a forma di coste.

Località. — Contorni di Montese, (Calc. gr. de Blaye).

N. 1. **Conoclypeus anacoreta;** Agass. — Descript. des Echinid. foss. de la Suisse, Tav. 10, fig. 3-7.

Località. — Contorni di Montese, Maserna nei pressi dei Lazari, (Calc. a numm. d' Yberg, Eocene di Crinea).

N. 2. **Conoclypeus plagiosomus;** Agass. — Cat. syst., pag. 5.

Località — Contorni di Montese, (S. Maria Vigliana, S. Maura, Balistro).

N. 3. **Conoclypeus semiglobus;** Desor. — Synops. des Echin. foss., pag. 122: " Galerites semiglobus „; Gratel.: " Mem. sur les Echin. foss. des terr. calc. des envir. de Dax, Tav. 2, fig. 4 „.

Località. — Contorni di Montese, (Faluns bleus de Garrey, Miocene).

N. 4. **Conoclypeus Duboisii;** Agass. — Descript. des Echinod. foss. de la Suisse, Tav. 10, fig. 12-13.

Osservazioni. — Specie circolare, poco alta, ma regolarmente rotondata.

Località. — Contorni di Montese. (Terr. numm. de Salghir Crimea).

N. 5. **Conoclypeus subcylindricus;** Agass. — Mem. Soc. Scient. nat. de Neuchâtel, t. 1, pag. 187. " Clypeaster subcylindricus „; Munst. in Goldf; Petref. Germ. Tav. 41, fig. 6.

Osservazioni. — Piccola specie, circolare, emisferica, a petali un po' salienti.

Digitized by Google

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. di Nizza, del Cantone di S. Gallo).

N. 5. **Conoclypeus Montesiensis;** Mazz. — Echinod. foss. di Montese, pag. 17, Tav. 2, fig. 3: " Ann. della Soc. dei Nat. di Modena „; Modena, 1881.

Località. — Contorni di Montese.

N. 7. **Conoclypeus ovum;** Agass. et Desor. — Cat. rais. des Echin., pag. 167: " Ann. des Scient. nat., ser. 3.ª, t. 7 „: " Galerites ovum „; Gratel. — Mem. sur les Echin. fossil. des terr. calc. des envir. de Dax, pag. 80, Tav. 2, fig. 5-6: " Conoclypeus ovum „; Mazz. — Echinodermi foss. di Montese, Tav. 2, fig. 3.

Località. — Contorni di Montese, (Terr. numm. de Dax).

N. 8. **Conoclypeus depressus;** Mazz. — Cenno Monogr. intorno alla Fauna foss. di Montese, pag. 40, Tav. 1, fig. 1.

Osservazioni. — La grande depressione di questa bellissima specie, avuto riguardo al genere a cui appartiene, ci sembra un carattere tale, da non potersi confondere con nessun' altra.

Località. — Contorni di Montese.

N. 9. **Conoclypeus Bordae:** Agass. — Descript. des Echinod. foss. de la Suisse, Tav. 10, fig. 14-15: " Galerites Bordae „; Gratel. " Mem. sur les Echin. foss. des terr. calc. des envir. de Dax, Tav. 2, fig. 1 „.

Osservazioni. — Cotesta specie si distingue dal " Conoclypeus conoideus „; Agass. per la sua forma alquanto allungata, ovalare.

Località. — Contorni di Montese, (Terz. di Torino, di Bordeaux).

Digitized by Google

Alcune riflessioni intorno agli Echinidi notati nel presente Catalogo.

Considerazioni paleontologico-topografiche.

Centotrentasei sono le specie degli Echini, che hanno formato l' oggetto dell' indicato Catalogo, e che col loro insieme costituiscono pure la prenominata Collezione Mazzetti.

Le predette centotrentasei specie di Echini, si trovano indi divise in diecissette generi, due dei quali comprendono otto specie di Echini regolari, e gli altri quindici, centoventotto di irregolari.

Topograficamente poi tutte coteste specie, si riscontrano promiscuamente disperse, non che ripartite fra quindici località diverse come segue: cioè sessantotto di esse, appartengono alla località di Salto.

Cidaris Melitentis; Forb.
Tripneustes Parkinsoni; Agass.
Spatangus Desmaresti; Munst.
» Regina; Gray.
» spinosissimus (Desor); Mazz.
» hemiornatus; Mazz.
» purpureus; Müll.
Micraster brevisulcatus; Agass.
Heminiaster nux; Desor
» bufo; Desor
» Buklandi; Desor
» acuminatus; Desor
» declivus; Mazz.
» truncatus; Mazz.
» semiglobus; Mazz.
» hemirostratus; Mazz.
» rostratus; Mazz.
» varus; Mazz.
» gibbus; Mazz.
Pericosmus latus; Agass.
» aequalis; Desor
Pericosium Edwardsi; Agass.
Macropneustes Meneghinii; Desor.
Schizaster trigonalis; Mazz.
» exagonalis; Mazz.
» convexus; Mazz.
» oviformis; Mazz.
» Laubei; Bitt.
» aff. Archiaci; Cott.
» rotundus; Mazz.
» Scillae; Agass.
» canaliferus; Agass.
» aff. vicinalis; Bitt.
» D'Urbani; Forb.
» ambulacrum; Agass.
» rimosus; Desor
» Baylei; Cott.
» princeps;
» foveatus; Desor
» globulus; Lesh
» pumilius; Mazz.
» cristagalli; Mazz.

Digitized by Google

Schizaster Archiaci; Cott.
» Studeri; Agass.
Linthia cavernosa; De Lor.
» inflata; Cott.
» aurisleporis; Mazz.
» Arizensis; Cott.
» insignis; Mer.
» batyolcos; Dam.
» Cuoghii; Mazz.
» subelliptica; Mazz.
» Capellinii; De Lor.
» perplexa; Mazz.
» Locardi? Tourn.
Brissopsis lyrifera; Agass.
Brissopsis crescenticus; Wright.
Hemipneustes italicus; Mazz.
Hemipatagus Grignonensis; Desmar.
Echinantus marginatus; Mazz.
» angulatus; Mazz.
Pygorhyncus; Colombi.
Nucleolites pyramidalis; Mazz.
Echinolampas conicus; Laub.
Echinantus discus; Desor
» scutiformis? Desmoul.
» hemipilus; Mazz.
Conoclypeus semiglobus; Desor
» subcylindricus; Agass.,

appartengono alla località di Salto: cinquantotto

Cidaris Melitensis; Forb.
» hirta; Sism.
» belgica; Cott.
Psammechinus monilis; Desor
Spatangus corsicus; Desor
» aequidilatatus; Mazz.
» chitonosus; Sism.
» podex; Mazz.
» cor; Mazz.
» Rissoi; Desor
» hemiornatus; Mazz.
Micraster brevisulcatus; Agass.
Pericosmus Edwardsi; Agass.
Schizaster Laubei; Bitt.
» Lorioli; Pavay.
» Belouchistanensis; D'Arch.
» Archiaci; Cott.
» Studeri; Agass.
Linthia insignis; Mer.
Brissopsis crescenticus; Wright.
Heterobrissus Montesii; Mazz.
Echinolampas affinis; Desmuol.
» depressus; Gray.
» similis; Agass.
» eurisomus; Agass.
» angulatus; Mer.
» subangulatus; Herkl.
Echinolampas subcilindricus; Desor
» globulus? Laub.
» Escheri?; Agass.
» productus; Mazz.
» rostratus; Mazz.
» subquadrangulatus; Mazz.
» subellipticus; Pavay.
» ellipticus; Desor
» Klenii; Desmoul.
» Studeri; Agass.
» conicus; Laub.
» discus; Desor
» hemisphaericus; Agass.
» scutiformis? Desmoul.
» patellaris; Mazz.
» sphaericus; Mazz.
» pilus; Mazz.
» hemipilus; Mazz.
» Blainvillei; Agass.
» Beaumonti; Desor
» magnificus, Mazz.
» stelliferus; Desmoul.
Conoclypeus ovum; Gratel.
» anacoreta; Agass.
» plagiosomus; Agass.
» semiglobus; Desor
» Duboisi; Agass.

Digitized by Google

Conoclypeus subcylindricus; Agass.
» Montesiensis; Mazz.
Conoclypeus Bordae; Agass.
» depressus; Mazz.,

furono raccolte in quella di Montese: sei

Spatangus Semelanensis; Mazz.
Hemiaster gibbus; Mazz.
Pericosmus affinis; Laub.
Schizaster exagonalis; Mazz.
» convexus; Mazz.
Hemipneustes italicus; Mazz.,

spettano a Semelano: due

Echinolampas Escheri? Agass.
Conoclypeus plagiosomus; Agass.,

a Maserna: tre

Cidaris verticillum; Mazz.
» papillata; Lesk.
Cidaris Avenionensis; Desmoul.,

a Jola: quattro

Spatangus Desmaresti; Munst.
» hemisfericus; Mazz.
Spatangus ocellatus; Defr.
» Austriacus; Laub.,

sono di Monte Orsello: due

Spatangus Desmaresti; Munst.
Spatangus Austriacus; Laub.,

del Castellino delle Formiche: sei

Spatangus Desmaresti; Munst.
Pericosmus Malatinus; Mazz.
Schizaster Parkinsoni; Agass.
Schizaster Desori; Wright.
Heterobrissus Montesii; Mazz.
Hemipneustes italicus; Mazz.,

della Rocca Malatina: una

Linthia perplexa; Mazz.,

si raccolse a Verucchia: uno

Hemipneustes italicus; Mazz.,

Digitized by Google

alla Rosola: due

Spatangus spinosissimus (Desor); Mazz. Echinolampas pilus; Mazz.,

a Semelano: due

Hemipneustes italicus; Mazz. Echinolampas pilus; Mazz.,

a Pavullo: tre

Spatangus brissoides; Mazz. Hemipneustes italicus; Mazz.,
» ocellatus; Defr.

furono trovati a Rocca S. Maria: due

Spatangus subconicus; Mazz. Spatangus Austriacus; Laub.,

a Pantano: sei

Spatangus arcuatus; Mazz. Micraster brevisulcatus; Agass.
» Pagliarolensis; Mazz. » coroanguinum; Agass.
» discoidalis; Mazz. Schizaster rotundus; Mazz.,

a Villa d' Ajano.

Distribuzione stratigrafica.

Delle prenominate centotrentasei specie di Echini, quattro sono ritenute " cretacee „, trentotto " eoceniche „, quarantuno " mioceniche „, quattro " plioceniche „, quarantotto poi sono le specie " nuove „, anch' esse da me raccolte tutte nelle località già più volte mentovate.

E quanto alle specie cretacee, due si sono trovate a Montese

Conoclypeus ovum; Gratel. Micraster brevisulcatus; Agass.

Uno a Salto;

Schizaster bufo; Desor,

Una a Villa d' Ajano in prossimità del territorio di Salto;

Micraster coranguinum; Agass.

Digitized by Google

Delle specie eoceniche, ventitrè derivano dai Castagneti della parrocchiale di Salto;

Hemiaster nux; Desor
» Buklandi; Desor
Macropneustes Meneghinii; Desor
Schizaster Laubei; Bitt.
» affinis Archiaci; Bitt.
» aff. vicinalis; Bitt.
» D'Urbani; Forb.
» ambulacrum; Agass.
» rimosus; Desor
» princeps; Bitt.
» foveatus; Desor
» globulus; Laub.
Schizaster Archiaci; Cott.
Linthia cavernosa; De Lor.
» inflata; Cott.
» insignis; Mer.
» Arizensis; Cott.
» batyolcos; Dam.
Cyclaster declivus; Cott.
Echinolampas affinis; Desmoul.
» similis; Agass.
» conicus; Laub.
Conoclypeus subcylindricus; Agass.

Quindici di Montese e in massima parte ancora dai suoi castagneti (1);

Schizaster Beloutchistanensis; D'Arch.
» Studeri; Agass.
Hemipatagus Grignonensis; Desmoul.
Echinolampas eurisomus; Agass.
» subcylindricus; Desov.
» Escheri? Agass.
» Studeri; Agass.
» ellipticus; Desor
Echinolampas subellipticus; Paves.
» conicus; Laub.
» Beaumonti; Desor
» stelliferus; Desmoul.
Conoclypeus anacoreta; Agass.
» Bordae; Agass.
» Duboisi; Agass.

1) Poche sono forse le località della montagna Modenese, che sotto l'aspetto « geologico » sieno più interessanti delle due di Montese e di Salto. Certo è che nel Modenese almeno non si conosce fin'ora nessun'altra località così ricca in organismi fossili di ogni sorta, come le due località preaccennate: chè in ogni altro posto del Modenese anche dei più fossiliferi, come Pavullo, Lavacchio, Montorso, Guiglia, Monte Orsello, Rocca Malatina, e lo stesso Montegibio sì celebre negli annali conchigliologici, manca sempre qualcuna delle spoglie fossili dell'uno e dell'altro dei grandi « tipi » costituenti il regno degl'esseri animati: mentre che le predette località di Montese e di Salto, nel loro assieme presentano invece una fauna svariata, ricchissima, ove ognuno dei sopraindicati tipi ha ivi lasciato più o meno copiose spoglie dell'antica sua dimora. A Montese e a Salto i « Vertebrati vi sono rappresentati da non pochi « denti » di Pesce: gli Annulosi da « chele » di Crostacei: i « Molluschi » da moltissime « teche » di Univalvi e di Bivalvi: i « Raggiati » da numerosi « Echini »; ed i « Protozoi » da bellissime « Spugne » in quantità.

Digitized by Google

E così anche delle trentanove specie mioceniche, quindici sono proprie di Salto (1);

Tripneustes Parkinsoni; Agass.
Spatangus Regina; Gray.
» purpureus; Müll.
Pericosmus latus Agass.
» aequalis; Desor
Schizaster Scillae; Agass.
» canaliferus; Agass,
» corsicus; Cott.
Schizaster Baylei; Cott.
Linthia Capellinii; De Lor.
» Locardi? Tourn.
Brissopsis lyriphera; Agass.
» crescenticus; Wright
Pygorhyncus Colombi; Desor
Conoclypeus semiglobus; Desor,

Sedici sono proprie di Montese;

Cidaris hirta; Sism.
» belgiça; Cott.
» Peroni; Cott.
» Melitensis; Forb.
Psammechinus monilis; Desor
Spatangus corsicus; Desor
» chitonosus; Sism.
Pericosmus Edwardsi; Agass.
Schizaster Lorioli; Pav.
Echinolampas depressus; Gray;
» scutiformis; Besmoul.
» angulatus; Mer.
» subangulatus; Herk.
» hemisphaericus Agass.;
» Blainvillei; Agass.
» Hayesianus?; Desor,

Tre sono di Monte Orsello;

Spatangus Delfinus; Defr.
» Austriacus; Laub.
Spatangus ocellatus; Defr.

Due di Jola;

Cidaris papillata; Lesk.
Cidaris Avenionensis; Desmoul.

Due di Rocca Malatina;

Schizaster Desori; Wright.
Schizaster Parchisoni; Agass.

(1) Le specie mioceniche di Salto, invece di quindici sono ora sedici, e quelle di Montese invece di sedici, sono anch'esse diecisette; giacchè due specie « l'Hemiaster acuminatus » appartenente a Salto, e « l'Echinolampas Kleini » appartenente a Montese, per inavvertenza furono riportate a depositi non propri di loro. Si è pure aggiunto anche alla specie di Rocca Malatina lo « Spatangus Parkinsoni ».

Digitized by Google

Una di Semelano;

Pericosmus affinis; Laub.,

Parimenti delle sei specie plioceniche: tre sono di Salto

Spatangus spinosissimus; (Defor); Mazz.
» purpureus; Müll.
Spatangus Philippii; Desor,

Una si trovò a Monte Orsello;

Spatangus Desmaresti; Munst.,

Due provengono da Montese;

Hemiaster acuminatus; Agass.
Echinolampas Kleini,

E in fine; delle quarantotto specie nuove: ventitrè sono state raccolte a Salto;

Spatangus hemiornatus; Mazz.
» aequedilatatus; Mazz.
Hemiaster declivus; Mazz.
» truncatus; Mazz.
» hemiglobus; Mazz.
» semirostratus; Mazz.
» rostratus; Mazz.
» varus; Mazz.
Schizaster trigonalis: Mazz.
» convexus; Mazz.
» oviformis; Mazz.
» rana; Mazz.
Schizaster rotundus; Mazz.
» pumilius; Mazz
» cristagalli; Mazz.
Linthia aurisleporis; Mazz.
» Cuoghii; Mazz.
» subelliptica; Mazz.
Echinanthus marginatus: Mazz.
» angulatus; Mazz.
Nucleolites pyramidalis; Mazz.
Echinolampas productus; Mazz.
» rostratus; Mazz.

Undici a Montese;

Spatangus podex: Mazz.
» cor; Mazz.
Hemipatagus cordiformis; Mazz.
Brissus spec.; Mazz.
Echinolampas patellaris; Mazz.
» sphaericus; Mazz.
Echinolampas pilus; Mazz.
» hemipilus; Mazz.
» magnificus; Mazz.
Conoclypeus depressus; Mazz.
» Montesiensis; Mazz.

Una a Jola;

Cidaris verticillum; Mazz.

Digitized by Google

Quattro a Semelano;

Spatangus Semelanensis; Mazz.
Schizaster exagonalis; Mazz
Hemiaster gibbus; Mazz.
Hemipneustes italicus; Mazz.

Una a Monte Orsello;

Spatangus hemisphaericus; Mazz.

Due a Rocca Malatina;

Pericosmus Malatinus; Mazz.
Heterobrissus Montesii; Mazz.

Una a Pantano;

Spatangus subconicus; Mazz.

Una a Rocca S. Maria;

Spatangus brissoides; Mazz.

Una a Verrucchio;

Linthia perplexa; Mazz.,

Tre a Villa d' Ajano;

Spatangus arcuatus; Mazz.
» Pagliarolensis; Mazz.
Spatangus discoidalis; Mazz.

Conseguenze geologiche.

Ora: ponendo mente al modo, con cui le diverse specie d' Echini costituenti questo Catalogo, s' incontrano distribuite nelle preacennate località del Modenese, si vede subito che tali località si trovano già stratigraficamente divise per loro stesse in due zone principali, caratterizzate ciascuna da una fauna generica e speciale tutta loro propria: zone di cui la prima e più alta comprende i territori di Montese, Salto, Maserna, Semelano, Pantano, e Pavullo, ed ha una fauna " eocenico-miocenica „ e

Digitized by Google

l' altra alquanto più bassa, e che comprende essa pure i territori di Monte Orsello, Castellino delle Formiche, Rocca Malatina, Verrucchio, Rosola e Jola, la quale ha invece una Fauna prettamente " miocenica „.

Coteste due zone si trovano pur' anche nettamente distinte tra loro per una " facies „ petrografica, sua propria e particolare di ciascuna di esse. Le roccie che costituiscono la zona inferiore, in massima parte consistono in Molasse sabbionose, giallognole, poco solide, e che presto si sgretolano all' aria: mentre all' incontro le roccie della zona superiore sono per lo più costituite da calcari selciosi, grisastri, compatti, durissimi, che si usano anche come ottimi materiali da costruzione.

Ma ciò che, sotto l' aspetto geologico, rende veramente interessanti le località del modenese, che costituiscono le due zone echinodermiche or ora accennate, non è altro sicuramente, che la natura e qualità delle loro faune, per la grande attinenza, che hanno le medesime con quasi tutti i depositi echinodermici " eocenico-miocenici „, appartenenti non solo al grande bacino mediterraneo meglio noti; ma ben anche con una gran parte fuori di esso, tanto in Europa che in Asia ed Africa.

Difatti nella zona superiore delle località echinodermiche del Modenese, il terreno nummulitico del Vicentino-Veronese vi è rappresentato da non meno di dodici specie di Echinidi; cioè dallo

Schizaster affinis vicinalis; Bitt.
» ambulacrum; Agass.
» princeps; Bitt.
» Archiaci; Cott.
» Studeri; Agass.
Linthia batyolcos; Lam.
Macropneustes Meneghinii; Desor
Echinolampas globulus; Laub.
» subcilindricus; Desor
» discus; Desor
» Beaumonti; Desor
» conicus; Laub.

lo stesso terreno nummilitico della Svizzera: da sette specie

Hemiaster nux; Desor
Linthia insignis; Mer.
Echinolampas eurisomus; Agass.
» affinis; Desmoul.
Echinolampas subcylindricus; Desor
» Escheri? Agass.
Conoclypeus anacoreta; Agass.,

Digitized by Google

il terreno nummulitico di Biarritz: da due specie

Schizaster Archiaci; Cott. Schizaster rimosus; Agass..

il calcare grossolano dei pressi di Parigi: da due specie

Linthia inflata; Cott. Echinolampas similis; Agass.,

le argille di Londra: da una specie

Schizaster d' Urbani; Forb..

l' oligoceno di Budapest: da due specie

Schizaster Lorioli; Pav. Echinolampas subellipticus; Pav.,

il terreno nummulitico di Crimea: da una specie

Conoclypeus Duboisi; Agass.,

quella dell' Egitto: da una specie

Linthia cavernosa; Loriol.

Nè meno evidenti ed estese sono sicuramente le relazioni dei depositi della zona inferiore delle località modenesi a Echinodermi coi diversi sedimenti della grande formazione " miocenica mediterranea „ ed estera, di quello che lo siano i depositi eocenici della zona precedente. L' illustre geologo Locard, che studiò profondamente il sistema miocenico della Corsica, così scrive in proposito dei rapporti che i depositi miocenici di quest' isola hanno con gli altri depositi miocenici, spettanti non tanto alla grande formazione predetta, quanto ancora con molti altri fuori di essa. I depositi miocenici dell' Isola di Corsica: " ils sont (dice egli) contemporains des dépôts de la Sardaigne, de l' Espagne (province de Barcelone), de l' Algerie, de l' Italie centrale et settentrionale, de la Suisse, du bassin du Rhône, depuis Lyon jusqu' à Cucuron et le plan d' Aren, du Danube, du bassin de Vienne, de la Podolie, de la Transilvanie, de la Gréce, de l' Asie mineure etc. Mais en même temps, leur faune

Digitized by Google

presente plus d' un point commun avec celles des gîsements de la même epoque, deposés en debors du bassin mediterranéen, comme par exemple les formations mioceniques du sud-ovest de la France, de la Baviere, de l' Angleterre, de la Belgique.... et même de l' Amerique „. (Descript. de la Faune des terrains tertiaires moyens de la Corse, par Arnauld Locard; Paris 1877).

Or bene: i sedimenti miocenici della Corsica, si possono dire quasi identici ai sedimenti miocenici delle località echinodermiche del modenese. Di trentanove specie di Echini miocenici, che queste contengono, quattordici specie

Tripneustes Parkinsoni; Agass.
Spatangus corsicus; Desor
Pericosmus latus; Agass.
» Edwardsi: Agass.
Schizaster Desori; Wright.
» Parkinsoni; Agass.
» Scillae; Agass.
Schizaster Baylei; Cott.
» conicus; Agass.
» Peroni; Cott.
Linthia Locardi; Turnou.
Echinolampas scutiformis; Desmoul.
Conoclypeus plagiosomus; Agass.

raccolte soltanto da me stesso in esse località, sono già comuni fra i depositi miocenici di coteste località medesime, e quelli dell' Isola preaccennata: per cui ciò che ha affermato il Locard dei sedimenti miocenici della Corsica in genere, si può dunque con tutta ragione attribuire anche in particolare ai sedimenti miocenici a echinodermi, esistenti nelle indicate località del modenese. E questo poi tanto più, da che lo studio geologico del Locard su la Corsica, è uno studio complesso. Tratta egli dei depositi miocenici in genere di quest' Isola, non che dei fossili che questi contengono, tanto molluschi, che echinodermi, senza però far mai distinzione alcuna, tra i giacimenti di questi, e di quelli.

Come si è già indicato, la zona superiore delle località modenesi a echinodermi oltre a sedimenti eocenici contiene anche depositi eminentemente miocenici, mentre nella zona inferiore di esse, di terreno eocenico non se n' è sin qui riscontrato traccia di sorta. Varie specie mioceniche si son raccolte nella prima di queste zone, che sono comuni anche alla zona infe-

Digitized by Google

riore; ma specie eoceniche in quest' ultima, nè proprie di essa, nè comuni coll' altra, non se n' è mai sin qui trovata alcuna. Ora: e perchè cotesta differenza?

Per spiegare questo fatto, non certo in un modo chiaro ed assoluto, che ciò sarebbe impossibile, ma almeno in una maniera alquanto probabile, convien dire: che la zona inferiore, mentre si deponeva l' eocene della zona superiore, era ancora un' alto fondo di mare; oppure che lo stesso eocene esista ivi ancora, come nella zona superiore; ma che però ora non si scorge, perchè in parte si trova già coperto dal miocene, e in parte perchè fu desso asportato dalle grosse e terribili frane, che a sud-est di Rocca Malatina, scissero le immani roccie, il cui resto costituisce ora i monti a picco di Monte Albano, Samone e Missano, e tutto seco loro orribilmente travolsero in fondo alla valle del fiume Panaro e del torrente Rivella.

Nè quest' ultima ipotesi sembrerebbe certamente del tutto infondata; poichè a sud-est della parrocchiale di Semelano (1) due enormi mammelloni di roccia miocenica, staccatisi chi sa da quanti secoli dai massi di quella breve catenella di monti, che dal Rio della Rosola, si protende sin' oltre alla parrocchiale di Villa d' Ajano, e sbrisciati giù interi franando su la sponda destra del torrente Rivella, se ne starebbero gia lì a conferma di essa. Certo è, che traccie di eocene se ne trovano anche a Semelano, che però conviene qui stesso notare, che la " facies petrografica „ dei monti di Semelano, è alquanto differente, da quella di Rocca Malatina, Missano, Samone e Monte Albano or ora accennata: che quindi potrebbe essere alquanto diversa anche la loro fauna.

(1) Fra gli Echini raccolti a Semelano, in uno studio fatto di recente vi ho riscontrato un nucleo non dubbio di « Linthia insignis ». Nella redazione di questo catalogo avevo già indicato anche prima d' ora l' esistenza di qualche traccia di eocene anche in questa plaga, e per questo avea di già compresa anch' essa nella zona superiore delle località a Echinidi del Modenese. Adesso però l' esistenza dell' eocene anzi non è più dubbia.

Digitized by Google

Fu pure superiormente indicato, che per le centotrentasei specie di Echini, inserite nel Catalogo, che sta a capo di queste riflessioni, se ne ritrovavano ancora quattro specie plioceniche.

Spatangus spinosissimus (Desor); Mazz.
» purpureus; Müll.
Spatangus Philippii; Desor.
» Desmaresti; Munst.

Se non che rapporto al pliocene, non saprei proprio qui stesso dir altro: che in nessuna delle due zone, comprendenti le località a echinodermi del modenese, di terreno pliocenico non se n' è per anco scoperta forma; e che le specie or ora notate, e credute plioceniche, furono desse racccolte qua e là per le due preaccennate zone in pieno miocenico. Il terreno più giovane, che si riscontri in tali località fra i terreni geologici, è il terreno così detto " tortoniano „: terreno che vi affiora anche in più posti, nelle Canevazze di Isola, a Sassomolare alla base del monte omonimo, e a nord-ovest della Rocca di Montese presso l' origine e a destra del Rio grosso di S. Martino, ove posa ancora un po' di sbieco sul miocene medio, ivi pure affiorante anch' esso. Forse altri piccoli depositi di tortoniano esistono pur' anche in altri siti delle due zone in discorso, e singolarmente nei vari seni dell' altipiano di Rocca Malatina.

Ma però è tutt' altra cosa per ciò che riguarda il terreno cretaceo poichè l' esistenza di questo terreno nei pressi di Montese, a Salto, a S. Martino, a Ranocchio, in Casselano, è già stata riconosciuta, e riconfermata da tempo. Dei siti poi che hanno date le quattro specie

Micraster brevisulcatus; Agass.
» coranguinum; Agass.
Schizaster bufo? Desor
Conoclypeus ovum; Gratel.

cretacee, Montese e Salto fanno parte delle surriferite località; e lo stesso Castagneto dei Cinghi, che di esse specie ne ha date due, non è lungi per mo' di dire, se non pochi passi da loro.

Digitized by Google

Osservazioni zoologiche-paleontologiche.

L' accantonamento delle varie specie di animali tra loro, è già un fatto notato da tutti i zoologi e paleontologi, che li hanno minutamente studiati: e ciò è naturalissimo, perchè ciascun essere vivente, cerca anzi tutto una dimora che meglio gli convenga, e trovatala una volta, non l' abbandona più.

Ne a questo fatto contraddicono certamente gli Echini: pare anzi che tali organismi l' usino in maniera cotanto rigorosa, da isolarsi quasi affatto da tutti gli altri esseri semoventi di qualunque sorta. Per lo più molte specie di animali si trovano anche acquartierati con altre specie, per natura molto diversa dalla loro; ma rarissimi sono sempre gli Echini, che si riscontrino sparsi per depositi fossiliferi, che non sieno dei loro proprii.

Tutto questo almeno è occorso a me di osservare in ogni mio giro in cerca di fossili. Fin' ora in tanti depositi da me visitati, non propriamente echinodermici, non sono arrivato ancora a raccogliere più di due Echini da due depositi diversi, e non più di qualche bivalve in depositi schiettamente echinodermici.

Di più: ciò che qui mi sembra veramente singolare, si è: che l' accantonamento degli Echini, tutt' altro che limitato alla classe in genere di simili esseri, pare che si estenda anche alle famiglie loro, e alle stesse loro specie. Fatto stà che i depositi echinodermici di Salto, sopra sessantotto specie di Echinidi, hanno dato quarantatrè specie di Spatangoidei, e sei specie di Cassiduli così divisi, senza però contare i generi meno numerosi in tali specie.

a) Spatangoidei	Hemiastri	n. 11
	Schizastri	n. 21
	Linzie	n. 11
b) Cassiduli . . .	Echinolampi	n. 4
	Conoclypei	n. 2

Digitized by Google

mentre che i depositi echinodermici di Montese, i quali non sono separati da quelli di Salto, se non da un piccolissimo Rio, che scorre a sud-est. di Cà di Zocco, sopra cinquantotto specie di Echini medesimi, hanno invece dato otto specie soltanto di Spatangoidei, e trentasette specie in cambio di Cassiduli, qui pure così ripartiti, e senza calcolare anche qui altre specie di generi meno importanti.

a) Spatangoidei Hemiastri n. 2 (raccolti ivi da me or fa pochi dì).
Schizastri n. 5.
Linzie n. 1.

b) Cassiduli. . . Echinolampi n. 28.
Conoclypei n. 9.

Se non che in proposito di ciò, qualcuno mi potrebbe benissimo far riflettere: che fra le specie degli Echini appartenenti alla famiglia degli Spatangoidei, molte di esse, e singolarmente le specie " Linthia „ e " Schizaster „, sono ordinariamente specie pelagiche: là dove non poche specie parimenti di Echini, spettanti in cambio alla famiglia dei Cassiduli, come sono appunto le specie " Echinolampas „ e " Conoclypeus „ sono all'incontro specie tutte di spiaggia: per cui invece di attribuire la cagione del diverso modo di unirsi ed acquartierarsi di coteste specie fra loro all'istinto di un tale loro accantonamento, si dovrebbe forse piuttosto riconoscere nel costume loro medesimo, di non " vivere tutte ad una stessa profondità „.

Certamente potrebbe darsi anche questo: ma tuttavia il trovare così strettamente segregate tra esse certe specie di animali, tutti appartenenti ad una stessa classe di viventi, in posti così poco estesi, e tanto vicini fra loro, mi sembra tale un fatto che non possa, nè debba essere assolutamente senza un significato qualunque.

Un altra osservazione ancora: se le specie eoceniche raccolte nei depositi omonimi della zona superiore delle località echinodermiche del Modenese, colle speeie mioceniche parimenti rinvenute nei depositi miocenici dell'indicata zona si confron-

Digitized by Google

tano insieme, il numero di esse ne risulta presso che pari; ma ove si paragonino invece le stesse specie mioceniche colle specie plioceniche, raccolte anch' esse nei prenominati depositi, il numero di queste ultime risulta al contrario appena poco più di un sesto di quello delle specie mioceniche medesime, essendo già queste trentanove, mentre che le specie plioceniche giungono appena al numero di quattro (1).

Ma e come tanta uguaglianza in quantità fra le specie eoceniche e mioceniche, esistenti nei depositi di sopra nominati, e tanta disparità invece fra le specie mioceniche e plioceniche degli stessi depositi?

Nell' accennare appunto superiormente alle specie date per plioceniche, trovate insieme alle altre nelle località echinodermiche Modenesi, e con queste annotate ancora come tali nel Catalogo, che ha dato argomento a queste osservazioni, affermai già francamente: che di terreno pliocenico, in nessuna delle due zone, contenenti le località echinodermiche preindicate, non se ne era fin' ora scoperto ombra di sorta; or bene la enorme differenza, che si riscontra fra la quantità numerica delle specie mioceniche, e quelle delle specie plioceniche predette, conferma ora pienamente questa mia opinione: poichè se il terreno pliocenico esistesse realmente in qualcuna delle località echinodermiche or ora indicate, o vi fosse pur' anche esistito, la quantità stessa delle specie, che avrebbe dovuto ivi lasciare, come rappresentanti della sua più o meno lunga dimora in esse, dovrebbe essere stata certamente assai più copiosa di quella che in realtà non sia.

Tra le centotretasei specie poi di Echini, di già più volte rammentate in questo lavoro, se ne sono pur' anche trovate al-

---

(1) A Montese nel miocene medio, che è richissimo di « bivalvi ed univalvi », e ove è anche comune « l' Aturia Morisii », non mi è ancora occorso di trovare un Echinide; al contrario nel miocene inferiore, che è invece abbondantissimo in Echini, meno che un qualche Pettine, ed un nucleo di Cono e di Psammobia, non ho mai trovato altri fossili, che non fossero Echinidi.

Digitized by Google

cune, che sono tutt' ora viventi; e fra le altre, coteste otto specie di certo:

Cidaris verticillum; Mazz.
» papillata; Lesk.
Spatangus purpureus; Müll.
» spinosissimus (Desor); Mazz.
Brissopsis lyriphera; Agass.
Schizaster canaliferus; Agass.
Echinolampas oviformis; Agass.
» depressus; Gray.

E' di queste otto specie, cinque si pescano attualmente anche nel Mediteraneo

Cidaris papillata; Lesk.
Spatangus purpureus; Müll.
» spinosissimus (Desor); Mazz.
Brissopsis lyrifera; Agass.
Schizaster canaliferus; Agass.

una proviene dall' Australia

Cidaris verticillum; Mazz.,

una dalla Florida

Echinolampas depressus; Gray.,

ed una dal Madagascar

Echinolampas oviformis;

Ove si osservi ora attentamente la disposizione topografica di queste otto specie di Echini, appartenenti anch' esse alla fauna delle località echinodermiche del modenese, apparisce subito che le medesime nella loro grande superiorità numerica, cinque contro tre, si richiamino tutte direttamente e senz' altro alla fauna echinodermica attuale del mediteraneo: argomento anche questo indicante certo sempre più: che la fauna delle prenominate località a echinodermi del modenese, in ogni tempo e nella sua grande maggioranza è pur sempre stata ancor dessa " fauna spettante al grande bacino mediteraneo dell' Europa centrale „, contenente i terreni sedimentari in genere del " gruppo terziario „.

Digitized by Google

CONCLUSIONE.

Come facilmente si scorge, nelle precedenti osservazioni non ho cercato sin quì, che di far conoscere man mano la fauna echinodermica delle preaccennate località del Modenese ne' suoi principali aspetti: e ciò l' ho poi direttamente fatto, affine di farne sempre meglio comprendere quel po' d' interessante, che può contenere in sè stessa, per lo studio della geologia e paleontologia di esse medesime località. È già mia vecchia convinzione, che soltanto l' esame accurato ed imparziale di una qualsiasi cosa in tutti i suoi membri, può anche additarne la vera sua importanza. Ma con tutto questo ne avrò io ottenuto lo scopo desiderato? La risposta è al mio lettore, se pur' anche di lettori avrò tanto onore di averne uno.

Ab. Giuseppe Mazzetti.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

1. Conoclypeus ovum Gratel. $^5/_4$ della grandezza naturale.
2. Micraster brevisulcatus Agass. grandezza naturale.
3. Spatangus spinosissimus (Desor), Mazz. $^1/_2$ della grandezza naturale.
4. Spatangus brissoides Mazz. $^2/_3$ della grandezza naturale.
5. Spatangus purpureus Müll. $^2/_3$ della grandezza naturale.
6. Spatangus purpureus vivente nel Mediterraneo, $^1/_2$ della grandezza naturale.

Digitized by Google

Digitized by Google

1

2

3

4

5

6

Phot. Calzolari e Ferrario - Milano.

R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena
Vol. XI. Serie II.

Digitized by Google

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI LETTERE

Digitized by Google

Digitized by Google

LAPIDI

DELLA NECROPOLI MUSULMANA

DI

DAHLAK

La collezione di lapidi dell'antico cimitero maomettano di Dahlak, della quale di recente si è arricchito il nostro Museo Civico (1), è sotto due aspetti, a mio credere, meritevole di considerazione, e cioè pei nuovi elementi forniti sullo stile lapidario arabo dalle epigrafi di quelle pietre, e sotto il rispetto storico, tanto più interessante quest'ultimo per noi italiani dacchè sull'arcipelago di Dahlak sventola ora la bandiera nazionale.

Innanzi però ch'io dica partitamente di quelle lapidi mi pare conveniente premettere le notizie più attendibili che potei

---

(1) Il Tenente di Vascello, sig. Paolo Parenti, mentre si trovava di stazione nelle acque di Massaua mandò in dono al patrio Museo le prime quattro lapidi che, non senza fatica, potè procurarsi dagli indigeni dell'isola di Dahlak. E più avrebbe fatto se ragioni di servizio non l'avessero costretto a veleggiare altrove.

Il Cav. Vincenzo Ragazzi, capitano medico alla Direzione dell'Ospedale natante in rada di Massaua, opportunamente diretto per lettere dal, più che Direttore, creatore del Museo civico modenese, Cav. Carlo Boni, riuscì ad acquistare per conto del Museo stesso, altra trentina di lapidi che a cura del Ragazzi giunsero non ha guari a Modena.

Digitized by Google

procurarmi intorno all' Isola di Dahlak ed all' Arcipelago cui dà il nome.

L' Isola di Dahlak, la maggiore di quel gruppo d' isole, è situata di fronte a Massaua a circa una cinquantina di chilometri da quella costa. Conosciuta da tempo col nome di Dahlak el Kebir, la grande Dahlak, fu detta dai Romani Orina (1). È ancor celebre, e maggiormente lo fu in addietro, come centro della pesca delle perle nel Mar Rosso ed è pur nota per le antichità Aduletiane in essa rinvenute.

Florida ai tempi romani ed anche molto più tardi quando gli Etiopi prima, i Portoghesi dopo, ma per poco (2), vi avevano una stazione marittima, decadde del tutto dopo il XVI secolo, di modo che presentemente la popolazione di quell' isola e di altre due minori, le sole abitate dell' Arcipelago, ragguaglia poco più di un migliaio e mezzo di anime. Vi si continua ancora la pesca delle perle e di altri prodotti marini (3), ma poichè non approdano ad essa, malgrado il riparato porto di cui è dotata, i grandi piroscafi che viaggiano ad Aden e da questa ritornano, il suo movimento commerciale rimane molto limitato.

---

(1) Ammisi senz' altro questo nome che lessi in un Dizionario geografico perchè parvemi derivazione dei verbi latini *urino, as, are, avi, atum* e *Urinor, aris, ari natus sum* tuffare e tuffarsi nell' acqua, allusione al mezzo col quale colà si pescano le perle.

(2) I Portoghesi, come si vedrà, avrebbero avuto Dahlak dopo il 1540, ma sarebbero poi stati sostituiti dai Turchi intorno al 1562. Gli Abissini furono padroni dell' Arcipelago da tempi remotissimi e vi avrebbero imperato sino alla metà del IX secolo.

(3) Oltre la pesca delle perle, che si fa dal maggio all' agosto, quella popolazione si occupa pure della pesca della madreperla, delle conchiglie di Kauris, le quali corrono come piccola moneta nell' interno dell' Africa; della ricerca delle tartarughe per le scaglie loro e, finalmente, della pesca del Dugong [Halicore Dugong] nella qual ultima concorrono pure gli abitanti delle coste vicine.

Questo nome Dugong è derivato evidentemente dall' ebraico dugon דגון nome del *Manatus* mammifero delle famiglie dei cetacci erbivori frequente sopratutto nel mare dell' India. Nell' Appendice etimologica al dizionario del Littré si trova però scritto che il nome di Dugong sarebbe derivato dalla voce malese دیوغ duiung.

Digitized by Google

Prima che l'Eritrea fosse occupata dagli italiani, gli abitanti dell' Arcipelago, che sono musulmani, ma originari della costa africana del Samhar, erano soggetti ad uno Sceico, il quale riceveva l' investitura dagli Egiziani, padroni allora di Massaua, a fronte del tributo annuo di mille piastre di Maria Teresa.

Il più importante di quella dozzina di villaggi, fra i quali è sparsa la popolazione di Dahlak, e delle altre due isole Nure e Nakala, conta appena cinquanta capanne.

Questo Arcipelago, composto di un centinaio di isole, isolotti e scogli, di poco sopravvanza il livello del mare e sembra debba la sua origine ad una rivoluzione vulcanica. Non vi si trova acqua nè corrente nè di sorgente, ma nella cavità della roccia che ne costituisce l' ossatura, raccogliesi l' acqua di pioggia sufficiente a provvedere al bisogno d' acqua potabile ed anzi, per tal sorta di cisterne naturali, fu anche segnalata l' isola di Dahlak (1).

Presso il suaccennato principale villaggio trovasi la Necropoli maomettana, ormai abbandonata, e le tombe giaciono attorno a due piccoli edificj che probabilmente coprono le ossa di qualche pio musulmano. Questi antichi tempietti, o meglio sepolcri, oggi consunti dalla forza distruggitrice del tempo, furono riprodotti, da fotografie nella Tavola 1.ª (2).

Oltre le lapidi del Museo Civico, altre cinquanta furono ritirate dal Comando di Massaua e stanno riposte da tempo nei sotterranei di quel palazzo. Questo centinaio di pietre sepolcrali le sole rimaste discretamente conservate, non rappresentano però il numero delle tombe della Necropoli, ma piuttosto quello di quei sepolcri di trapassati che per grado o per posizione sociale

---

(1) Dice il Raffray [*Abyssinie*, Paris, 1880, p. 384] « Si le filon [de la rôche] « vient à s' elargir, la dépression s' accentue et finit par devenir une fissure quel- « quefois très profonde. C' est là que dans la saison des pluies, l' eau s' emmagasine « en quantité suffisante pour les rares habitans et leurs petits troupeaux de chèvres ».

(2) Tali fotografie mi furono inviate dal Cav. Ragazzi al quale debbo anche alcuni particolari intorno a Dahlak.

Digitized by Google

ebbero l' ultima loro dimora distinta con lapide scritta. Le rimanenti tombe saranno state segnate da un semplice sasso senza epigrafe.

In nessuna delle relazioni di viaggi alla costa della Eritrea, da me lette, e nemmeno nel *Bollettino della Società Geografica,* che pure è ricco di ragguagli concernenti quei possedimenti italiani, m' occorse di trovar menzionata la Necropoli di Dahlak che è solamente e brevemente ricordata in una dispensa uscita in luce nel 1890, del supplemento all' *Enciclopedia italiana.*

Ritornando ora a discorrere dell' interesse che possono presentare le lapidi del nostro Museo e facendomi prima a considerarle sotto l' aspetto linguistico, avvertirò essere desse tutte fornite d' epigrafi mortuarie le quali, arabe per lingua, vanno poi distinte per la scrittura in esse adoperata. Perchè le une recano caratteri cufici genuini, altre sono scritte con quel cufico che l' abate Lanci, dotto orientalista romano, chiamava *tamureo,* altre infine, e le più recenti, nella scrittura araba moderna conosciuta col nome di neshi.

Monumenti con tal foggia di caratteri, specie cufici e tamurei, non ve ne ha molti in Italia, pochissimi poi nei musei pubblici o presso i privati dell' Italia settentrionale. Ma perchè facilmente quei caratteri si possono vedere riprodotti nelle opere speciali di letteratura araba, non basterebbero per sè stessi a dar pregio alle nostre lapidi.

Invece le formule delle iscrizioni hanno particolare importanza a spiegare la quale mi giova riportare quanto scriveva nel 1828 il chiar.mo orientalista Reinaud (1) a proposito delle iscrizioni funerarie degli Arabi:

" Il règne dans ces sortes de formules une telle variété, „ qu' un auteur a composé un ouvrage particulier à leur sujet „

---

(1) *Description des Monumens Musulmans du Cabinet de M. le Duc de Blacas* par M. Reinaud. Paris 1828, Tom. II°, pag. 476.

Digitized by Google

ed in nota aggiungeva che autore di quell' opera era Leone Africano e terminava, il Reinaud, con queste parole:

" Malheureusement ce traité n' est point parvenu jusqu' à „ nous. Cette lacune sera remplie en partie par un ouvrage de „ M. l' abbé Lanci, professeur de langue arabe au collège de la „ Sapience à Rome qui doit donner les dessins et l' explication „ de plusieurs monumens funéraires „.

Difatti vide la luce nel 1840 (1) l' Opera del Lanci la quale dà ragione, con corredo di molta erudizione, di trentasei iscrizioni funerarie, nelle quali però, parecchie formule trovansi ripetute, anzi alcune troveremo riprodotte anche in talune delle epigrafi di Dahlak. Però queste nostre hanno altre formule affatto differenti da quelle delle iscrizioni del Lanci e ciò appunto mi fa ritenere che la loro pubblicazione possa valere a completare in qualche piccola parte l' opera dell' illustre orientalista romano.

Per quanto poi si riferisce all' importanza storica delle lapidi del nostro Museo, bisogna aver presente che scarse sono e sempre un po' vaghe le notizie che si possono trovare negli Storici intorno al primo apparire degli Arabi sia sulla costa dell' odierna Eritrea sia, e più ancora, nell' Arcipelago di Dahlak. Ora cogli elementi forniti dalle epigrafi di quelle lapidi, combinati con altre notizie, parmi si riesca a determinare con sufficiente approssimazione il tempo nel quale i Musulmani ebbero la prima stabile dimora a Dahlak e a confermare con maggior esattezza il momento del loro primo comparire sulla parte di costa africana che fronteggia quell' Arcipelago.

Gli Storici ricordano che verso la fine del primo secolo dell' Egira cioè intorno al nostro VIII secolo i Musulmani avevano fondato a Zeila un loro regno sulle rovine di quello degli Adeliti, ma non dicono che in quell' occasione gli Arabi occupassero altri punti della costiera africana o alcune delle isole a quella

---

(1) *Trattato delle sepolcrali iscrizioni in Cufica, Tamurea e Nischia lettera da' Maomettani operate*, composto dal cavaliere Michelangelo Lanci, Lucca 1840.

Digitized by Google

prossime. Vi accenna invece il Giobbe Ludolf [Leuthof] (1) descrivendo il confine orientale dell' Etiopia, laddove scrive: " Ver- „ sus orientem olim mare rubrum terminus fuit, capto portu „ Arkiko cum insula adjacenta Matzua, littus omne Turcis im- „ perio potiuntur „. Però oltre che l' indicazione è vaga essa si riferisce all' occupazione di Arkiko e di Massaua per opera dei Turchi, i quali come vedremo, erano già stati preceduti da altri Musulmani. Nulla poi si dice riguardo Dahlak. Per ciò che concerne quest' ultima abbiamo ora le date che si leggono nelle lapidi del Museo che farebbero risalire, lo stabilirsi dei Musulmani in quell' isola, almeno sino all' anno 1025. Ma se si considera poi che le lapidi del Museo che non hanno data scritta, sono appunto le più vetuste e, per caratteri non dubbj, alcune di esse debbono ritenersi anteriori di oltre un secolo a quella che reca la data più antica, si può senza tema di errare credere che fino dalla seconda metà del IX secolo Dahlak era dimora stabile di una popolazione musulmana. Già fin d' allora aveva essa cominciato a popolare de' suoi morti quella Necropoli che le servì poi per oltre tre secoli, poichè la lapide più recente porta la data del 653 dell' Egira pari al 1255 e. v.

Invece la presa di possesso per parte dei Musulmani della sponda africana di fronte a Dahlak, ebbe luogo assai posteriormente, prima però ancora del tempo indicato dal Ludolf il quale fissa al 1562 l' anno nel quale i Turchi se ne sarebbero resi signori (2). Dovrebbesi infatti ritenere che quell' occupazione accadde alcuni anni prima del 1540, e per opera dei Musulmani di Dahlak stando all' itinerario di viaggio di Dom Joâo de Castro. Questi era Capitano di un galeone della flotta portoghese

---

(1) *Historia Æthiopica*, Liber I.

Nella lingua abissina rimase il titolo di Bahar Negaś prefetto marittimo, che, il citato autore, asseriva competere al Governatore di Dobarwa. Del resto gli Abissini hanno costantemente preteso al possesso di diritto del lido marittimo ed anche recentemente nelle trattative corse fra la Corte Scioana ed il nostro Governo si trova affermato che il litorale africano del Mar Rosso è di ragione dell' Etiopia.

(2) Opera citata, Liber II, Cap. VI, 34.

Digitized by Google

accorsa, sotto il comando di Cristoforo di Gama, in aiuto dell' Abissinia quando nel 1540, Mohammed Gragne, Sultano di Harar e di Zeila, aveva invaso quell' impero e vi menava strage. Il De Castro così si esprime: " Quest' isola di Massaua era poco „ tempo fa sotto la signoria del prete Joâm [il prete Giani „ nome col quale, come è noto, fu a lungo designato dagli europei „ l' Imperatore d' Etiopia] con tutta la costa che va dal Capo „ Guardafui fino a quella di Çuaquem [Suakim], ma da qualche „ anno in quà l' ha conquistata il Re di Dallaqua [Dahlak] „ (1).

L' occupazione di Massaua risalirebbe adunque ad alcuni anni prima del 1540 per opera dei Musulmani già da molto prima stabiliti a Dahlak, in principio probabilmente a guisa di tribù sotto il comando di uno sceico, in seguito, secondo dicono le epigrafi del Museo, costituirono un Sultanato. Un sovrano di questo piccolo regno deve esser stato il conquistatore di Massaua ricordato dal De Castro.

Vero è che i Portoghesi riuscirono a respingere Mohammed Gragne ed è verosimile che scacciassero da Massaua il Sultano di Dahlak anzi occupassero l' Arcipelago, però, non andò guari che partiti i Portoghesi, comparvero i Turchi e cioè nell' anno 1562. Furono essi chiamati da uno dei prefetti marittimi, Bahar Negaš, che aspirava al trono dell' Etiopia (2), occuparono il lido del Mar Rosso ed allora forse Dahlak passò alle dipendenze di Massaua.

Venendo adesso alla descrizione delle lapidi dirò come sieno in generale rozzamente tagliate da una *roccia eruttiva di basalte doleritico che è comune lungo la costa del Mar Rosso* (3); e sembra che a simile roccia accenni il Raffray nella relazione della sua gita a quell' isola (4).

---

(1) Vedi *Boll. Società Geografica*, 1890.

(2) I Ludolf, *Hist. Æthiopia*, Liber II, Cap. VI, 34.

(3) Questa precisa indicazione devo alla cortesia del Ch.mo Prof. Dante Pantanelli.

(4) Vers le centre de l'île (scrive egli), de place en place, on voit à la surface du sol une *rôche* bleuâtre, très dure aux arrêtes vives et tormentées etc. etc. — *Abyssinie* par Achille Raffray. Paris, 1880, pag. 384.

Digitized by Google

I caratteri coi quali furono scritte le epigrafi veggonsi in alcune lapidi praticati in incavo, in altre lasciati in rilievo ed in alcune anche accuratamente condotti.

Tutte le epigrafi cominciano colla invocazione: *In nome di Dio misericordevole, misericordioso;* la quale del resto, come è saputo, principia qualsiasi scrittura musulmana. Dopo di quella formula le più vetuste iscrizioni, le quali sono anche le più semplici, hanno l'espressione: *Questa è la tomba di,* seguita dal nome del defunto. In altre all'invocazione iniziale segue qualche pio testo, tolto per lo più dal Corano, che allude in qualche modo al trapasso da questa vita.

Al nome del defunto segue generalmente la frase: *Gli usi Iddio misericordia;* quindi, specie nelle meno antiche, havvi la data della morte col giorno della settimana, quello del mese, il mese e l'anno, ma il tutto in lettera senza alcuna cifra numerica.

Finalmente alcune epigrafi, o in principio o in fine, contengono l'invocazione della benedizione divina sul profeta Maometto e sulla sua famiglia.

Le iscrizioni più recenti sono più prolisse. E si può ritenere anche che le lapidi più antiche hanno l'iscrizione in caratteri cufici, le meno in caratteri arabi conosciuti col nome di Neshi.

Procederò ora ad esaminare partitamente ogni epigrafe, cominciando dalle più antiche per finire a quelle per tempo più vicine a noi. Le ho trascritte nei caratteri odierni e vi ho messo di fronte la traduzione seguita da qualche nota.

Digitized by Google

LAPIDI

Digitized by Google

I. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso. Quelli ai quali fu promessa
da noi bella ricompensa, quelli saranno allontanati [dal soggiorno terribile], non ne udranno
il più minimo rumore ed essi
di ciò che desiderarono le anime loro
godranno eternamente [Cor. XXI, v. 101-102] O! Dio quando
le genti saranno radunate per la decisione della
sentenza [e per lo scrutinio] della fede pura
poni il tuo servo A-
bu el Hassan Ali ben A' bd
Allah Maimun ben Giaber
ben Mohammed ben Abd Allah
ben Giaber fra i securi
i quali al timore non sono
soggetti e non sono
[afflitti]

Quest' epiprafe è riprodotta a grandezza ridotta nella Tav. 2.ª. Intorno ai tre lati dell' iscrizione, trascritta qui in caratteri nostri, gira altra epigrafe non decifrata. La riproduzione della stessa nella citata tavola è quale apparve alla vista acutissima del disegnatore, però non ho potuto controllarla discernendone io appena e molto confusamente i caratteri.

Nell' iscrizione principale la scrittura cufica di formà purissima, la mancanza dell' Alef nella parola الذين, il doppio nun di مننا in luogo del tescdid ed infine la mancanza di un Alef nella voce اولايك fanno manifesta l' antichità di questa lapide che assegnerei al più tardi al terzo secolo egiriaco e più precisamente alla metà del IX secolo dell' era volgare.

Nessuna delle espressioni delle epigrafi del Lanci trovasi ripetuta in questa iscrizione.

Digitized by Google

I.

بسم الله الرحمن الر
حيم ان لذين سبقت
لهم منا الحسنى او
لئك عنها مبعدون لا يسمعو
ن حسيسها وهم
فيما اشتهت انفسهم
خالدون اللهم اذا
حشرت الناس تفصل ا
لقضا وامانه الحر
فاجعل عبدك ا
بى الحسن على بن عبد
الله ميمون بن جابر
بن محمد بن عبد الله
بن جابر من (ا)لامنين
الذين لا خوف
(علي)هم ولا هم
(يحزنون)

Digitized by Google

II. Cufica.

In nome di Dio misericor-
devole, misericordioso. Di' egli è
Dio unico, Dio
eterno, non generò e
non fu generato e non fu
a lui pari alcuno [Cor. CXII]
O! Dio poni la famiglia
di Ibn el Abbas ben Fadl
ben el Ualid fra i compagni
di Maometto, il Profeta.

III. Cufica.

In nome di Dio misericor-
devole, misericordioso; e sia propizio
Iddio a Maometto, il sigillo (cioè l'ultimo)
dei Profeti O! Dio quando
radunerai i primi e gli ultimi
nel tempo prestabilito del giorno
consaputo poni la famiglia di Ibn
el A'bbas ben Fadl ben el A'b-
bas ben el Ualid fra i securi
per la tua misericordia. Amen.

Queste due stele si riferiscono ad un unico defunto. Il Lanci opina che la doppia stela riferentesi ad uno stesso trapassato si debba attribuire all'uso di apporne una subito avvenuto il seppellimento ed una seconda, più elaborata, qualche tempo dopo quando cioè si abbia avuto agio di comporre l'iscrizione ed inciderla in forma più accurata. Nel caso particolare l'una epigrafe non si distingue realmente dall'altra nè per più scelta dizione nè per più studiato lavoro dello scarpellino.

Eccetto il brano Coranico della prima, le due iscrizioni per nulla ricordano quelle del Lanci, anzi l'espressione: *poni la famiglia di* ecc.; e l'analoga della prima lapide: *poni il tuo servo* ecc. è veramente insolita. Fra le iscrizioni riportate nell'opera del Niebhur quella della sua tavola VII, che è la copia di una lapide

Digitized by Google

II.

بسم الله الر
حمن الرحيم قل هو
الله احد الله
الصمد لم يلد و
لم يولد ولم يكون
له كفوا احد
اللهم اجعل اهل
ابن العباس بن فضل
بن الوليد من ررقا
محمد النبى

III.

بسم الله الر
حمن الرحيم وصل
الله على محمد خاتم
النبيين اللهم اذا
جمعت الاولين والا
خرين لميقات يوم
معلوم فاجعل اهل ابن
العباس بن فضل بن العبا
س بن الوليد من الا
منين برحمتك امين

veduta dal Niebhur a Galefeca nell' Arabia, pare abbia una formola simile a questa. senonchè il disegno mal riuscito nulla permette di affermare come non permise al Reiske di darne la spiegazione.

Per la forma della scrittura di queste due epigrafi, per la sobrietà del dettato e pel confronto con le altre lapidi che hanno in iscritto la data, è da ritenersi che queste due risalgano alla seconda metà del terzo secolo egiziano, intorno cioè alla fine del IX secolo e. v.

Per i *primi* ed *ultimi* bisogna intendere gli *antichi*, dei quali molti saranno gli eletti, ed i *moderni* che in numero minore si salveranno. Così commentano i dottori musulmani tali espressioni ripetute nel Corano.

La terza epigrafe è riprodotta nella tavola 3.ª

Digitized by Google

IV. Cufica.

In nome di Dio misericordevole,
misericordioso. Di' egli è
Dio unico, Dio
eterno, non generò
e non fu generato e
non fu a lui pari
alcuno [Cor. X. 112] questa è la tomba
di Omm H . ri . m . liber-
ta di Ishaq ben Ibr....

V. Cufica.

In nome di Dio misericordevole,
misericordioso; e certo il più grande
degli infortuni è la disgrazia del profeta
Maometto, lo benedica Iddio
e gli dia salvezza. Questa è la tomba
di Omm H . ri . m . liberta
di Ishaq ben Ibrahim
di Balqa. Abbia di lei misericordia
Iddio e sia soddisfatto
di lei e la metta a dimora
nei giardini di delizia.

Anche queste due stele appartengono ad un solo trapassato. Veramente la seconda è più prolissa della prima e quindi l' opinione del Lanci in argomento alla doppia stela qui troverebbe conferma.

Le crederei del principio del quarto secolo egiriaco e quindi dei primi anni del X secolo e. v.

Il nome della defunta non si può meglio precisare ed anche le consonanti indicate potrebbero essere errate mancando i punti diacritici che le distinguono.

Balqa era città fra la Siria e Uadi Cora.

Digitized by Google

IV.

بسم الله الرحمن
الرحيم قل هو
الله احد الله
الصمد لم يلد
ولم يولد و
لم يكن له كفوا
احد هذا قبر
ام حريمه مو
لاة اسحق بن ابر.....

V.

بسم الله الرحمن
الرحيم وان اعظم
المصايب المصيبة بالنبى
محمد صل الله عليه
وسلم هذا قبر
ام حريمة مولت
اسحق بن ابرهيم
البلاقى رحمها
الله ورضى
عنها واسكنها
جنات النعيم

Digitized by Google

VI. Cufica.

In nome di Dio mise-
ricordevole, misericordioso.
Testificò Iddio
non esservi altro Dio fuori di lui
e sì gli Angeli
e i forniti di scienza reg-
gentesi con giustizia. Non vi è Dio
se non lui, il forte,
il sapiente. Quest-
a è la tomba di Yusuf
ben Ismail, abbia misericordia di lui
Iddio.

VII. Cufica.

In nome di Dio misericordevole,
misericordioso. O Dio quando
radunerai i primi e gli ul-
timi nel tempo prestabilito del giorno
consaputo poni Sad-
ad ben Othman ben Abd
Allah fra i compagni di Maometto
in Paradiso.

Sono entrambe coetanee, alle due precedenti. La costruzione dell' espressione che dopo l' invocazione divina comincia la prima epigrafe, deve rettificarsi così: Testificò Iddio, e sì gli Angeli e i forniti di scienza, che non vi è altro Dio se non lui, reggentesi con giustizia.

Si osserva la mancanza di un alef nella parola اولوا errore di ortografia dell'epigrafista o forse meglio dimenticanza dello scalpellino.

Nella seconda il nome che leggo Sadad potrebbe anche essere Scedad il che non può stabilirsi non essendo segnati nel carattere cufico i punti diacritici.

Digitized by Google

VI.

بسم الله الر
حمن الرحين
شهد الله
انه لا اله الا هو
والملائكه
ولوا العلم قا
ئما بالقسط لا اله
الا هو العزيز
الحكيم هذ
ا قبر يوسف
بن اسمعيل رحمه
الله

VII.

بسم الله الرحمن
الرحيم اللهم اذا
جمعت الاولين والا
خرين لميقات يوم
معلوم فاجعل سد
اد بن عثمن بن عبد
الله من رفقا محمد
فى الجنه

Digitized by Google

VIII. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso. Di' egli è Dio unico,
Dio eterno, non generò
e non fu generato e non fu
a lui pari alcuno [Cor. CXII] questa è la tomba di Othman ben Said
ben Ibrahim Ishaq.
Abbia di lui misericordia Iddio.

Deve pure essere del principio del quarto secolo egiriaco.

IX. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso. Di'egli è Dio unico, Dio
eterno, non generò e
non fu generato e non fu a lui
pari alcuno. Questa
è la tomba di Ahmed ben
Obeid il Nazareno,
Abbia di lui misericordia Iddio.

Stessa epoca cioè principio del quarto secolo dell' Egira.

Digitized by Google

VIII.

بسم الله الرحمن الر
حيم قل هو الله احد
الله الصمد لم يلد
ولم يولد ولم يكن
له كفوا احد هذ
ا قبر عثمن بن سعيد
بن ابرهيم اسحق
رحمه الله

IX.

بسم الله الر
حمن الرحيم قل
هو الله احد الله
الصمد لم يلد و
لم يولد ولم يكن له
كفوا احد هذا
قبر احمد بن
عبيد النصرانى
رحمه الله

Digitized by Google

X. Cufica

In nome di Dio misericordevole, misericordioso: e sia propizio Iddio a Maometto il Profeta. Questa è la tomba di Mohammed ben Ahmed ben Ghassan. Abbia di lui misericordia Iddio.

XI. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso. Ogni anima è per provare la morte; e veramente saranno sodisfatte le vostre mercedi il giorno della risurrezione; e chi verrà allontanato dal fuoco e introdotto nel paradiso certamente sarà felice: imperocchè la vita mondana non è che godimento fallace. [Cor. III, v. 186] Questa è la tomba di Omm Yahia figlia di El Aas ben el Fadl: le si usi misericordia. Morì nel giorno di Martedì nei 16 giorni trascorsi di Rebi' Ultimo. Anno sedici e quattrocento [416]. Abbia di lei misericordia Iddio e le renda prospera la sua abitazione. Maometto, benedicalo Iddio e gli dia salvezza.

Il testo coranico con cui principia l'epigrafe è uno dei più frequenti nelle iscrizioni funerarie. Il Martedì [o terzo giorno] sedici di Rebi' ultimo del 416 dell'Egira corrisponde al Mercoledì 16 giugno 1025 e. v. La finale di quest'epigrafe è insolita nelle iscrizioni mortuarie ed è con qualche peritanza che ne dò la traduzione. Nell'ultima riga vi è una sola *alef* in luogo di الله.

Digitized by Google

X.

بسم الله الر
حمن الرحيم و
صلى الله على محمد
النبى هذا قبر
محمد بن احمد
بن غسان
رحمه الله

XI.

بسم الله الر
حمن الرحيم
كل نفس ذايقه
الموت وانما تو
فون اجوركم يوم
القيامه فمن زحزح عن ا
لنار وادخل الجنه فقد
فاز وما الحياه الدنيا الا متا
ع الغرور هذا قبر ام
يحيى ابنت العاس بن الفضل
رحمها توفيت يوم الثلثا
لسته عشر خلون من ربيع
الاخر سنه سته عشر وا
ربع مايه رحمها الله
وانجعها معها محمد
صل ا عليه وسلم

Digitized by Google

XII. Cufica.

In nome di Dio misericordevole,
misericordioso. Di': egli è Dio
unico, Dio eterno non
generò e non fu generato e non
fu a lui pari alcuno [Cor. CXII] quest-
a è la tomba di Omm Yahia figlia di Abd
Allah ben es Safal ben Arima mo-
rì a metà di Sceual dell' anno
dicianove e quattrocen-
to (419). Abbia di lei misericordia Iddio e sia propizio Iddio
a Maometto il profeta e alla sua famiglia
e dia salvezza.

I nomi Safal ben Arima leggo a caso mancando i punti diacritici che mi assicurino che sia la vera lezione. La metà di Sceual ossia il 15 Sceual del 419 dell' Egira corrisponde al 7 Novembre 1028 e. v.

Digitized by Google

XII.

بسم الله الرحمن
الرحيم قل هو الله
احد الله الصمد لم
يلد ولم يولد ولم
يكن له كفوا احد هذ
ا قبر ام يحيى بنت عبد
الله بن الصقل بن ازنمه تو
فيت نسف من شوال سنه
تسعه عشر واربعما
يه رحمها الله وصلى الله
على محمد النبى واله
وسلم

Digitized by Google

XIII. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole,
misericordioso. Tutto ciò che è
su di essa [terra] è caduco e resterà la
faccia del tuo signore dotata di maestà
e di gloria [Cor. X. LV. 26-27]. Questa è la tomba di Ailan ben
el Hassan ben Mohammed ben Ailan.
Morì nel giorno di Venerdì dei dieci
trascorsi di Sciaban dell' anno
quattro e trenta e quattro[cento] (434)
Abbia misericordia di lui Iddio.
E sia propizio Iddio a Maometto
il Profeta e alla sua famiglia e la colmi
d' ogni prosperità e benedizione.

Il testo coranico di questa iscrizione è pure frequentemente usato nelle epigrafi mortuarie. Il 10 Sciaban del 434 corrisponde al 26 Marzo 1042 e. v.

Tamurea è quella scrittura cufica che degenerata dalla sua semplicità cominciò ad essere più ornata nella forma e ciò secondo il Lanci. Il nome l'avrebbe da طامور lettera maiuscola o capitale.

Digitized by Google

XIII.

بسم الله الرحمن
الرحيم كل من
عليها فان ويبقا و
جه ربك ذو الجلال وا
لاكرام هذا قبر عيلان بن
الحسن بن محمد بن عيلان
توفى فى يوم الجمعة لعشر
خلون من شعبان سنه
اربع وثلثين واربع (ما)
يه رحمه الله
وصلى الله على محمد
النبى واله وسلم
تسليما

Digitized by Google

XIV. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso. Tutto ciò che è su di essa [terra] è caduco e resterà la faccia del tuo Signore dotata di maestà e di gloria [Cor. LV, 26, 27].
Questa è la tomba di Maria figlia di Omar ben Abd Allah. Morì nel [mese di] Rebi' ultimo. Anno sei e trenta e quattrocento [436]. Abbia di lei misericordia [Iddio]

Corrisponde la data egiriaca alla fine di Ottobre del 1044 e. v.

Il nome di Maria; Mariam, è molto comune per denominare le donne Musulmane. Merita a questo proposito di ricordare una osservazione già fatta molti anni addietro circa ad un fatto generalmente poco conosciuto. E cioè che il concetto della immacolata concezione della Vergine Maria si trova espresso nel ver. 37 della Sura III del Corano in questi termini:

« Et cum dixerunt angeli: O Maria certe Deus elegit te et puram fecit te et « elegit te super mulieres [omnium] Mundorum ». Il Cardinale Pietro Damiano riflette che da Maometto di ciò non fu più parlato sino a S. Bernardo. I crociati. taluno crede, nel XII secolo avrebbero riportato in Occidente questo concetto che il Profeta degli Arabi aveva probabilmente attinto dai Cristiani, che a cagione di tale credenza, si erano, dalla Siria e dall' Egitto, rifugiati in Arabia.

Digitized by Google

XIV.

بسم الله الرحمن الر
حيم كل من عليها فا
ن و يبقا وجه ربك ذ
و الجلال و الاكرام
هذا قبر مريم ا
بنة عمر بن عبد ا
لله توفيت فى ربيع
الاخر سنة ست و ثلثين
و اربعماية رحمها

Digitized by Google

XV. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Certamente avete nell' inviato di Dio
un ottimo esempio per coloro che sperano
in Dio e [credono] nell' ultimo giorno e che rammentano Iddio
di frequente [Cor. XXXIII, 21]. Questa è la tomba di Aqbal liberto di Hafir
ben Ahmed. Morì il giorno di Mercoledì dei due gior-
ni rimanenti di Scia' ban. Anno due
e cinquanta e quattrocento (452). Abbia di lui misericordia
Iddio

Questa Epigrafe e la seguente si riferiscono al medesimo defunto.

XVI. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Ogni anima è per provare la morte;
e veramente saranno soddisfatte le vostre mercedi
il giorno della risurrezione; e chi sarà allontanato
dal fuoco e introdotto nel paradiso certamente
sarà felice: imperocchè la vita mondana non è che godi-
mento fallace. Questa è la tomba
di Aqbal liberto di Hafir ben Ahmed.
Morì il giorno di Mercoledì dei due giorni
rimanenti di Scia' ban. Anno
due e cinquanta e quattro-
cento [452] abbia di lui misericordia Iddio.

I nomi di Aqbal e di Hafir, per la ragione detta della mancanza dei punti diacritici, non sono sicuri. Non così quello di Ahmed che è nome usuale.

La data egiriaca delle due stele precedenti si ragguaglia al 26 ottobre del 1060 e. v.

Digitized by Google

XV.

بسم الله الرحمن الرحيم
لقد كان لكم فى رسول الله
اسوة حسنة لمن كان يرجو
الله و اليوم الاخر و ذكر الله
كثيرا هذا قبر افعال مولا حمر
بن احمد توفى يوم الاربعا ليو
مين بقين من شعبان سنة اثنين
و خمسين واربعماية رحمه
الله

XVI.

بسم الله الرحمن الرحيم
كل نفس ذايقة الموت
و انما توفون اجوركم
يوم القيامة فمن زحزح
عن النار و ادخل الجنة فقد
فاز وما الحياة الدنيا الا متا
ع الغرور هذا قبر
افعال مولا حمر بن احمد
توفى يوم الاربعا ليومين
بقين من شعبان سنة
اثنين وخمسين واربع
ماية رحمه الله

Digitized by Google

XVII. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Di': egli è Dio unico, Dio eterno, non generò
e non fu generato e non fu a lui pari alcuno [Cor. CXII].
Questa è la tomba di Hassan ben Mafil liberto
di Ibn Ahmed. Morì il giorno di giovedì
termine di Giomad primo. Anno
sette e cinquanta e quattro-
cento (457).

La data segnata corrisponde al 8 marzo 1064 e. v. Non è certa, per le ragioni ripetute, la lezione del nome Mafil.

XVIII. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Iddio, non vi è Dio se non lui, il vivente, il permanente; non
lo vince nè l' assopimento nè il sonno. A lui appartiene quanto è nei
cieli e quanto è in terra. Chi può
intercedere presso di lui se non col suo beneplacito? Sa
l'avvenire e il passato e [gli uomini] non
abbracciano della sua scienza se non ciò ch' Egli vuole. Esten-
de il suo trono sui cieli e sulla terra e non
l' affatica la cura di essi. Egli è l' Altissimo, il Grande
[Cor. II, 256].
Questa è la tomba di . . . . . liberto
di El Uariri. Morì la notte del venerdì principio
di Giomadi ultimo. Anno uno e sessanta
e quattrocento [461]. Abbia di lui misericordia Iddio e sia Iddio propizio
a Maometto, il Profeta, e sua famiglia e lo colmi d' ogni prosperità.

Il testo coranico di quest' epigrafe è il versetto detto del Trono recitato di solito in guisa di preghiera: i Maomettani lo portano appeso al braccio in forma d' amuleto. Sui nomi valga la solita riserva.

La data egiriaca corrisponde al 28 Marzo 1069.

Digitized by Google

XVII.

بسم الله الرحمن الرحيم
قل هو الله احد الله الصمد لم يلد
ولم يولد ولم يكن له كفوا احد
هذا قبر الحسن بن مفعل مولا
ابن احمد توفى يوم الخميس
سلخ جمادي الاول سنة
سبع وخمسين واربعا
ماية

XVIII.

بسم الله الرحمن الرحيم
الله لا اله الا هو الحى القيوم لا
تاخذه سنة ولا نوم له ما فى
السموات وما فى الارض من الذى
يشفع عنده الا باذنه يعلم ما
بين ايديهم وما خلفهم ولا
يحيطون بشى من علمه الا بما شا و
سع كرسيه السموات والارض ولا
يوده خفظها وهو العلى العظيم
هذا قبر السعاد بحاح مولا
الوريرى توفى ليله الجمعة مستهل
جمادى الاخر سنة احد وستين
واربعماية رحمه الله وصلى الله
على محمد النبى واله وسلم تسليما

Digitized by Google

XIX. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Di': egli è Dio unico, Dio eterno, non generò
e non fu generato e non fu a lui pari alcuno. Questa
è la tomba di Omm Scioaib liberta di Salama liberto
di El Hossein ben Abd Allah ben Ahmed il Curdo,
morì il giorno di Mercoledì dei dodici trascorsi
del mese di Safar. Anno quattro e sessanta e quat-
trocento [464]. Abbia di lei misericordia Iddio e le renda prospera
la sua abitazione.
Maometto, benedicalo Iddio e gli dia salvezza.

I nomi di questa stela per esser dei soliti non sono dubbi. La data corrisponde al 10 Novembre 1071. Sul finale dell'iscrizione ripeto la riserva fatta alla stela XI. Il testo coranico appartiene alla Sura 112.

XX. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Certamente avete nell'inviato di Dio
un ottimo esempio per coloro che sperano
in Dio e [credono] nell'ultimo giorno. Questa è la tomba
di Yahia ben Tha'leb ben el Hassan ben
. . . ben Fartas. Morì il giorno.
di sabato dei quattordici
trascorsi di Rebi' primo.
Anno cinque e sessanta e quat-
trocento (465). Abbia di lui misericordia Iddio e gli perdoni.

Non mi è riuscito decifrare uno de' nomi sostituito con dei puntini. Il testo coranico [Sura 33, v. 21] identico a quello del numero XV non è completo.

La data dell'era volgare corrispondente alla segnata sulla Stela è il 29 Novembre 1073.

Digitized by Google

XIX.

بسم الله الرحمن الرحيم
قل هو الله احد الله الصمد لم يلد
ولم يولد ولم يكن له كفوا احد هذا
قبر ام شعيب مولاة سلامة مولا
الحسين بن عبد الله بن احمد الكردى
توفيت يوم الاربعا لاثنا عشر خلون
من شهر صفر سنة اربع وستين وار
بعمايه رحمها الله وانجعها بيتها
محمد صلى الله عليه وسلم

XX.

بسم الله الرحمن الرحيم
لقد كان لكم فى رسول الله
اسوة حسنة لمن كان يرجو
الله واليوم الاخر هذا قبر
يحيى بن ثعلب بن الحسن بن
نعم بن فرطاس توفى يوم
السبت لاربعة وعشرين
خلون من ربيع الاول
سنة خمس وستين وار
بعمايه رحمه الله وغفر له

Digitized by Google

XXI. Cufica.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Questa è la tomba di Ali ben Omar
ben Selam. Morì nell' anno
due e settanta
e quattrocento (472). Abbia di lui misericordia
Iddio.

Si osservi la disposizione della seconda parola *Dio* dell'invocazione divina posta superiormente come se da essa cominciasse l' iscrizione, capriccio dello scarpellino che si trova ripetuto in altre stele.

L' iscrizione è molto semplice; probabilmente il defunto era in vita persona di poco conto.

La data come l' ho letta si ragguaglia all' anno 1079. Ma senza i punti diacritici la parola riportata per *settanta* può leggersi *novanta* ed allora la data egiriaca sarebbe il 492 pari al 1098 e. v.

XXII. Cufica.

. . . . . .
principio . . . . . .
. . . . . Anno nove
e settanta e quattrocento [479].
E sia propizio Iddio al Profeta Maometto
e sua famiglia.

Di questa stela è rimasta la sola metà inferiore la quale però permette di leggere l' anno della data che è il 479 egiriaco, o, per le ragioni dette al numero precedente della somiglianza fra la parola che indica il numero nove e quella che indica il numero sette, 477. Nel primo caso si ha l' anno 1086 nel secondo il 1084 e. v.

Digitized by Google

XXI.

الله
بسم الرحمن الرحيم
هذا قبر على بن عمر
بن سلام توفى فى سنة
اثنين وسبعين
واربع مايه رحمه
الله

XXII.

. . . . . .
مستهل . . . . . .
. . . . . سنة تسع
وسبعين واربعمايه
وصلى الله على النبى محمد
واله

Digitized by Google

XXIII. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Ogni anima è per provare la morte
quindi ritornerete a noi [Cor. XXIX, 57]. Questa è la tomba
di Selama liberto di A'bd Allah ben
Mohammed ben Giamil. Morì nella notte
di Mercoledì dopo i tre giorni trascorsi di
Rebi' ultimo. Anno uno e ottan-
ta e quattrocento [481].

Si troverà nella tavola 3.ª riprodotta a grandezza ridotta quest' epigrafe.
La data in essa segnata ragguaglia quella del 27 Giugno 1088 dell' era volgare.
Le parole del testo coranico s' intendono pronunciate da Dio.

XXIV. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Ogni anima è per provare la morte
quindi ritornerete a noi [Cor. XXIX, 57]. Questa
è la tomba della madre di Ahmed ben el Mohsin
ben Sadfa, ben Horr ben
el Hassan. Morì essa il giorno
di Domenica principio di Rebi' ultimo.
Anno uno e ottanta e quat-
trocento [481]. E sia propizio Iddio a Maometto e
sua famiglia.

Il testo coranico è identico a quello della stela precedente. La data egiriaca risponde al 24 Giugno 1088.

Digitized by Google

XXIII.

بسم الله الرحمن الرحيم
كل نفس ذائقة الموت
ثم الينا ترجعون هذا قبر
سلامه مولى عبد الله بن
محمد بن جميل توفى فى ليله
الاربعا لثالث خلون من
ربيع الاخر سنة احد وثما
نين واربعمايه

XXIV.

الله
بسم الرحمن الرحيم
كل نفس ذائقة الموت
ثم الينا ترجعون هذا
قبر ام احمد بن المحسن
بن صدقه بن حر بن
الحسان توفيت يوم
الاحد مستهل ربيع الاخر
سنة احدي وثمانين وار
بعمايه وصلى الله على محمد و
اله

Digitized by Google

XXV. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Ogni anima è per provare la morte quindi
ritornerete a noi [Cor. XXIX, 57]. Questa è la tomba
di Fatima figlia di Moqrar liberto
di Halef ben Moraru nostro Prefetto.
Morì essa, abbia di lei misericordia Iddio, nel giorno di Giovedì
decimo di Moharram. Anno
tre e ottanta e quattrocento [483].
E sia propizio Iddio a Maometto, il Profeta, e sua famiglia.

Veggasi nella tavola 4.ª la riproduzione a grandezza ridotta di quest'iscrizione che si distingue per l'ornato delle lettere.

È ripetuto il testo coranico delle due precedenti epigrafi. Si osservi la qualifica di Uali o Wali, come altri scrive, cioè Prefetto o Governatore dato al personaggio del quale era liberto il padre della defunta. Ciò forse spiega il perchè della bellezza dell'iscrizione.

Nella parola Allah della sesta riga lo scarpellino ha dimenticato un Alef.

La data ragguagliata all'era volgare è quella del 15 Marzo 1090.

XXVI. Cufica tamurea.

[In nome di Dio miseri-]cordevole, misericordioso.
[Certamente] avete nell'inviato di [Dio]
un ottimo esempio. Questa
è la tomba di Soleiman Ibn Aqbal ben Mebha.
Abbia di lui misericordia Iddio. Morì il giorno di Domenica
settimo (giorno) di Safar. Anno quattro
e ottanta e quattrocento [484].
E sia propizio Iddio a Maometto,
il Profeta, e sua famiglia e lo colmi d'ogni prosperità e benedizione.

Le parole fra parentesi, che realmente non si leggono per guasto riportato dalla Stela, era facile il supporle.

Il testo coranico è il versetto 21 non completo nella Sura 33. La data corrisponde al 1.° Aprile 1091 e. v.

Digitized by Google

XXV.

بسم الله الرحمن الرحيم
كل نفس ذائقة الموت ثم
الينا ترجعون هذا قبر
فاطمة ابنت مقرر مولا
حلف بن مررو والينا
توفيت رحمها الله يوم الخميس
العاشر من المحرم سنة
ثلاث وثمانين واربعماية
وصلى الله على محمد النبى واله

XXVI.

بسم الله الرحمن الرحيم
لقد كان لكم فى رسول الله
اسوة حسنة هذا
قبر سليمان ابن اقبل بم مبحا
رحمه الله توفى يوم الاحد
السابع من صفر سنة رابع
وثمانين واربعماية
وصلى الله على محمد
النبى واله وسلم تسليما

Digitized by Google

XXVII. Cufica tamurea.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Ogni anima è per provare
la morte, quindi a noi ritornerete.
Questa è la tomba di Giafar ben
. . . . . .
. . . . . .

Di questa stela è rimasta la sola metà superiore.

XXVIII. Araba.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Tutto ciò che è su di essa [terra] è caduco e resterà
la faccia del tuo Signore dotata di maestà e di gloria.
Questa è la la tomba della nobile figlia di Fadl
liberta del Sultano El . . . . .
Iddio lo riposi. Morì essa [il giorno]
di Domenica uno dei dieci giorni di mezzo
di Dulqa'da. Anno due e qua-
ranta e cinquecento [542]. Abbia di lei misericordia
Iddio, e usi misericordia a chi la invoca a lei

Da questa cominciano le epigrafi scritte nel carattere arabo *neshi* o corsivo il quale, come si scorge anche da queste stele, fu adoperato nelle iscrizioni lapidarie posteriormente al cufico ed al cufico tamureo.

Nella riga quinta ho tradotta con *nobile* la parola araba che più propriamente significa *libera* per opposto a schiava.

Un guasto patito dalla lapide, toglie di leggere il nome del Sultano del quale la defunta era liberta o affrancata.

La data egiriaca corrisponde ai giorni compresi fra il 2 ed il 12 Aprile 1148 e. v. poichè questa volta nel fissare la data si è usato, pel giorno della morte, di quell'espressione indeterminata: *uno dei dieci giorni mediali del mese*. Similmente secondo il caso, usano gli arabi di datare con *uno dei dieci giorni primi del mese;* oppure: *uno dei dieci giorni ultimi del mese.*

Digitized by Google

XXVII.

الله
بسم الرحمن الرحيم
كل نفس ذائقة
الموت ثم الينا ترجعون
هذا قبر جعفر بن
. . . . . .
. . . . . .

XXVIII.

بسم الله الرحمن الرحيم
كل من عليها فان ويبقا
وجه ربك ذو الجلال
والاكرام
هذا قبر الحرة بنت الفاضل
مولاة السلطان ا . . . .
الله روحه توفيت يوم
الاحد فى العشر الاوسط
ذو القعدة سنة اثنين وار
بعين وخمس ماية رحمها
الله ورحم من دعا اليها الرحمة

Digitized by Google

XXIX. Araba.

Di Dio è il
il Regno.
In nome di Dio
misericordevole, misericordioso.
Annuncia ad essi,
il Signor loro, che avranno misericordia da lui e indulgenza
e giardini con delizie perdurabili
in cui per sempre dimoreranno, imperocchè presso Dio la ricompensa
è grande [Cor. IX, 22-23].
Questa è la tomba della nobile, della eccellente
Sittu 'l mulki figlia del Sultano Aba
Es Sedad, il Muftí, ben Jahia ben Abi Es Sedad,
il Muftí, ausilio dell' Islamismo. Morì essa il giorno
il giorno due di Giomadi primo. Anno sei
e sessanta e cinquecento [566]. Abbia di lei misericordia Iddio. Amen.

Veramente *Sittu 'l mulki* vale Signora del Reame, ma mi è sembrato meglio fare di tal espressione un nome proprio nella considerazione che presso i musulmani difficilmente trovasi una donna ad occupare un trono. Potrebbesi però anche intendere con quel titolo la compagna del Sultano il quale nella lapide non è nominato. La data corrisponde all'11 gennaio 1171.

Si è ripetuto nella traduzione *il giorno* perchè la lapide ha due volte l'equivalente parola araba.

Digitized by Google

XXIX.

لله
الملك
بسم الله
الرحمن الرحيم
يبشرهم
ربهم برحمة منه ورضوان
وجنات لهم فيها نعيم مقيم
خالدين فيها ابدا ان الله عنده اجر عظيم
هذا قبر الحرة الفاضله
ست الملك بنت السلطان ابى
السداد الموفقى بن يحيى بن ابى السداد
الموفقى ناصر الاسلام توفيت يوم
يوم اثنين من جمادي الاول سنة ست
وستين وخمسماية رحمها الله امين

Digitized by Google

XXX. Araba.

Omar Abder-Rahman Ibn Abi — Harmi El Mekki perdoni Iddio a lui e a tutti i musulmani.

In nome di Dio misericordevole misericordioso.
E sia propizio Iddio a nostro signore Maometto il Profeta e sua famiglia.
Di': questo è un grande annuncio, dal quale vi tenete lontani (XXXVIII, 67)
E non accordammo all'uomo prima di te l'eternità; se
tu muori saranno essi eterni? [XXI, 35].
Questa è la tomba dell'Ispettore Mohammed
Ibn M....? ben S....? di Dahlak, morto a Dahlak
il giorno di Domenica tredicesimo del mese di Regeb
dei mesi dell'anno otto e ottanta e cinquecento (588).
La misericordia di Dio sia su di lui e su tutti i musulmani.
Compassiona nella tua bontà o tu che qui ti fermi e proteggi il luogo
ove Iddio raccolse la polvere dei sepolcri sulla mia faccia
come se non avessi camminato
sopra di esso e non avessi governato gli uomini e non avessi difeso. . . . .

La data segnata risponde al 26 Luglio 1192 e. v.

Sono da osservarsi due cose: prima, l'indicazione del titolo di *Ispettore* contrariamente a quanto osservò il Lanci nell'opera citata (pag. 47 e 53) che cioè nelle iscrizioni funerarie si cansassero i titoli del defunto avuti in vita; e secondariamente la menzione della patria del trapassato per opposto all'asserto dell'istesso ch.mo Orientalista (pag. 55) che quella mai si ricordasse nelle funeree lapidi. Questa ci dice invero che il defunto era Ispettore in vita sua ed era di Dahlak e ancor più che morì a Dahlak. Così non starebbe neppure che non si segnasse nelle epigrafi mortuarie il paese nel quale finirono di vivere come accerta il prefato Lanci nell'istesso luogo dell'opera sua. Deve certamente, per altro, intendersi che gli asserti dell'illustre arabista si riferissero alle più vetuste iscrizioni ed allora anche dalle nostre epigrafi sarebbero pienamente confermati (Tavola 5ª). Dò con molta peritanza la traduzione del finale di questa epigrafe tanto più difficile ad interpretarsi perchè non se ne possono decifrare le ultime parole e per l'ommissione dei molti punti diacritici.

Digitized by Google

XXX.

عمر عبد الرحمن ابن ابى حرمى المكى عفى الله عنه

وعن جميع المسلمين

بسم الله الرحمن الرحيم
وصلى الله على سيدنا محمد النبى وعلى اله
قل هذا نبا عظيم انتم عنه معرضون
وما جعلنا لبشر من قبلك الخلد افان
مت فهم الخالدون
هذا قبر العريف محمد
ابن منسه بن سعيد الدهلكى توفى بدهلك
يوم الاحد الثالث عشر من شهر رجب
من شهور سنة ثمان وثمانين وخمسماية
رحمه الله عليه وعلى جميع المسلمين
يرحم بعصلك يا واقفا وانصر مكانا
جمعت الله يراب الضريح على
صفحتى كانى لم امش يوما عليه واسود
الرحال واحمى . . . . . .

Digitized by Google

XXXI. Araba.

Omar Abd er-Rahman Ibn Abi Harmi El Mekki perdoni Iddio a lui e a tutti i musulmani.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
E sia Iddio propizio a nostro signore Maometto e sua famiglia
E quelli che dicono: il nostro signore è Dio e agiscono rettamente
non temete non vi affligete, rallegratevi col paradiso

. . . . . .

. . . . . .

Questa è la tomba . . . . . .

Questa stela molto soffrì dalle ingiurie del tempo di modo che poco se ne può decifrare. Intanto ai due angoli della sommità di essa, come nella precedente è ricordato certo Omar Abder-Rahman Ibn Abi Harmi El Mekki cioè Meccano che deve essere l'epigrafista. Questa circostanza fa presumere che questa stela fosse quasi coetanea alla precedente.

Il testo coranico che vi dà principio, subito dopo l'invocazione divina e la preghiera pel Profeta e sua famiglia, è il versetto 33 della Sura 41, ma non integralmente riportato perchè esso realmente dice: « E quelli che dicono: il nostro « Signore è Dio e agiscono rettamente, ricevono la visita degli Angioli [che loro « dicono]: non temete non vi affliggete, rallegratevi col paradiso che vi è stato « promesso »:

Il rimanente dell'iscrizione è, fuori di qualche parola, illeggibile.

Vi è anche da osservare una variante ortografica: il principio della quarta riga stando al testo del Corano dovrebbe essere *alla* أَلَّا mentre nella stela è sciolta la contrazione delle due particelle essendo inciso أَنْ لَا *an la*.

Digitized by Google

XXXI.

عمر عبد الرحمن المكى
ابن ابى حرمى عفى الله عنه وعن جميع المسلمين

بسم الله الرحمن الرحيم
وصلى الله على سيدنا محمد وعلى اله
ان الذين قالوا ربنا الله ثم استقاموا
ان لاتخافوا ولاتحزنوا وابشروا بالجنة
. . . . . .
. . . . . .
هذا قبر . . . . . .

Digitized by Google

XXXII. Araba.

Omar Abd er-Rahman perdoni Iddio a lui e a tutti i musulmani.
E sia propizio Dio . . . . .
Non vi è Dio se non Iddio . . . . . Dio
In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Noi siamo i vostri protettori in questo mondo e nel-
l' altro ed in quest' ultimo avrete quanto desiderano le anime vostre
e avrete in esso quanto domanderete. Sarà un' ospitalità
dell' Indulgente, del Misericordioso [Cor. XLI, 34-35]
Questa è la tomba dello Sceico Abu el Hassan Ali
Ibn Soleiman, ben Ali, ben Mohammed, ben Iusuf, lo Scrivano.
Morì la notte di Sabato ventunesimo (giorno) di Safar. Anno 610.
Abbia di lui misericordia Iddio della misericordia dei Giusti e lo ri-
susciti nello stuolo . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

La data egiriaca 22 Safar 610 corrisponde al 13 Luglio 1213. L' epigrafe deve esser stata dettata dall' autore delle due precedenti poichè se ne legge il nome al sommo della lapide.

L' indicazione dell' anno si trova nell' interlinea fra la 9.ª e la 10.ª riga ed è così poco marcata da sfuggire facilmente al leggitore.

Del finale di questa epigrafe si leggono solamente poche parole e perciò non ne ho tentata la traduzione.

Digitized by Google

XXXII.

عمر عبد الرحمن عفى الله عنه وعن جميع المسلمين
وصلى الله . . . . . .
لا اله الا الله . . الله
بســـــــــــم الله الرحمن الرحيم
نحن اولماوكم فى الحياة الدنيا وفى الا
خرة ولكم فيها ما تشتهى انفسكم
ولكم فيها ما تدعون نزلا
من غفور رحيم
هذا قبر الشيخ ابى الحسن على
ابن سليمان بن على بن محمد بن يوسف الكاتب
عشر وستمايه
توفى فى ليلة السبت الثانى والعشرين من صفر سنة
رحمه الله رحمة الابرار وحشره فى زمرة . . .
. . . حدي على لحدي وحلونى به وحدي
فهذا بيت اعمالى والس من بعدك
فلا والله لا . . . . . .

Digitized by Google

XXXIII. Araba.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
O anima fiduciosa ritorna al tuo Signore
soddisfatta ed accetta (a lui) ed entra fra
i miei servi ed entra nel mio paradiso [Cor. LXXXIX, 28, 29, 30]
Questa è la tomba della bisognosa del suo Signore
conosciuta per la sua piccolezza col nome di compendio di bellezza, liberta
di Mohammed ben I'sa, ben Ahmed, ben Mohammed, ben Ibrahim ben Jusuf,
ben Hamid, ben Jahia, l' Alida. Morì essa il giorno di Sabato
de' quattro [giorni] trascorsi di Sciaban dell' anno cinque venti
e seicento [625]. Abbia di Lei misericordia Iddio della misericordia
dei giusti e la risusciti
nello stuolo degli eletti del paradiso.

La data della stela è l'11 Luglio 1227. Il testo coranico è dei meno usati nelle iscrizioni mortuarie sebbene tanto ad esse appropriato. Il salmo 116 nell' edizione araba ha una somiglianza di dicitura ارجعى يا نفسى الى الخ ricordando in principio quasi lo stesso concetto: Ritorna anima mia &.

La defunta era donna d' assai poichè vediamo ricordati gli antecessori del suo padrone o protettore che era della setta di Ali per sette generazioni.

Digitized by Google

XXXIII.

بسم الله الرحمن الرحيم
يا ايها النفس المطمينة ارجعى الى ربك
راضية مرضية فادخلى فى
عبادي وادخلى جنتى
هذا قبر الفقيرة الى ربها
المعترفة بذنبها ام حزبة حسن مولاة
محمد بن عيسى بن احمد بن محمد بن ابرهيم بن يوسف
بن حامد بن يحيى العلى توفيت يوم السبت
لاربع مضين من شعبان من سنة خمس عشرين
وستمايه رحمها الله رحمة الابرار وحشرها
فى زمرة منية المختار

Digitized by Google

XXXIV. Araba.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
Annuncia ad essi, il Signor loro, che avranno misericordia da lui e indulgenza e giardini
con delizie per essi perdurabili, in cui per sempre dimoreranno imperocchè presso
Dio la ricompensa è grande [Cor. IX, 22-23]
Questa è la tomba dello Sceico, l'eccellente, l'elevato,
il conduttore, il pio, il ministro, l'illustre, ... il prefetto Nasr Soleiman ben Nasr, lo scrivano dell'isola del Dahlak. Morì al principio di Rebi' ultimo. Anno tre e cinquanta e seicento [653]. Abbia di lui misericordia Iddio
e lo salvi. E sia propizio Iddio a nostro Signore Maometto e sua famiglia.

La data è il 10 Maggio 1255. I molti titoli fanno accorti come coll'andare del tempo le epigrafi funerarie perdessero della primitiva semplicità. In questa e in quella del n. XXX è esplicitamente ricordata l'Isola di Dahlak che dette il nome all'Arcipelago ora parte della colonia Eritrea.

Nella parte posteriore di questa lapide appariscono traccie di altra iscrizione incavata e disposta di traverso alla pietra, di un'epoca certo remota. Le ingiurie del tempo l'hanno talmente guasta che appena s'indovina, nella prima delle quattro righe dell'iscrizione, la solita invocazione alla Divinità: In nome di Dio ecc. Nell'ultima riga credo riconoscere la parola El Kebir [la grande] che potrebbe essere l'epiteto col quale si distingue tutt'ora la maggiore delle isole dell'Arcipelago.

Non riterrei che tale iscrizione fosse funeraria sebbene, ripeto, lo stato attuale di essa non permetta di cavarne costrutto alcuno.

Digitized by Google

XXXIV.

بسم الله الرحمن الرحيم
يبشرهم ربهم برحمة منه ورضوان وجنات
لهم فيها نعيم مقيم خالدين فيها ابدا ان الله
عنده اجر عظيم
هذا قبر الشيخ الفاضل العالى
القايد الورع الوزير الاجل الاصل الوالى نصر
سليمان بن نصر الكاتب بجزيرة دهلك توفى مستهل
ربيع الاخر سنة ثلث وخمسين وستمايه رحمه الله
والسلم وصلى الله على سيدنا محمد واله

Digitized by Google

XXXV. Araba.

In nome di Dio misericordevole, misericordioso.
O Dio sii propizio a nostro Signore Maometto e sua famiglia.
Annuncia ad essi, il Signor loro, che avranno misericordia da lui e indulgenza e giardini con delizie per essi perdurabili, in cui per sempre dimoreranno imperocchè presso Dio la ricompensa è grande

. . . . . .

. . . . . .

Questa è la tomba del bisognoso . . . . . .

. . . . . .

Più della metà inferiore della stela è guasta.

Digitized by Google

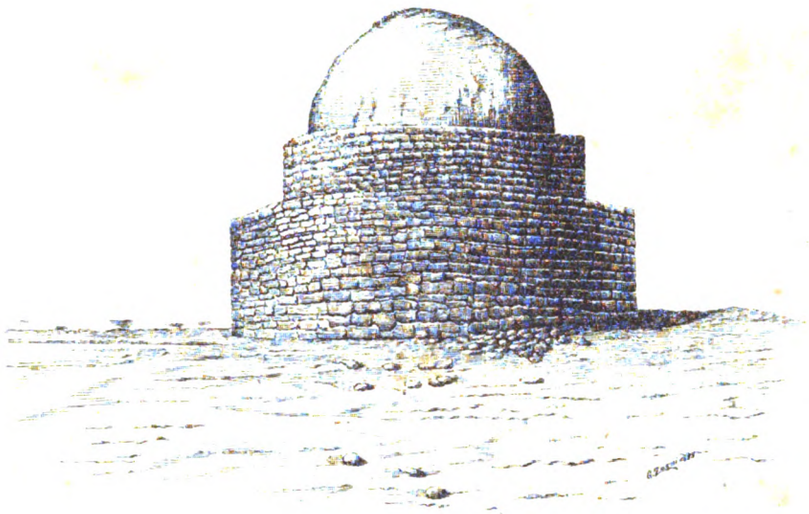
XXXV.

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صلى على سيدنا محمد وعلى اله
يبشرهم ربهم برحمة منه ورضوان
وجنات لهم فيها نعيم مقيم خالدين فيها ابدا ان الله
عنده اجر عظيم . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
هذا قبر الفقير . . . . . .

Benedetto Malmusi.

Digitized by Google

Digitized by Google



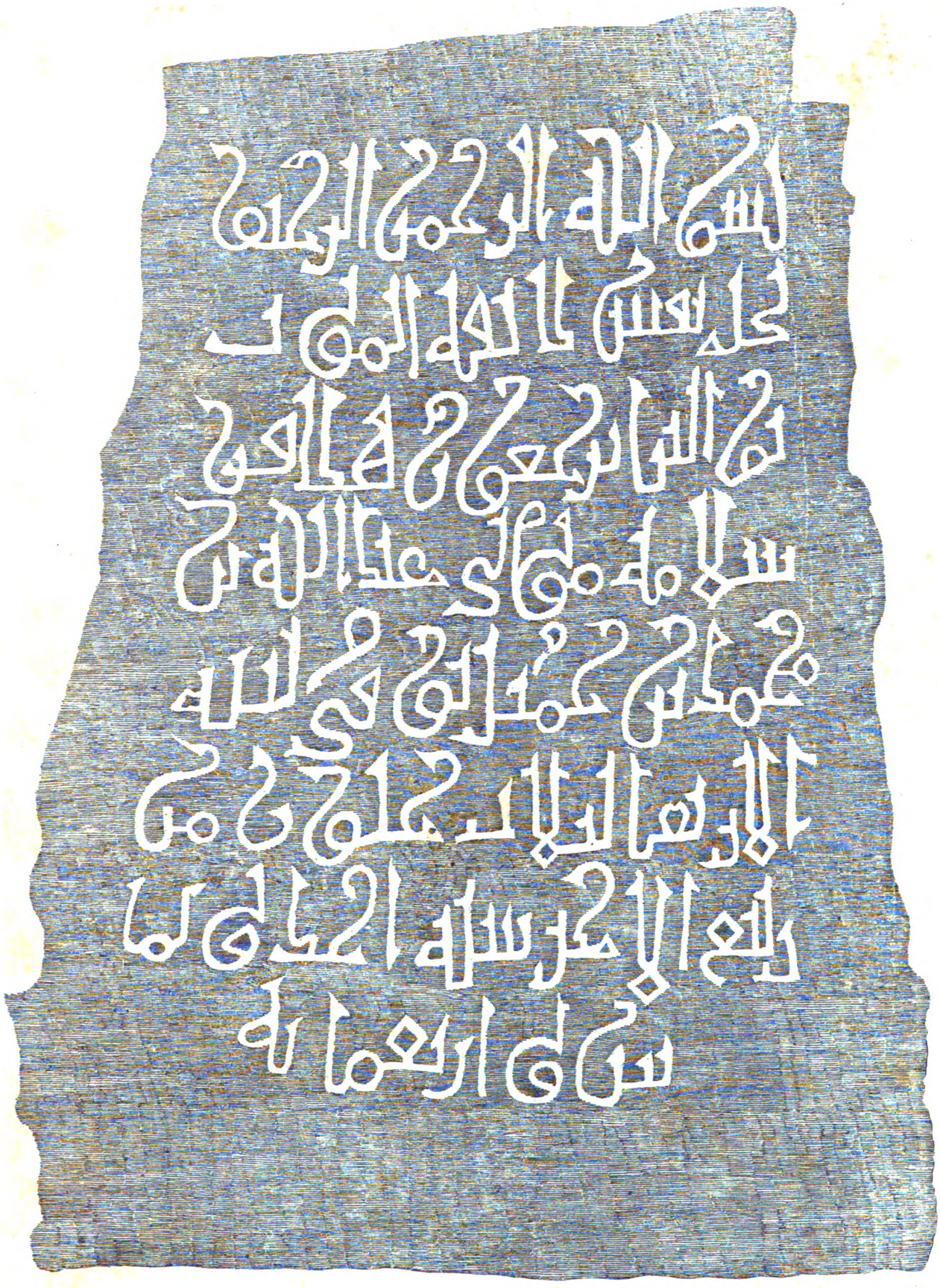
Digitized by Google

Digitized by Google

Rapporto metà del Vero

Digitized by Google

Digitized by Google



Rapporto sei decimi del vero.

Digitized by Google

Digitized by Google

Rapporto metà del Vero

Digitized by Google

Digitized by Google

بسم الله الرحمن الرحيم
وصلى الله على سيدنا محمد النبي وعلى آله
هذا ما عمله مراد عفى الله عنه معروف
وما جعله السر من ذلك المال
مسلم المال
هذا قبر العرف محمد
ابن مسلمة بن سليمان الهلالي توفي يوم
يوم الاحد الحادي عشر من شهر رجب
من شهور سنة ثمان وما سر وحمسانة
رحمه الله عليه وعلى جميع المسلمين
برحمته آمين يا رب العالمين
سمعه الله؟ سراه الصرح على
جميع كل ما امر به وما عليه واسود
الرجال واحي البعار وما اوصر رعيا

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTE BIBLIOGRAFICHE MODENESI

I.

Il Summario della Santa Scrittura ec.

La nota cronaca di Tomasino de' Bianchi detto de' Lancellotti narra che nel giorno 11 dicembre del 1537 (1), il predicatore del Duomo, Padre Don Serafino, Canonico regolare di S. Agostino in S. Maria delle Assi, a proposito di una setta *come luterana* esistente in Modena, aveva tenuta parola di certo libretto anonimo qui introdotto, reputato condannabile per le massime ritenute ereticali in esso contenute.

Premetto che quella che il predicatore qualificava come setta quasi luterana, era il sodalizio accademico cui, istituito già da Panfilo Sassi, diede nome e nuova e rigogliosa vita il dotto medico e letterato Giovanni Grillenzone; e del quale primo espose abbastanza estese notizie il Muratori (2) con la consueta

---

(1) Cronaca modenese di Tomasino de' Bianchi detto de' Lancellotti ecc. *Parma, Pietro Fiaccadori*, vol. V. 1867, p. 389.

In un'epoca di ferventi lotte religiose e di pericolo di uno scisma, non è a meravigliare che venisse sospettata di eresia anche un'Accademia di origine e di scopo essenzialmente letterario, quando essa si occupava, anche incidentalmente, di cose attinenti, se non al dogma, alla religione.

(2) Opere varie critiche di Lodovico Castelvetro ecc. colla vita dell'autore scritta dal sig. Proposto Lodovico Antonio Muratori. *Lione, Pietro Foppens*, 1727, 4.°.

Digitized by Google

sua temperanza di giudizi, e poscia il Tiraboschi diede più ampio ragguaglio nel suo *Discorso storico delle Accademie modenesi* (1).

Il Lancillotti aggiunge pure che quel libretto era venuto a cognizione del predicatore Padre Serafino avendone questi trovato un esemplare presso la signora Lucrezia Pica, vedova del Conte Claudio Rangone; del quale libretto impossessatosi, tosto ne diede notizia al Padre Inquisitore ed al Vicario (2). Da questo fatto ebbero origine la condanna che il Padre predicatore ne fece dal pergamo; la caccia data a quel libretto di cui l'autorità ecclesiastica sequestrò e bruciò quanti esemplari potè trovare qui (3) ed in altre città d'Italia (4); la condanna all'indice dell'incriminato libretto (5); il sospetto di eresia lanciato e diffuso contro gli accademici e contro i cittadini modenesi; le persecuzioni, i processi e le condanne ad essi inflitte e persino, anni dopo, ai nostri Vescovi Morone e Foscherari, piissimi e dotti prelati, sostenuti a lungo nelle carceri di Roma, fino a che, morto Paolo IV, *Pontefice,* cui per eufemismo disse il Muratori (6) *di zelo straordinario, ma forse non realmente discreto,* non risultasse più evidente la loro innocenza, e ad onorevole riabilitazione non fossero insigniti in seguito delle più elevate dignità della Chiesa.

---

(1) Tiraboschi Gir. Biblioteca modenese, t. I, 1781, pag. 1 e seg.

(2) Cronaca modenese, *l. c.*

(3) *Ibid.*, p. 393-94, e t. VI, p. 321.

(4) Secondo il cronista codesto libretto fu anche bruciato a Bologna nel 31 marzo 1538. (*Ibid.*, 1.° aprile 1538, t. V, pag. 455); e poscia a Roma. (*Ibid.*, 28 maggio 1539, t. VI, pag. 148-49; e 18 aprile 1540, t. VI, pag. 321).

(5) Cito quello del 1559: « Index auctorum et librorum qui ab officio Sanctae Romanae et Universalis Inquisitionis caveri... mandantur ecc. *Romae, apud Antonium Bladum* »: il più antico che quì abbia potuto consultare.

Un *Summarium scripturae doctrina nova et vetus vulgaris et latina*, venne pure proibito da una Grida di Lucca del 20 giugno 1545 (cfr. Lancillotti, t. VII, pag. 27-28, ma non so se si tratti del nostro *Summario*.

(6) Vita del Castelvetro, ediz. sovracitata, pag. 36-37.

Digitized by Google

Con tutto ciò si rende ragione come gli esemplari di quel libretto, non mai veduto nè manco dal Tiraboschi, malgrado le diligenti ricerche fattene, (1) andassero perduti; ed uno solo per quanto è noto ne sia stato rinvenuto nella Stadtbibliothek di Zurigo; il quale per ispeciale favore di quel Bibliotecario e per cortese intermediazione di quello della Estense, ho potuto qui a mio agio esaminare.

Il Lancillotti cui fin dal 3 ottobre 1537 aveva venduta una copia di quel libretto il tipografo Antonio Gadaldino, il quale teneva negozio di libri nella contrada detta del Castellaro, udite le parole del predicatore si affrettò a rendere il libretto al Gadaldino, ricuperandone il prezzo di 8 soldi sborsatigli (2); ed anche questa copia cadde nelle mani del Vicario dell'Inquisitore. Però prima di privarsene il buon Lancillotti ne fece una descrizione bibliografica abbastanza particolareggiata e per avventura più esatta di quanto potevasi sperare da uno scrittore così rozzo e privo di coltura letteraria qual egli era (3).

La massima rarità di codesto libretto e la sua importanza per la storia della origine dei tentativi di riformazione cristiana che si manifestarono in Modena nel secolo XVI, impone il dovere di darne una esatta descrizione bibliografica.

Esso consiste in un piccolo volume delle dimensioni (carte a taglio netto nei margini) di mil. 104 × 70. Consta di 128 carte non numerate, in 32.°, riunite in quadernetti di 8 carte, registrate in 8.° con le segnature da Aiiii a Qiiii.

Il volumetto è rilegato in carta pecorina con 4 carte di riguardi in principio e 4 nel fine. Porta sulla faccia esterna della rilegatura la marca della *Stadtbibliothek* di Zurigo, ove trovasi catalogato con le note di registro " Gal. Tz. 1331 „ impresse sul dorso.

---

(1) Tiraboschi, *l. c.*, p. 9.
(2) Cronaca *s. c.*, t. V, p. 392.
(3) *Ibid.*, t. V, p. 390.

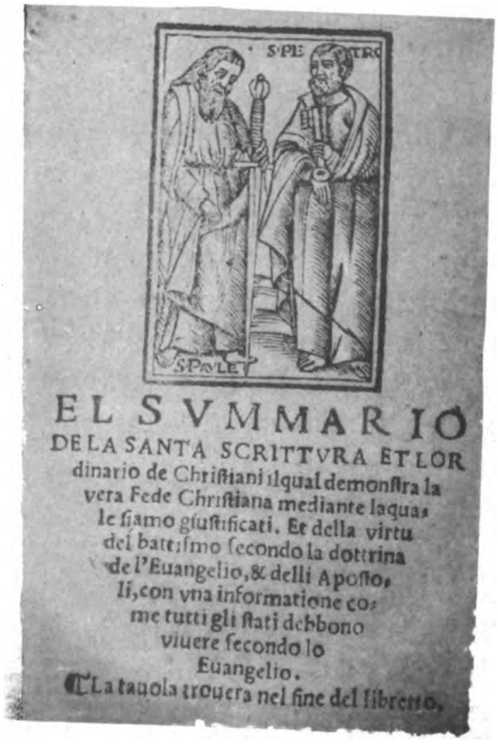
Digitized by Google

Non vi è indicato nè il nome dell'autore, nè il luogo, nè l'anno di stampa, nè il nome dello stampatore.

È impresso in caratteri tondi del genere di quelli che in seguito si dissero elzeviriani, corpo 8, di 27 linee per pagina e di 27 a 29 lettere in media per ogni linea.

La carta di buona qualità, ha un disco con l'áncora per marca di fabbrica; e sul disco traspare un anello, ed in uno dei fogli la stella a sei raggi. Male vi si discernono nella 126.ª carta le iniziali del nome del fabbricatore.

La 1.ª carta di frontispizio ha nel *recto* un quadretto impresso in legno con le immagini dei santi Pietro e Paolo, e sotto di esso il titolo quale si legge nella unita riproduzione eliotipica di quel frontispizio.



Le carte dalla 2.ª *recto* alla 5.ª *recto* contengono il Prologo. Sul *verso* della 5.ª carta trovasi una seconda silografia con

Digitized by Google

la crocifissione di Gesù Cristo, qui pure riprodotta unitamente al *recto* della 6.ª carta nella quale comincia il testo.

DELLA FEDE

¶ Della fede e del batrismo. Et prima che significa il batrismo. Cap 1.

IL FONDAMENTO della Christianita e la fede laquale rari e pochi perfettamente l'hanno, e nondimeno credemo tutti di hauerla. In magno Apostolo Paulo in tutte le sue Epistole parla piu della fede che di tutte le altre virtu, & a quella piu eshorta tutti per ilche bisogna dire che e vna preciosa e diuina virtu. Noi tegniamo la fede per il principio del christianesmo, ma veramente chi ha perfetta fede non solamente ha il principio, ma etiam il fine & la perfettione di esso christianesmo, ma questa verita non e cognosciuta da molti, perche non sanno che cosa e la fede, o che cosa debbe creder il christiano per essere saluo. Noi credia mo per essere battizati, & per credere che Dio e Dio che saremo salui, ma questo non basta Bisogna credere piu, cioe che Dio e Dio a te stesso, cioe padre protettore e cumulo di ogni bene, questo importa quella parola dio.

Il testo termina nel *verso* della 126.ª carta, con le parole:

Soli Deo honor & gloria.
FINIS.

La 127.ª carta ed il *recto* della 128.ª contengono la tavola d'indice dei 31 capitoli nei quali è diviso il libro, terminando con la parola

FINIS.

Sopra codesto unico esemplare conosciuto fu eseguita di recente una edizione di questa operetta, per cura del prof. Emilio Comba (1).

---

(1) Il Sommario della Sacra Scrittura, trattato del secolo XVI ristampato con Prefazione del Prof. Emilio Comba. *Firenze. tip. Claudiana*, 1877, 8.° pic.

Il Comba sulla fede del Macerie e del Benrath, dice che nel British Museum,

Digitized by Google

Ma ora mi si affacciano parecchi ed importanti problemi: cioè quando, dove e da chi venisse stampata la descritta edizione di codesto libretto, e chi ne fosse l'autore o l'editore.

È ben difficile il risolverli, mentre l'autore ed il tipografo posero ogni cura nel nascondere i loro nomi, la data ed il luogo di stampa.

Dalle cose esposte si ha solo buon fondamento a ritenere che la pubblicazione del *Summario* venisse fatta nel 1537 od in un anno di poco anteriore.

Le circostanze di fatto che il libro si vendeva a Modena dal Gadaldino, librajo e tipografo e per giunta noverato fra gli aderenti alle dimostrazioni degli accademici e più tardi per la stampa clandestina di analoghi scritti inquisito (1); che, per quanto mi è noto, qui prima che altrove venne sequestrato dall'autorità ecclesiastica; che, come più oltre dirò, vi sono gravi indizi per ritenerne autore od editore uno degli accademici, fanno nascere il sospetto che esso venisse in Modena stampato dal Gadaldino.

Delle poche edizioni che fra noi si conservano di libri stampati da codesto tipografo da me esaminate, nessuna per verità ne ho rinvenuta che abbia caratteri tipografici uguali a quelli piccolissimi adoperati nella stampa del testo del libretto;

---

come io pure ho verificato, esiste una copia di questo trattato in lingua francese, con la data del 1523. (V. l'AGGIUNTA posta in fine). Ciò per verità dà luogo ad alcune dubbiezze, perchè il nostro libretto non ha i caratteri letterari di una traduzione dal francese, e perchè quand'anche fosse esatta la indicazione data dal Vergerio, il quale diede pubblicità all'Indice dei libri proibiti, uscito alle stampe la prima volta in Venezia nel 1549 sotto gli auspici di M. Della Casa, non si potrebbe far risalire la pubblicazione del libretto ad un'epoca anteriore al 1535 od al 1534.

(1) Cronaca *s. c.*, (compendiata dallo Spaccini) 15 marzo 1544, t. VIII, p. LXIV.

Il tipografo Gadaldino venne anni dopo tradotto nelle carceri di Roma, e sottoposto a processo per avere stampati e venduti libri ereticali — V. Cantù, *gli eretici in Italia*, vol 2.°, p. 200, n. 33.

Digitized by Google

però ve ne ha una nella quale sono adoperati caratteri di analogo tipo, ma di un corpo maggiore (1).

Più notevole è ancora che il majuscolo col quale sono stampate nel frontespizio del nostro libretto le parole EL SVMMARIO, è identico di forma e dimensione a quello con cui sono impresse le parole AMPLISSIMO VIRO in capo alla dedicatoria premessa all'accennata edizione dei fratelli Gadaldino successori di Antonio (2).

Senonchè un indizio vieppiù attendibile ce lo forniscono le silografie delle iniziali impresse nel libretto, delle quali i fregi a rami di foglie e fiori sono talvolta analoghi e talvolta perfettamente identici a quelli delle stesse iniziali impresse in altre edizioni del medesimo Gadaldino e de' suoi successori (3).

Si potrà objettare che non essendovi allora qui nel Modenese alcuna fonderia di caratteri, quella che li fornì al Ga-

---

(1) Cfr. Tractatus de aestimo et collectis Nicolao Festasio Mutinense auctore ec. *Mutinae, apud Paulum Gadaldinum & fratres*, M. D. LXIX, in 8.° pic. A car. 165 comincia l'indice, il quale è stampato con caratteri dello stesso tipo, ma di corpo 9, di quelli del libretto.

(2) Cfr. Tractatus de aestimo et collectis ec. a car. 2 *recto*.

(3) Analoghe nei fregi a quelle del nostro libretto sono le iniziali impresse nei due sottoindicati opuscoli.

Provigione ducale sopra li contratti illiciti. *Mutinae, apud Antonium Gadaldinum, M.D.L.V.* Car. 8 in 8.°

Interpretatione de colori da incerto avttore (*sic*) composta. Et novamente posta in luce. *In Modena, per gli heredi di Cornelio Gadaldino*, 1567 (data della lettera dedicatoria), p. 61 in 8.° pic.

La iniziale D a car. 44 del libretto è identica in dimensioni e nei fregi alla stessa iniziale D impressa a car. 41 *recto* del noto libro « *Stadera del formento* » stampato dal medesimo Antonio Gadaldino nel 1544.

E così pure le iniziali ornate I e Q che si trovano a car. 6 (*recto*) e 23 (*verso*) del libretto sono identiche alle stesse iniziali che si trovano nel su citato libro « *Tractatus de aestimo et collectis* ecc. ».

Le silografie di alcune iniziali impresse nell'opuscolo: LITTERAE GRATIAE, CAPITVLA, STATVTA AD BENEFICIVM MAGNIFICAE COMMVNITATIS MVTINAE (MVTINAE, APVD ANTONIVM GADALDINVM. M. D. LV) sono analoghe ed in parte identiche a quelle del libretto.

Digitized by Google

daldino, poteva averne forniti degl'eguali ad altri tipografi; ma questa obiezione non ha valore contro il fatto della identità delle iniziali ornate, incise in legno, non provenienti da fonderie di caratteri, ma d'ordinario intagliate da artisti locali, in serie uniche, essendo quasi impossibile poter intagliare in legno fregi così piccoli perfettamente identici.

D'altra parte bisogna osservare che quando questi indizi materiali vengono avvalorati da quelli d'induzione storica, in precedenza esposti, si aggrava di molto il sospetto, fino quasi alla prova più sicura, che quel libretto fosse qui stampato dal Gadaldino (1).

Sembrami ancora che con qualche fondamento si possa fare una congettura sul presumibile autore od editore di codesto libretto.

Mi sia lecito pertanto lo esporre alcune osservazioni critico-storiche che per induzione potrebbero condurre, almeno con qualche probabilità, a scoprirne il nome.

Il Lancillotti dice correr voce che nel fatto della introduzione di quel libretto in Modena erano inviluppati (sic) alcuni degli Accademici (2); afferma che il libretto era stato approvato e difeso dagli Accademici e che da essi venne posto in beffa il P. D. Serafino il quale lo aveva denunziato (3); ed in seguito più determinatamente asserisce che il libretto era opera di uno di essi (4).

---

(1) Il Lancillotti accennando più tardi a questo libretto, lo dice *stampato in longe parte*; ma questa vaga notizia veniva probabilmente ad arte propalata dagl'Accademici, alludendo forse alla edizione francese, a fine di sviare le indagini affidate al P. Inquisitore sulla provenienza del libro.

Cfr. il ms. del Lancillotti sotto la data del 28 maggio 1539, anzichè il testo a stampa, perchè quelle parole « *stampato in longe parte* » vennero ommesse dall'editore del testo a stampa, ove dovevano trovarsi nel t. VI, p. 149, linea 14, dopo la parola « *libreto* ».

(2) Cronaca s. c., t. V, p. 390.

(3) Cronaca s. c., 17 febbraio e 1.° aprile 1538; cfr. t. V, p. 428 e 455.

(4) Cronaca s. c., 28 maggio 1539; cfr. t. VI, p. 149.

Il Lancillotti talora dice che gli Accademici erano 12, talora afferma come il Muratori che erano 30, e forse confondendo gli apostoli coi discepoli, altrove

Digitized by Google

Il Comba d' altra parte osserva che la lingua, o meglio le parole e le frasi dialettali che si trovano nel libretto, sono caratteristiche delle provincie di Ferrara e di Modena (1), ed esclude in modo assoluto che esso possa essere stato scritto da autore appartenente ad altre provincie italiane. Ma il movimento luterano sviluppatosi a Ferrara ebbe palese e notevole inizio posteriore al 1537; si accentrava principalmente nella corte di Renata, ed aveva un carattere affatto diverso da quello che si estrinsecava dalla nostra Accademia. La quale non aveva lo scopo nè si esplicava ne' suoi studj in una forma separatista dalla Chiesa romana, ma in conformità della origine di quel sodalizio accademico, aveva un carattere più tendente al letterario, e solo toccava il religioso nel combattere la scarsa coltura, la bigotteria e la corruzione di una parte del clero, richiamandolo ai principj della morale evangelica ed al culto delle buone lettere (2). E se pure

---

dice che erano più di trenta, fino a 50 (t. VIII, p. 25). In due luoghi della sua cronaca indica i nomi di alcuni di essi. Nel primo l'11 dicembre 1537, questi nomi (in numero di cinque) furono da una mano troppo timorosa cancellati nel ms. ed ommessi nel testo a stampa, benchè nel ms. siano rimasti abbastanza leggibili: nel secondo (17 febbraio 1538) ne indica dieci. Da queste indicazioni e dalle citate notizie dell' Accademia forniteci dal Muratori e dal Tiraboschi, si può ritenere che appartenesse all' Accademia una parte notevole dei dotti e dei letterati che allora fiorivano nella nostra città. Cioè oltre i fratelli Giovanni, Bartolomeo e Filippo Grillenzoni, (nella cui casa si adunavano i soci in letterarie e critiche esercitazioni), Lodovico e Filippo Castelvetro, Don Giovanni Policiano detto de' Berettari, Francesco Porto dotto grecista, il fisico Nicolò Machella, Camillo Molza, Pellegrino degl' Erri, Francesco Camurana, Lodovico Del Monte, il Canonico Bonifacio e Filippo Valentini, e più tardi Cesare Bellencini, Paolo Ricci conosciuto sotto il nome di Lisia Fileno, Gabriele Falloppia, Alessandro Melano ecc. È noto che gli Accademici si adunavano per conversare *a la Spetieria de li Grilentioni all' insegna de la fontana nel mercato dell' ova, sotto al palazzo dove stanzia il magnifico Ducal Massaro, la qual è di M.° Alessandro Fontana* ecc. Cfr. La *Cronaca* s. c., 5 Giugno 1545.

(1) Cfr. Il Sommario ecc. Prefazione p. XII. È deplorevole che, trattandosi di un libro di cui non si conosce che un solo esemplare, il Comba nel ristamparlo non vi abb a conservate le parole dialettali che vi si trovano, ommettendo persino di riportarne integralmente il titolo.

(2) V. Muratori, l. c., p. 17. Tiraboschi, l. c., p. 10-11.

Digitized by Google

usciva dall'orbita della ortodossia era solo nella interpretazione soggettiva troppo zelante ed arbitraria del testo delle sacre carte e dei santi padri della Chiesa.

E tale è appunto il carattere di quel libretto, tutt'altro che intenzionalmente accattolico.

Se pertanto la lingua in cui è scritto e le indicate circostanze della sua pubblicazione rivelano che chi lo scrisse non possa appartenere che o alla provincia Modenese od alla Ferrarese, vi ha molta maggiore probabilità nel supporre che modenese ne fosse lo scrittore italiano, e che, come affermava la voce pubblica ripetutamente riferita dal Lancillotti, se ne debba rintracciare il nome fra quelli degli Accademici di Modena, dove, come credo di avere dimostrato, il libro stesso venne stampato.

Ora mi sia permesso lo esporre un gravissimo dubbio.

Fra gli Accademici più operosi e più colti nelle umane lettere, nelle scienze teologiche e nello studio delle sacre carte, segnalavasi il sacerdote modenese Giovanni Policiano o Poliziano detto de' Berettari, di cui estese notizie ci ha date il Tiraboschi nella sua *Biblioteca modenese* (2). Egli secondo il Lancillotti (3) era *homo dotto in humanità e in la Sacra Scriptura;* e questo è appunto il titolo ed il soggetto del famoso libretto. Il Giraldi conferma che egli era dotto nelle sacre lettere (4), ed uno dei principali sostegni dell'Accademia modenese; e che più degl'altri *cadde in sospetto di men sane dottrine,* perchè *essendo Sacerdote era più degl'altri versato nei Sacri Studj.*

Il Policiano fu accusato al tribunale della Inquisizione di aver sostenute opinioni ereticali; e secondo il Vedriani (5), il

---

(1) Cronaca s. c., 28 maggio 1539; cfr. t. VI, p. 148: 28 febbraio 1541; t. VII, p. 19, t. VIII, p. LXXVII, LXXXIV, ecc. V. gl'indici, tuttochè imperfetti dei volumi della Cronaca.

(2) T. I, p. 230.

(3) Cronaca s. c., t. VII, p. 27.

(4) Dial. II. de poet. suorum temp.

(5) Dott. modenesi ecc., p. 117.

Digitized by Google

quale cita gli atti di questo Archivio vescovile, gli furono singolarmente apposte tre proposizioni da lui insegnate nello spiegare, com'egli faceva le lettere di S. Paolo. Spiegazione che a maniera di conferenze, soleva esporre con il concorso di molti uditori in casa del celebre poeta e letterato Francesco Maria Molza, dei cui figli era stato maestro (1). Una delle proposizioni a lui apposte era di avere affermato che " le Orazioni fatte in una lingua che non intendevasi, non piacevano a Dio „ (2). Ora è certo che questa affermazione in termini presso a poco analoghi è chiaramente espressa nel *Summario* (3); e che in questo libretto vengono di continuo citate le Epistole di S. Paolo, delle quali fu come abbiamo avvertito, zelante espositore e commentatore.

Se questi argomenti non valgono a provare in modo assoluto che il Policiano abbia pubblicato codesto *Summario,* sono però, fino a prova contraria, indizi gravissimi per ritenere che a lui sia dovuta la descritta edizione italiana di questo libretto.

---

(1) Cronaca s. c., 23 marzo, 1541, t. VII, p. 27. Più estese notizie su codeste conferenze e sul processo cui quì ed a Roma fu sottoposto il Policiano, e dal quale per potente interposizione venne prosciolto, si apprendono dal Lancillotti (cfr. Cronaca s. c., 14 maggio e 1.° ottobre 1541, t. VII, pp. 27, 56 e 142): notizie ordinate e completate dal Tiraboschi nel citato articolo, concernente il Berettari, della sua *Biblioteca modenese.*

Dall'esame degli atti di quel processo che certo si conserveranno negli Archivi Vaticani, forse potrebbe apparire se il Sacerdote Berettari venisse anche accusato di avere scritto l'incriminato libretto. Il Berettari disse al Lancillotti che il Vescovo Morone aveva promesso di dargli una retribuzione per queste conferenze. (Cronaca, t. VII, p. 27).

(2) Tiraboschi, *Bibl. mod.*, t. I, p. 233.

(3) Cfr. Cap. XX. Della vita delle monache.

Digitized by Google

AGGIUNTA.

Ecco la descrizione della edizione francese del *Summario,* quale mi venne favorita per cortesia del Bibliotecario del *British Museum.*

¶ La Summe de lescripture
Saincte | et lordinaire des Chraestiēs |
Ensaignant la vraye foy Chre-
stienne: par laquelle no⁹
sommes tous iustifi-
ez. Et de la vertu
du baptesme |
selon la
doctri-
ne
de Le-
uangile |
et des Apo-
stres. Auec vne
information com-
ment tous Estatz doib-
uent viure selon
Leuangile.

¶ Imprime a Basle par Thomas
Volff. Lan milcinquecens
vingt et trois.

Dalla 1.ª alla 6.ª car., lin. 9, contiene il « **Prologue** ».
Alla 6.ª car. lin. 10, comincia:

Du Fondemēt de Chrestiente.....
Chapitre premier.

Digitized by Google

Termina a car. CXXXVIII, lin. 26-27 con le parole

℄ Louenge a Dieu
seul louable.

Stampato in caratteri gotici, car. 138 di 26 lin.

Ritenendo che la edizione italiana del *Summario* venisse pubblicata poco prima della fine del 1537, ed a meno che con ipotesi poco probabile non si supponga che la data del 1523 della edizione francese sia erroneamente indicata del tipografo, dal confronto dei due titoli sopra descritti e dal principio del primo capitolo, bisogna ammettere che la edizione italiana sia una traduzione od una versione più o meno libera della francese. Ma rimane tuttavia il dubbio che la edizione francese non sia che la traduzione di una più antica edizione italiana.

P. RICCARDI.

Digitized by Google

Digitized by Google

RELAZIONE

DEL

VICE-SEGRETARIO GENERALE DELLA R. ACCADEMIA

FERRARI-MORENI Conte GIORGIO

SUGLI

ATTI ACCADEMICI DEGLI ANNI 1893-94 [1]

Un dovere di ufficio, onorando Preside e riveriti Colleghi, m'impone di aprire il novello anno accademico parlando di quanto la nostra Accademia operò nell'anno decorso. Nell'accingermi a rammemorare i nostri studi io temo, anzi sono persuaso, di non poter degnamente soddisfare al grave ed onorevole incarico; chè le gloriose tradizioni accademiche richiederebbero nella lodevole consuetudinaria circostanza un eloquente oratore, un profondo conoscitore delle scientifiche letterarie ed artistiche discipline. Ciò non ostante fiducioso nella vostra indulgenza e gentilezza senz'altri preamboli entro in argomento.

Il socio attuale prof. Curzio Bergonzini apriva la serie delle scientifiche comunicazioni dando conto di alcuni suoi studi microscopici e bacteriologici sopra gli *infarti bianchi della placenta*. Esposte le sue osservazioni in quattro casi di infarto, da queste e dal risultato bacteriologico di due di essi trae motivo di persuadersi che *l'endometrite proliferante* sia la causa di tale lesione

---

(1) Letta nell'adunanza generale del 24 novembre 1894.

Digitized by Google

della placenta. Riguardo poi al reperto bacteriologico, in un caso avendo trovato l'esistenza di stafilococchi piogeni, conclude che dee tenersi questo fatto in gran conto per le relazioni che può avere coi fenomeni di albuminuria e di eclampsia che spesso accompagnano l'infarto.

E questa è l'unica memoria di materia medica letta nelle periodiche adunanze accademiche dell'anno 1893-94. In materia legale il socio prof. Contardo Ferrini fa poi tre interessanti comunicazioni: La prima *sui libri di Paolo ad Plautium* nella quale anzitutto indaga l'indole e l'ordinamento dell'opera di Paolo. Confronta poi le altre elaborazioni di Verazio, Giavoleno e Pomponio e cerca di indicare quanta parte di esse sia passata nei libri di Paolo. Studia infine con quali criterii si possano sceverare in questi ultimi i brani genuini di Plauzio e termina segnalando un'intera serie di essi. La seconda memoria del Ferrini vertiva intorno *alle cognizioni giuridiche di Lattanzio, Arnobio* e *Minucio Felice*. In essa prende ad esame le *Istituzioni* di Lattanzio, i libri *adversus nationes* di Arnobio e l'*Ottavio* di Minucio Felice, indicando i passi notevoli per la storia del diritto che si trovano in ciascuna di queste opere. Come fonte giuridica per Lattanzio addita le Istituzioni di Ulpiano e per Arnobio quelle di Gajo. Nella terza infine riguardante *i libri ad Neratium* esamina quale fu l'opera commentata e conclude essere stata la collezione dei responsi neraziani: e discorre del contenuto e del sistema di essa e della natura dei relativi commenti di Paolo.

Alla pubblica economia spetta la memoria del socio prof. Pio Sabbatini *sul decentramento e la questione universitaria*. I criterii che dovrebbonsi prendere a guida nell'attuare il decentramento amministrativo in Italia sono da determinarsi col dovuto riguardo alle speciali condizioni storiche o di fatto del paese, non che al momento in cui la riforma si compie, postergando le astratte teorie inspirate a concetti di uniformità e simmetria, e tenendo conto relativo e non assoluto del criterio delle economie. Il decentramento *instituzionale*, che consiste nello sgravare lo Stato

Digitized by Google

di tutte le funzioni che non sono strettamente legate ai suoi fini, per lasciarne la cura agli enti locali, dovrebbe applicarsi all'istruzione pubblica in tutti i suoi gradi, compresa la superiore, ed a tale concetto è inspirato il progetto di legge Baccelli sull'autonomia universitaria. Non poche sono poi le ragioni intrinseche esposte dal nostro Collega, che militano a favore della conservazione delle Università così dette minori, le quali spera saranno conservate in omaggio alle tradizioni nostre parlamentari ed al sentimento della giustizia.

Passando a indicarvi gli argomenti spettanti alle matematiche svolti nelle nostre tornate ricorderò come il socio Francesco Nicoli trattò *degli spazi lineari a tre dimensioni.* Nella relativa nota il dotto Collega dimostra che senza ammettere il postulato dell'esistenza di punti situati fuori del nostro spazio intuitivo si possono assoggettare i punti di questo spazio a condizioni tali, da realizzare figure aventi le stesse proprietà degli spazi lineari a tre dimensioni considerati nello spazio a quattro dimensioni. Esposto il metodo da lui seguito per ottenere gli spazi lineari a tre dimensioni, dà le regole per trovare il punto d'intersezione di due piani, la retta secondo cui un piano sega uno spazio, il piano d'intersezione di due spazi, e per risolvere effettivamente i problemi relativi a rette, piani e spazi paralleli. Infine dimostra che si può sempre stabilire fra i punti appartenenti a due spazi una relazione univoca tale, che questi spazi risultino omologici aventi per centro un punto qualunque non appartenente ad alcuno di essi e per piano di omologia il piano secondo cui si tagliano.

Il nominato Socio Francesco Nicoli presentò inoltre una nota del prof. Alfonso Del Re intitolata: *Sulle caustiche per riflessione e sui punti brillanti delle superficie.*

In questa Nota l'Autore si propone di mettere in evidenza l'utilità che si può trarre dalla considerazione di una forma a due serie di variabili, e di certi suoi covarianti, nello studio delle caustiche piane per riflessione e nella ricerca dei così detti punti brillanti delle superficie illuminate da un centro fisso e guardate

Digitized by Google

da un determinato punto di vista. Questa ricerca è sostanzialmente contenuta in un'altra che l'Autore medesimo espose nel suo articolo: " *Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teoria dei sistemi di raggi luminosi* „. (Rend. Circ. Mat. Palermo 1887) dove, per mezzo di una coincidenza piano retta, anticipatamente costruita, egli potè determinare con metodo preferibile a quello noto di Hachette, ed in una maniera generale, quei punti di una superficie dove le riflessioni accadono così che i raggi riflessi vanno a passare per un altro punto dato a piacere. Ora però l'Autore si occupa del problema in un caso speciale, in quello cioè in cui la sua trattazione si confonde colla teoria delle caustiche piane per riflessione, sia per inserirlo in un ordine più generale di ricerche, sia per mostrare, come, in sostanza, la geometria metrica di queste caustiche, quando il centro di luce è dato, non sia da riguardarsi che come la geometria projettiva del piano, al quale si aggiunga quella forma fondamentale.

A ben diverso argomento riferivasi la lettura fatta in altra adunanza dal socio prof. Giovanni Generali che comunicò alcune *note teratologiche sopra diversi animali.* I casi da lui descritti, illustrandone i principali sui pezzi, spettano ad alcuni polli, al tacchino, al piccione, al pavone, al passero e alla quaglia. Le anomalie o mostruosità principali sono riferibili al becco raccorciato e diviso (Brachyrinchus), a casi di faccia e testa doppia (Diprosopia, Dicefalia), al ciclopismo ed a mostri con testa unica, corpo doppio con quattro ali e quattro arti (Deradelfia), infine a casi di arti sopranumerarii (Pigomelia e Melomelia) ed a dita sopranumerarii (Polidactilia).

Più volte il Socio prof. Ciro Chistoni prese la parola nelle nostre adunanze. Come direttore del R. Osservatorio di Modena presentò i risultati eliofanometrici ottenuti nel 1893, facendo notare che l'orizzonte di Modena in generale è nebbioso e che in detto anno la durata dello splendore del sole fu di circa la metà della durata del sole sull'orizzonte. Fece poi noto che si era messo in corrispondenza coll'Osservatorio meteorologico del

Digitized by Google

Monte Bianco e che da quel sig. direttore Vallot aveva ottenuto in dono il primo volume degli annali dell'osservatorio stesso, importantissima stazione alpina, la quale, oltre alle osservazioni meteorologiche correnti, si presta mirabilmente anche ad utilissimi studi di fisica terrestre.

Sino dal 1891 il Prof. Ciro Chistoni cominciò a fare esperienze, compiute poi a mezzo il 1894, sul magnetismo permanente delle sbarre di acciaio contenente tunsteno: e ne dà relazione concludendo che con detto acciaio si ottengono magneti permanenti di intensità doppia di quelli formati di acciaio comune. Promise iniziare analoghi esperimenti sull'acciaio contenente cromo ovvero nichelio, qualità tutte d'acciaio fornitegli dall'acciaieria Glisenti di Valtrompia.

Per aver campi magnetici intensi applicò il rocchetto d'induzione alle dinamo del Municipio di Modena destinate all'illuminazione elettrica del teatro; ma dovette limitare assai l'intensità della corrente perchè il rocchetto non sopportava più di sessanta Ampéres. Ed in queste esperienze intravide un fatto nuovo e cioè che il magnetismo permanente dell'acciaio aumenta col campo magnetico fino a un certo punto, poi diminuisce: fatto nuovo ed importantissimo che l'esperimentatore spera di meglio verificare quando, come spera, possa ottenere locali e mezzi più adatti. Quanto sia al coefficiente medio di temperatura dei magneti rilevò che è piccolo, ma costante solo fra limitate differenze di temperatura.

Presentò finalmente il prof. Chistoni una Nota del sig. Ing. Giorgio Levi intitolata *Contribuzione allo studio dei fenomeni che accompagnano i fulmini.*

In questa nota l'Ing. Levi fa una relazione dettagliata sulle tracce meccaniche, chimiche e magnetiche lasciate da tre fulmini caduti in Modena e ne' suoi contorni nell'anno corrente: studia la condizione cui deve soddisfare un buon parafulmine per ovviare, oltre al pericolo di scariche dall'esterno, anche al pericolo delle interne fra punto e punto dello spazio protetto, e per conseguenza studia come si possa fare un impianto razionale

Digitized by Google

di parafulmini, non nascondendo le difficoltà che si oppongono ad una soluzione scientifica del problema, di proteggere dalle perturbazioni elettriche una porzione di spazio.

L'Ing. Levi fece anche delle investigazioni sul nembo magnetico che accompagnò due fulmini; e mostra quali circostanze si oppongono alla ricostruzione del campo magnetico e fa delle proposte per uno studio accurato del magnetismo nell'atmosfera.

A chiudere la serie delle memorie scientifiche mi resta ad accennare quella del Presidente della Sezione di Scienze socio attuale prof. cav. Dante Pantanelli, la quale riassume gli studi de' geologi sull'Appennino emiliano. Prendendo le mosse dal Brocchi (1814) ricordò i principali lavori di coloro che si sono occupati dell'Appennino settentrionale e pose in evidenza come gli studiosi siano a poco a poco venuti nelle opinioni che attualmente dominano nella scienza. Esaminò quale influenza abbiano avuto gli studii e le ricerche di altre regioni nel successivo sviluppo delle cognizioni geologiche dell'Appennino emiliano, e accanto ai lavori d'indole generale, rese conto di tutti i lavori parziali o della parte di lavori generali nei quali si rammentano speciali ricerche sull'argomento.

Dal campo delle Scienze debbo ora far trapasso a quello delle Lettere, in addietro largamente coltivato dai membri della nostra Accademia: ma qui mi è dato di intrattenervi di una sola memoria di soggetto letterario quella del Socio attuale cav. Benedetto Malmusi *intorno alle lapidi della Necropoli Musulmana di Dahlak*. Quei rari e preziosi monumenti pervennero al Museo Civico modenese in parte per dono del signor Paolo Parenti Ufficiale della R. Marina, e in parte per acquisto fattone, per conto del Museo stesso, dal sig. Cav. Dott. Vincenzo Ragazzi, il quale oltre essersi recato all'isola di Dahlak per provvedere le lapidi, ne curò anche l'invio a Modena. Il Malmusi, detto come quelle lapidi abbiano tutte epigrafi in lingua araba, alcune scritte con caratteri cufici e altre colla scrittura araba moderna, fa notare l'interesse che desse presentano sotto il duplice aspetto linguistico e storico. Osserva come la più

Digitized by Google

vetusta di quelle pietre sepolcrali possa ascriversi alla seconda metà del IX secolo, mentre la più recente porta la data del 653 dell'Egira, corrispondente all'anno 1255 dell'era nostra. Comprenderebbero quindi un periodo di oltre tre secoli, durante i quali i mussulmani ebbero stabile dimora nell'Arcipelago di Dahlak. Anzi nel XII secolo, come pare si possa desumere da due di quelle iscrizioni, quella Società Mussulmana costituiva piccolo sultanato. La memoria termina colla traduzione delle epigrafi accompagnata da opportune note e schiarimenti e dai *fac simili* di quelle iscrizioni, che al Malmusi sembrano potere maggiormente interessare gli studiosi.

Più feconda nella parte artistica è stata l'opera dell'Accademia che non in quella delle lettere, e di cinque memorie che trattano d'arte io deggio indicarvi gl'oggetti e gli autori.

Il Presidente prof. comm. Pietro Riccardi dapprima presentò e descrisse due carte topografiche a mano, concernenti la città di Modena. L'una riferibile al 1447, offre qualche importanza per i particolari, che rappresenta dei dintorni della città. L'altra dei primi anni del secolo XVII, contiene la planimetria dell'antico Castello degli Estensi e delle parti della città ad esse circostanti, come si trovavano anteriormente alla costruzione del palazzo ducale.

La Pieve di Trebbio presso Guiglia formò soggetto di studio pel socio attuale prof. cav. ing. Vincenzo Maestri, il quale dall'esame degli avanzi dell'antico edificio crede poter argomentare che la sua costruzione non possa risalire ad un'epoca anteriore al secolo IX ed esclude che possa essere una costruzione posteriore al mille. Il cav. Maestri riferisce d'aver inviato al Ministero della Istruzione Pubblica un suo rapporto diretto ad ottenere che i pochi avanzi fuori d'opera e le parti decorative dell'insigne monumento medioevale che è la Pieve di Trebbio salvate da inconsulti restauri eseguiti nel 1727 sieno custoditi e conservati. Lo stesso cav. Maestri lesse poi una breve memoria d'archeologia cristiana, prendendo argomento da un calice, pregevole lavoro di oreficeria del secolo XIII, proprietà

Digitized by Google

della chiesa di Montebaranzone, e da due croci processionali l'una della chiesa stessa e l'altra di quella di S. Faustino presso Modena. Le due croci in lamiera di rame dorato e con anima di legno sono un lavoro di grossolano cesello con simboli e figure caratteristiche di quel periodo di transizione delle arti minori, che conservando qualcuno dei caratteri proprii dello stile bizantino, preclude colle forme ingentilite e più corrette alle maravigliose opere di simil genere dei secoli XIV e XV, e a detto periodo spetta pure il calice di Montebaranzone che per infondata tradizione vuolsi appartenesse alla Gran Contessa Matilde.

Dall'arte antica venendo alla moderna farò menzione di una lettura del socio attuale cav. Arsenio Crespellani sui lavori di oreficeria e meccanica di un valente artista modenese Felice Riccò. Espose questi nel 1850 e 1862 due vasi con bacili in argento cesellato, lavori ammirati per la squisitezza del gusto, per eleganza di forme e finitezza d'esecuzione. Tentò felicemente l'incisione in acciaio e ne diede buon saggio nel conio di una medaglia per premii. Più volte il Riccò si presentò ai Concorsi annui aperti dalla nostra Accademia fra gli artisti della provincia ed ebbe il premio o menzioni onorevoli per la maniera da esso inventata di costruire tabellionati e sigilli, per l'applicazione della stampa su lastre d'argento e di rame, pel metodo d'intagliare e colorare il legno ad imitazione della lana e della felpa, e infine per campioni di cuoio lavorato a mano. In questa lavorazione dimostrò somma maestria, e richiamò in vita un arte che nel secolo XVI fu assai fiorente nella nostra città. Il Riccò, al quale il governo estense fornì i mezzi di perfezionarsi nell'arte in Vienna ed affidò l'incarico di fare colà gli studi necessarii per l'impianto d'una zecca in Modena (progetto poi non realizzato) morì in patria l'11 febbraio 1894 lasciando fama di intelligente e valoroso artista ed il Crespellani a tutta ragione ricordò la modesta sua vita ed i suoi pregiati lavori.

Un appassionato cultore della storia musicale, il socio attuale conte cav. Luigi Francesco Valdrighi, ha portato un no-

Digitized by Google

tevole aumento al primo elenco di fabbricatori di istrumenti armonici edito nel 1884 nei volumi delle Memorie accademiche, presentando una quinta aggiunta che registra 1106 nuovi nomi corredata di erudite ed interessanti annotazioni.

Per quanto spetta ai concorsi accademici per l'anno 1893-94 ne fu pubblicato il relativo programma addì 30 Marzo 1894: ma non furono aggiudicati i premi pel precedente concorso; dacchè in causa di eccezionali circostanze mancasse il relativo voto dei Giudici scelti dall' Accademia.

Nell' assemblea generale tenuta sul principiare dell'anno 1893-94, dopo la lettura della relazione sui lavori ed atti dell'anno precedente e l'approvazione dei resoconti amministrativi, ad occupare due posti vacanti nella classe dei Soci Attuali furono nominati il dott. Tommaso Sandonnini ed il prof. Antonio Mori, e per acclamazione furono approvate le proposte di ascrivere al novero dei soci corrispondenti il prof. Giuseppe Lorenzoni ed a quello degli onorarii il prof. Emilio Mascart. Ebbe quindi luogo secondo il solito la nomina dei giudici per l'annuo concorso ai premi d'onore; il Presidente non potè presentare il Vol. IX delle Memorie (Seconda Serie), ma ne annunciò prossima la pubblicazione; e l'Assemblea approvata una modificazione regolamentare riguardante il modo di convocare le generali adunanze, deferì alla Direzione centrale l'incarico di studiare e proporre variazioni ad alcuni articoli dello statuto accademico.

A compimento della mia relazione non resta che toccare la dolorosa nota delle perdite fatte dalla nostra Accademia. Otto Colleghi nel decorso anno ci ha rapito la morte di cui rammenterò con tutta brevità le benemerenze. Colle elezioni che siete invitati a fare questa sera riempirete i vuoti verificatesi nelle nostre file: nuovi e vigorosi cooperatori alle nostre fatiche arruoleremo; ma prima salutiamo i cari e stimati compagni per sempre perduti.

E cominciando dai soci onorari vi ricorderò per primo Ermanno Helmholtz. Nato il 31 agosto 1821 a Potsdam, insegnò anatomia a Berlino, fisiologia a Konisberg a Bonn a Heidelberg,

Digitized by Google

e fisica a Berlino dove li 3 gennaio 1870 fu eletto membro dell'Accademia delle Scienze.

I lavori dell'Helmholtz, che trattano principalmente delle condizioni fisiologiche delle impressioni dei sensi godono d'una celebrità mondiale e la nostra Accademia li 12 febbraio 1892 inscrisse fra i soci onorari nel suo albo il nome dell'illustre fisico e fisiologo, il quale mancò alla vita sul principiare del settembre 1894.

Il comm. G. B. De Rossi, il principe della cristiana archeologia, novello Cristoforo Colombo della Roma sotterranea antica, si spense a Castel Gandolfo il 20 settembre 1894. Apparteneva sino dal 19 dicembre 1874 come socio onorario al nostro Istituto, il quale come nella ricorrenza del sessantesimo e settantesimo suo compleanno nel 1882 e 1892 lo aveva felicitato con riverenti e affettuosi telegrammi, così nella luttuosa circostanza del suo decesso espresse sentimenti di profonda condoglianza al nostro socio corrispondente cav. Michele Stefano fratello dell'illustre estinto.

Un solo socio permanente perdette l'Accademia nel tempo al quale ha riferimento questa relazione: il cav. avv. Pietro Bortolotti. Ammesso tra suoi membri li 20 dicembre 1873 coi suoi lavori storico-archeologici apprezzatissimi fra noi e forse più all'estero, e colla sua intelligente opera nel disimpegno d'importanti uffici accademici a lui affidati dai Colleghi, arricchì i volumi delle memorie e cooperò al buon andamento e decoro dell'Istituto nostro. Fra i suoi lavori tutti importanti, per esser breve, ricorderò solamente i seguenti: *Spicilegio epigrafico Modenese — Del Talento omerico — Del primitivo Cubito egizio e de' suoi geometrici rapporti colle altre unità di misura e di peso egiziane e straniere — Ragguaglio di un Ambone modenese ed altro patrio avanzo architettonico Cristiano del secolo VI — Nota iconografica intorno un quadro di fra Paolo da Modena Domenicano.* Nè debbo tacere delle sue annue relazioni degli Atti accademici relative agli anni nei quali sostenne tanto degnamente la carica di Segretario generale. Un lavoro poi di somma pazienza

Digitized by Google

condotto con ammirabile diligenza e precisione sono gli indici da lui compilati per la prima serie delle nostre memorie: lavoro di cui dobbiamo essergli sommamente grati per la sua incontestabile utilità. Il giorno 14 maggio 1894 fu l'ultimo della vita del cav. Bortolotti: la sua memoria però vivrà a lungo nell'Accademia nostra della quale colla sua dottrina ed operosità si rese tanto benemerito.

Due soci attuali debbo poi ricordare che non fanno più parte del nostro Consorzio. Il prof. Giuseppe Manzini che nella grave età di 83 anni ci lasciava li 29 gennaio 1894. Studiò matematica nella scuola dei Pionieri di Modena, ferace semenzajo d'illustri scienziati. Le vicende politiche del 1831 lo portarono in Francia, ed a Parigi ottenne il diploma di ufficiale di sanità e di libero esercizio in farmacia. Dopo molte peregrinazioni ritornò nel 1859 a Modena e nel dicembre di quell'anno fu nominato professore di chimica farmaceutica e tossicologia nella nostra Università dove insegnò con lode sino al 1887. L'Accademia lo aveva ascritto fra i soci attuali sino dal 13 dicembre 1879 e nelle sedute della sezione di scienze 31 dicembre 1879 e 24 gennaio 1880 diede lettura di alcuni teoremi di geometria relativi alla proprietà degli assi radicali di due o tre circoli situati nello stesso piano, mostrando che l'applicazione dei medesimi può condurre a risolvere in modo semplicissimo alcuni importanti problemi, fra i quali quello conosciuto sotto il nome del problema del Malfatti.

Il secondo dei soci attuali è il dott. cav. Carlo Boni, spentosi a Salsomaggiore su quel di Parma il 18 agosto 1894. Non mi è dato quì di parlarvi de' studi fatti dal Boni, delle interessanti collezioni di mineralogia, paleontologia, malacologia e ornitologia da lui fatte, della parte che egli ebbe nella fondazione della Società dei naturalisti, del Museo civico modenese da lui istituito, delle cariche sostenute, delle onorificenze ottenute, delle lodate sue pubblicazioni. Mi limito quindi a ricordare che il Boni ascritto alla nostra Accademia l'undici dicembre 1866 fornì materia ai volumi accademici con due me-

Digitized by Google

morie — *Analisi di una pietra calcare del monte di Pujanello su quello di Castelvetro, la quale può somministrare calce idraulica* — ed il *Catalogo de' Moluschi del modenese* — Il giorno della dipartita del Boni non fu soltanto giorno di lutto per la sua famiglia, ma pur anco per le società scientifiche e storiche alle quali apparteneva, e per la sua città natale che tanto lo stimava ed amava.

Anche di due soci corrispondenti in questo troppo lungo necrologio io debbo fare menzione.

Baldassare Boncompagni dei Principi di Piombino nato li 10 maggio 1821 pubblicò numerosi ed importanti lavori d'erudizione che resero chiarissimo il suo nome. Lungo sarebbe l'enumerarne soltanto i principali, e forse inutile, chè sono assai noti. Ricorderò nullameno il *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* da lui fondato con magnificenza principesca, che si compone di oltre 20 volumi e contiene moltissimi suoi articoli. L' Accademia inscrisse il nome del Boncompagni nel suo Albo li 19 dicembre 1867 ed ora dolente per la morte avvenuta dell' illustre suo Socio è astretta a radiarnelo.

Giuseppe Battaglini matematico insigne nato in Napoli l'11 gennaio 1826 insegnò Geometria superiore nella patria Università e poscia calcolo differenziale e integrale e matematiche superiori. Pubblicò assai pregiate memorie negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, della R. Accademia dei Lincei ed in altre reputatissime effemeridi. La fama acquistata gli procurò la nomina di socio di molte accademie italiane e straniere, ed ultimamente fu nominato professore onorario dell'Università di Kasan (Russia). La nostra Accademia lo aveva ascritto fra i suoi soci nel 16 dicembre 1872 e lo perdemmo li 29 aprile 1894.

Chiuderò l'elenco dei Colleghi, che nell'anno decorso pagarono il comune naturale tributo, col nome del socio sopranumerario avv. comm. Senatore Luigi Zini modenese. Ascritto nel 1860 addì 7 del gennaio tra i soci attuali passò alla classe dei

Digitized by Google

sopra numerarii perchè si allontanò da Modena. È personaggio noto fra noi ed è inutile che io mi dilunghi a parlarvene. Voi conoscete le sue opere storico-politiche, gli alti uffici che occupò dopo che l'Italia fu costituita in regno. Morì in patria nel giorno 21 settembre 1894, e se la sua modestia non l'avesse vietato, i concittadini ne' suoi funerali avrebbero data alta dimostrazione del loro affetto al patriota, allo scienziato, al magistrato che abbandonava la scena del mondo.

E pagato così il doveroso tributo d'onoranza ai nostri che la morte in quest'ultimo periodo tolse all'Accademia, agli altri auguro lunga e prosperosa vita affinchè possano esplicare la loro attività in opere che rechino vantaggio ai comuni studi e gloria al loro nome ed all'antico Istituto che tutti ci raccoglie a nobilissimo scopo.

Digitized by Google

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI ARTI

Digitized by Google

Digitized by Google

DI ALCUNE COSTRUZIONI MEDIOEVALI

DELL' APPENNINO MODENESE

II.

LA PIEVE DI ROCCA S. MARIA

I. A trenta chilometri circa da Modena, trovasi sulla Via Giardini che passando pel vallico dell' Abetone conduce alla vicina Toscana, un antico ricambio di posta detto Montardone. Di fronte al medesimo, dalla parte di ponente, staccasi una stradicciuola che, dopo il percorso di poco più di un chilometro, mette capo alla Borgata di Rocca S. Maria, frazione del Comune di Montefestino nella Provincia di Modena.

Contornata da collinette e poggi di poca elevazione, sorge l' antica borgata su di una nuda roccia calcare, priva di ogni vegetazione (1).

Una chiesa di forma basilicale, alla quale stanno addossate alcune costruzioni recenti, un campanile moderno e diverse case

---

(1) Sulla vetta della più elevata di quelle collinette vedesi una campana, con stemma gentilizio, fusa da Martino da Modena nel 1370, di commissione della famiglia Balugola, indicata nell' iscrizione col sopranome degli Advocati. Quasi contemporaneamente un Bartolomeo da Modena fondeva nel 1360 una campana per la soppressa chiesa di S. Giacomo di questa Città. Dello stesso fonditore esiste nel campanile della *Sagra* di Carpi una campana fusa dal medesimo nel 1352.

Digitized by Google

di meschina apparenza costituiscono ora la Borgata di Rocca S. Maria.

II. Le notizie storiche che la riguardano non risalgono oltre al secolo XI. Si può esser certi però della esistenza contemporanea della sua Rocca coi Castelli, Feroniano, di Monteveglio, Verballo, ed altri non meno importanti dell'Appennino, dei quali antichi documenti fanno menzione sulla fine della dominazione Longobarda (774).

Nel periodo Carlovingico, per le migliorate condizioni dell'antico pago modenese (1), l'importanza di Rocca S. Maria deve essersi avvantaggiata. Proprietà della Chiesa Modenese sul cadere dell'anzidetto periodo, pervenne più tardi nel 1038 in possesso del Marchese Bonifazio III di Toscana, per una di quelle permute leonine che esso usava imporre a' contraenti meno forti di lui (2).

La Contessa Matilde, succeduta al padre, donava nel 1108 Rocca S. Maria al Vescovo Dodone di Modena. Nello stesso anno in Montebaranzone, una delle sue residenze favorite, tenne essa un placito in una causa promossa, contro i *ministeriali del conte* dagli uomini della Corte di Rocca S. Maria, gravati di oneri non dovuti. La causa che diede luogo al placito dimostra l'importanza di quella *Corte* fino dai tempi della Gran Contessa.

Lo stesso Vescovo Dodone affidava la custodia della *Rocca de S. Maria in Castello* alla potente famiglia Balugola investita delle alte prerogative dell'*avocazia* della Chiesa Modenese.

In una delle tante prese d'armi delle turbolenti fazioni del Frignano, veniva occupata a viva forza nel 1310 dai Signori di Sassuolo, che la consegnarono alla famiglia dei Savignano, la quale ne conservò il possesso fino alla mal riescita ribellione di questa famiglia contro il Marchese Nicolò III di Ferrara.

---

(1) Malaguzzi Valeri, *La costituzione e gli statuti dell'Appennino Modenese dal secolo VIII al XIV.*

(2) Tosti, *La Contessa Matilde ed i Romani Pontefici.*

Digitized by Google

Spogliati nel 1408 i malfidi Signori di Savignano di tutti i loro possessi, fra i quali Montefestino, di cui Rocca S. Maria era una dipendenza, Nicolò ne fece dono al suo fido Uguccione dei Contrarii, i cui discendenti la tennero fino alla morte di Ercole III di quella famiglia, miseramente avvenuta nel 1575.

Due anni dopo, per l'acquisto di Vignola e Montefestino fatto da Jacopo Buoncompagni Duca di Sora, passò Rocca S. Maria alla famiglia Buoncompagni, che la mantenne in suo dominio fino alla abolizione dei feudi (1).

III. Nel contratto di permuta fra il Vescovo Viberto ed il Marchese Bonifazio, pubblicato dal Muratori (2) risulta che il nominato Vescovo cedeva oltre ad altri beni: " *terzia namque* „ *curte in loco qui dicitur Sancta Maria in Castello una Roca* „ *et ecclesia inibi abente, et est consecrata in honore Sanctae* „ *dei Genetricis et Virginis Marie una cum rebus domuicultile sive* „ *casis massariciis atque universis rebus ubi per locis positis ad* „ *ipsas Curtes et Castris sue Roche sive Ecclesiis atque casis mas-* „ *sariicis et huniversis rebus pertinentibus in integrum* „.

Da questa descrizione emerge chiaramente, che Rocca S. Maria presentava, in quell'epoca, un complesso di costruzioni e di edifici talmente importanti da giustificare il desiderio nel Marchese Bonifazio di rendersene padrone.

Per farci un criterio esatto delle accennate costruzioni esaminiamo il valore dei nomi coi quali allora esse si designavano.

Colla denominazione di *Curte* si indicava, nel medioevo, una villa od abitazione rustica composta di costruzioni rurali, per alloggio dei coltivatori delle terre e pel ricovero del bestiame, fornita di ogni cosa agraria. Così per *Rocca* si intendeva qualsiasi luogo munito posto su di una rupe o su di un clivo, e con *domuicultile* si accennava alla casa o centro ammini-

---

(1) Tiraboschi, *Dizionario Topografico-Storico degli Stati Estensi.*

(2) Muratori, *Antiquitates Italicae Medii Aevi*, Tom. III, col. 177.

Digitized by Google

strativo di direzione del latifondo, che oggi corrisponde alla nostra fattoria.

L' *Ecclesia* o chiesa di Rocca S. Maria, attorno alla quale sorgevano una Rocca, una Corte, una Fattoria, un Borgo, doveva essere un Edificio di notevole importanza, non potendosi credere, in quell' epoca di fervore religioso, che la *Casa del Signore* fosse per considerazione inferiore alle altre costruzioni che la circondavano (1).

Di quelle costruzioni non rimane ora in piedi che la sola chiesa, essendo tutte le altre scomparse, compresa la Rocca della quale non si hanno che ruderi insignificanti, per cedere il posto a quei pochi casolari che costituiscono l' attuale borgata.

Nel contratto di cessione al Marchese Bonifazio è detto che quest' ultimo prende in enfiteusi il Castello di Bazzano colla *cappella* dedicata a S. Stefano, il Castello di Livizzano con due *cappelle,* una dentro il Castello dedicata a' SS. Martiri Adalberto ed Antonino, l' altra fuori, dedicata a S. Michele Arcangelo, e la Rocca S. Maria colla *chiesa* del medesimo nome, comprese tutte le loro pertinenze.

La chiesa di Rocca doveva emergere per importanza su tutti gli edifizi sacri menzionati nel contratto; ciò si rileva dal diverso nome col quale quegli edifizi sono designati. L' edifizio sacro di Rocca S. Maria è distinto col nome di chiesa, gli altri di Bazzano e Livizzano sono designati col nome di cappelle " *parva ecclesia quae nec habet baptismum nec cimiterium* „ (2).

Sulla identità della attuale Pieve di Rocca S. Maria con la chiesa nominata nel contratto del 1038 non può aversi alcun dubbio; un semplice esame della sua struttura e de' suoi elementi decorativi è sufficiente a porlo in evidenza. Risulta essa per tutti i caratteri del suo stile anteriore alla architettura lombarda o romanica dell' XI e XII secolo.

(1) Du Cange. *Glossarium mediae et infimae latinitatis.*

(2) Du Cange. Opera citata.

Digitized by Google

IV. Una breve scorsa sulle condizioni della Chiesa Modenese, prima degli accennati secoli, si ritiene opportuna per determinare il periodo storico, al quale si può attribuire la primitiva costruzione della pieve di Rocca. Proprietà dei Vescovi di Modena fino dal secolo XI, che intorno ad essa possedevano terreni, caseggiati, fattorie ed una ben munita Rocca, non può che ai medesimi, nell' epoca di maggior floridezza della loro Chiesa, attribuirsi la costruzione dell' importante monumento. I pochi e sparsi abitatori delle circostanti montagne non potevano accingersi, abbandonati alle loro forze, ad impresa tanto poderosa.

Alla fine del IV secolo le condizioni della Chiesa Modenese non potevano essere più miserande. S. Ambrogio, nella sua famosa epistola al fratello Faustino, dice di aver trovato le città dell' Emilia, fra le quali Modena, cadaveri di città prive di ogni risorsa. In questo stato di miseria si perdurò fino alla costruzione di una nuova città, a pochi chilometri dalla vecchia, avvenuta sotto il Regno di Liutprando (712-742). Nel periodo trascorso dalla fine del IV secolo al principio dell' VIII le condizioni della Chiesa Modenese dovevano essere ben poca cosa, se a stento si è messa assieme la serie cronologica dei Vescovi, che ne ebbero il governo, senza accennare ad alcuna cosa notevole da essi operata.

Lo stato di relativa tranquillità degli ultimi tempi della dominazione Longobarda, dando luogo ad un miglioramento nelle condizioni economiche del territorio, sul quale si estendeva l' influenza della nuova città, costrutta dai Modenesi per iniziativa de' loro Vescovi, doveva necessariamente riflettersi sulle sorti della Chiesa affidata alle loro cure.

Al desiderio nelle popolazioni di una più agiata esistenza, doveva fare riscontro, nei ministri del culto, la brama di chiese più decorose; donde un miglioramento notevole nei nuovi edifizi religiosi di quell' epoca.

Nella metà circa dell' VIII secolo per opera di S. Anselmo sorgevano il monastero di Fanano e la Badia di Nonantola.

Digitized by Google

Dotazioni di Re Astolfo provvedevano al lustro di quest'ultima Badia ed alla fondazione di una chiesa nel Borgo di Carpi.

I privilegi e le *regalie* largite da Carlo Magno e suoi successori alla Chiesa Modenese, i di cui Vescovi resi quasi indipendenti dalla potestà civile, furono in grado di cingere di mura la vecchia città, sollevandola dallo stato di rovina e di abbandono nel quale giaceva da parecchi secoli, segnano per la Chiesa medesima, investita dai Carolingi di ogni specie di *late giurisdizioni,* un'êra di floridezza che dal principio del secolo VIII arriva fino alla invasione degli Ungheri nei primi anni del secolo X (1).

A questo periodo, di quasi due secoli, si può attribuire la costruzione di molte chiese nei territori soggetti ai Vescovi di Modena. Fra queste chiese la Pieve di Rocca S. Maria occupa un primo posto.

Negli antichi cataloghi delle chiese soggette alla Diocesi di Modena, Rocca S. Maria figura come una delle Plebane di maggiore giurisdizione, dipendendo da essa quindici chiese e sette cappelle regolarmente ufficiate (2).

V. Il suo aspetto esterno non presenta alcun interesse. La facciata principale terminata in alto da un frontone, priva di finestre, ha una sola porta di luce rettangolare. Nel fianco di mezzogiorno, il solo che sia scoperto, si veggono due grandi

---

(1) Tiraboschi, *Memorie storiche Modenesi.*

(2) Biblioteca Estense, Manoscritti Campori n. 1227, Catalogo delle chiese modenesi 1463.

Plebis, *Sanctae Mariae de Rocha.*

Cappelle ipsius Plebis:

Eccl sia Sancti Ippoliti de Ligorzano, Sancti Nicolae de Cadignano, Sancti Michaelis de Valle, Sancti Ioannis de Pazzano, Ecclesia de Sasso Morelio, Sancte Mariae de Pompegnano, Sancti Geminiani de Roncovetulo, Ecclesia de Richo, Ecclesia de Granaiolo, Sancti Petri de Monticulo. Sancti Laurentis de Nirano, Sancti Clementis de Nirano Sancti Martin de Nirano, Sancti Martini de Montegibio, Sancti Donnino de Montebaranzone, Sancti Andrea de Rocca, Sancti Petri de Banzola, Sancti Ioannis de Spezzano, Sancto Stephano, Sancti Salvadoris de Foliano, Sancti Petri de Varana.

Digitized by Google

finestre esse pure di luce rettangolare. Costruzioni moderne per usi civili sono addossate all'altro fianco ed alla sola abside che rimane.

Importanti ristauri, tanto internamente che esternamente, furono eseguiti nella metà del secolo scorso: da una memoria inedita esistente nell'archivio parrocchiale si rileva che:

" *Quantunque documento alcuno o memoria si trovi nell'archivio di questa chiesa che provi la di lei origine o fondazione, nullameno dalla struttura di varie fenestrelle, dagli archi e dai vari e diversi lavori intagli testine ecc. che si osservano nelle colonne che sostengono le tre navi e volte della medesima, se ne deduce abbastanza l'antichità.*

" *A sostenere con fondamento questo mio asserto, sarebbero concorse le molte epigrafi ed iscrizioni che in diverse lapidi ed in caratteri Gotici si ammiravano nel corrente secolo entro e fuori della chiesa e nel campanile; ma siccome circa l'anno 1750 venne alzato il campanile e la nave di mezzo della chiesa, così nell'istessa occasione venne anche male a proposito intonacato di calcina tutto il corpo della detta chiesa, in guisa tale che si è smarrito il più pregievole tesoro della medesima, vale a dire quello che accertava della sua antichità.*

" *È tradizione comune, anche in persone colte, che quella chiesa fosse edificata assieme al castello annesso (del quale se ne osservano tuttavia le fondamenta) d'ordine della tanto rinomata Contessa Matilde, ed è verosimile, perchè nella storia di Modena scritta e data alle stampe dal celebre Dottor Lodorico Vedriani nell'anno 1666 si legge che la sumenzionata Contessa Matilde donò al vescovado di Modena, ossia a S. Geminiano questo luogo di Rocca S. Maria con la sua Corte* **pro mercede et remedio animae suae** *governando in quei tempi la chiesa di Modena il Vescovo Dodone* (1) ".

---

(1) Informazione esatta della Chiesa Parrocchiale Plebanale di Rocca S. Maria governata dall'anno 1775 sino al presente 1792 da me Don Giuseppe Ceccarelli Sacerdote nato in Ligorzano che di mia età conto adesso anni 62.

Digitized by Google

Del trascritto brano di documento è attendibile la sola parte che riguarda i ristauri del 1750, dei quali meritano speciale considerazione l' alzamento della nave di mezzo e l' intonaco interno di tutto il corpo della chiesa. Sebbene in quel brano di documento non se ne faccia menzione, si modificò pure in epoca di molto anteriore il fondo delle navate secondarie, rimovendone gli absidi per far posto alla costruzione della torre e della canonica. Dell' abside della navata di settentrione si veggono tutt' ora evidenti traccie della sua apertura arcuata a tutto sesto.

Alla tradizione che popolare ed insistente corre anche per la Pieve di Rocca S. Maria, che essa sia una delle cento Pievi erette dalla Contessa Matilde, contraddice, oltre alle serie di argomenti esposti nei cenni monografici della Pieve di Trebbio, anche l' assenza nella sua struttura e decorazione di qualsiasi carattere dello stile architettonico dei tempi della Gran Contessa.

VI. La pianta della vecchia Pieve (fig. 2) è rettangolare, larga metri 11,20 per una lunghezza di metri 21,50. Dalla parte di levante vi è connessa un' abside semicircolare del diametro interno di metri 2,80. Connesse pure alle navate secondarie stavano altre due absidi contemporanee alla centrale, prima che fossero sostituite dalle attuali costruzioni. Lo spazio corrispondente all' ultima arcata della nave di mezzo, di una maggior luce delle altre, si distingue da tutto il resto della chiesa, divisa in tre navate da due file di colonne, sulle quali si incurvano gli archivolti che sostengono i muri di separazione delle navi minori.

Sono segni manifesti della accennata distinzione le due semi-colonne infisse nei due pilastri dell' anzidetta arcata. Sulla collocazione di queste due colonne, contemporanee per fattura alle altre delle navate, non si può avere alcun dubbio. Fino dall' originaria costruzione della Pieve furono ivi collocate.

La distinzione per ragione liturgica della arcata della nave di mezzo più vicina all' arco trionfale riesce evidente. In essa trovava posto, entro recinto chiuso da cancelli ed elevato alcuni

Digitized by Google

gradini, il clero per la celebrazione dei divini uffici. Da questo recinto salivasi sugli amboni e si accedeva al ciborio ed all'altare (1).

La navata di mezzo è larga metri 3,36, le secondarie metri 2,52. Le arcate a pieno centro (fig. 1 e 4) sono larghe 3,84, la più vicina all'arco trionfale misura una larghezza di metri 4,95. È essa alta metri 3,62 come le altre e poggia su piedritti privi d'ogni ornamento.

Tanto le quattro colonne isolate, che le quattro semi-colonne incassate nei piedritti della maggiore arcata e nel muro della facciata, tutte di ugual diametro di metri 0,54, misurano, compresa la base ed il capitello, una altezza di metri 1,70, di poco tre volte maggiore del loro diametro. I capitelli variano nelle loro altezze da metri 0,45 a metri 0,75 ossia da tre quarti di diametro ad un diametro e un quarto; le basi superano di poco il mezzo diametro (fig. 5).

La navata di mezzo, prima dell'innalzamento del 1750 (fig. 3) doveva essere senza finestre, desumendosi da traccie nei muri, che la vecchia Pieve era coperta da due sole falde di tetto. Le volte di mattoni in quarto, che coprono tanto la nave maggiore che le secondarie, appartengono a ristauri ed innovazioni di molto posteriori alla sua primitiva costruzione.

Nella navata di settentrione si vedono segni di finestre a tutto sesto, alte m. 1,14, larghe m. 0,15 con una sola strombatura dalla parte interna (fig. 7). Erano queste le sole finestre che unitamente a quelle delle absidi davano aria e luce all'interno della chiesa.

Semplicissima era la cornice che ricorreva sui fianchi delle navate laterali (fig. 6); dagli avanzi che tutt'ora rimangono si vede che era composta di un guscio o cavetto con superiore listello.

---

(1) Ciampini, *Vetera Monimenta Romae.* — Moroni, *Dizionario di Erudizione Storico-ecclesiastica.* — Martigny, *Dictionaire des antiquités chrettiennes.*

Digitized by Google

Tutta la muratura è in arenaria del luogo sufficientemente resistente all' azione del tempo. I muri tanto perimetrali che delle navate sono dell' uguale spessore di metri 0,70. I fusti, i capitelli e le basi delle colonne di un sol pezzo ciascuno sono della stessa arenaria dei muri. La congiunzione delle pietre alte da m. 0,20 a 0,35 è esattissima, e la loro disposizione nei muri con cemento di calce e sabbia segue le norme dell' opera *pseudoisodoma* delle costruzioni romane. Il tetto è coperto da lastre calcari con incavallature e travi di rozzo lavoro.

Tradizione alcuna nè segni palesi accennano all' esistenza di una cripta. La natura rocciosa del poggio, sul quale sorge la chiesa, esclude qualsiasi variazione nel suolo da lasciare supporre a modificazioni nell' antico piano di fondazione.

Nessun indizio o traccia che ricordi costruzioni che stassero d' innanzi all' ingresso della vecchia Pieve. Del *nartex* e *pronaos* delle basiliche dei primi secoli cristiani non si vede nel muro della facciata alcun richiamo, non ostantechè, per la distribuzione interna delle navate e dello spazio distinto pel coro, siavi con quelle basiliche una sufficiente analogia.

La mancanza della *confessione* o *martyrium,* l' esistenza dei pilastri e delle connessevi semi-colonne dell' ultima arcata ed il recinto, tutto speciale, assegnato alla nave di mezzo per la lettura delle epistole e degli evangeli, escludono nel loro complesso che la vecchia Pieve possa risalire ad epoca anteriore all' VIII secolo (1).

Preservate dai ristauri del secolo scorso, rimasero le colonne delle navate, le cui basi presentano presso a poco il profilo delle basi attiche che sopravissute all' architettura classica furono quasi sempre usate negli stili che vi succedettero.

A protezione dell' angolo del plinto di quelle basi, staccasi dal toro inferiore un' appendice formata da un irregolare quarto di sfera. È questo forse il più antico esempio di siffatta appendice

---

(1) Martigny. Opera citata. — P. Raffaele Garrucci. *Storia dell'Arte Cristiana.*

Digitized by Google

(fig. 5, 10 e 11). Vedesi essa nelle basi delle colonne dell'atrio della Basilica Ambrosiana ed in altri edifici dello stile lombardo primitivo in Italia, ed in Francia in monumenti che risalgono oltre all' XI secolo.

Gli otto capitelli delle colonne delle navate, diversi per forma e composizione, presentano nel loro complesso, caratteri tali di uno stesso stile, da potere su di essi formare un giudizio abbastanza esatto dell' epoca, alla quale si può attribuire il monumento di cui quei capitelli fanno parte integrante.

Le foglie di palmizi, i caulicoli, i viticci, e le volute, che variamente disposte entrano nella loro composizione ornamentale, non li privano della forma tipica dei capitelli corinti o compositi, di cui conservano, con fisonomia tutta loro propria, le caratteristiche principali.

Degno di speciale considerazione è ciascuno dei detti capitelli. In uno di essi (fig. 8) vedesi un abaco, con doppio toro schiacciato e due file di sottostanti dentelli, sostenuto da quattro modiglioni, che poggiano sopra caulicoli o viticci, che si sviluppano da palmizi nascenti da triplo cordone a foggia di vimini, che al basso ricorre attorno al capitello. Una stella di cinque foglie sta nel posto del fiore, sostenuta da una specie d' albero a tre rami. Questo capitello pei suoi dentelli, ricorda un capitello del duomo di Pisa, ed altri capitelli impiegati nelle prime basiliche cristiane.

Otto caulicoli, due per ciascun angolo, sostengono un pesante abaco di un altro capitello (fig. 9), formato da un grossolano guscio sormontato da un largo listello. Dal cordone, che al fondo del medesimo gira attorno al fusto, si dipartono due ordini di palmizi o foglie di palma. Capitelli del IX secolo sormontati da simile abaco si veggono nella chiesa di Saint Généroux nel Poitou (1).

---

(1) M. Arnauld, *Monuments religieuxs civils e militaires du Poitou.*

Digitized by Google

Altri rozzi caulicoli o viticci, sottostanti ad un abaco di confuso profilo, simmetricamente disposti, girano attorno ad altro capitello (fig. 10). Fra gl' intervalli di quei caulicoli, poggiate sul cordone della parte superiore del fusto, stanno foglie di palma, che ricordano altre simili di un capitello della Chiesa Abbaziale di Nonantola.

Palmette di stile greco (fig. 11), si veggono in un abaco di un capitello la di cui composizione sottostante ripete in parte il modo di sviluppo del primo dei descritti (fig. 8). Notevole in esso è la concava foglia che raccorda lo spigolo dell' abaco col fusto della colonna, partito ornamentale che si vede ripetuto in altri capitelli di stile italo-bisantino dall' VIII al IX secolo.

In un abaco di altro capitello (fig. 12) si osserva una specie di girata di triplo cordone, da cui sortono le solite foglie di palma. Questo abaco sta sopra volute, a larghe spire che con maggiori palmizi ornamentali formano la composizione decorativa del capitello. Ricorda la girata dell' abaco un frammento d' ornato che sta sulla porta di una delle cappelle di Livizzano, nominata nel contratto di permuta fra il Marchese Bonifacio ed il Vescovo Viberto.

Un esempio caratteristico, (fig. 13) delle intrecciature di stile italo-bisantino dell' VIII e IX secolo, lo porge un abaco di un altro capitello sostenuto ne' suoi angoli da due viticci o caulicoli di quattro cordoni a foggia di vimini che poggiano su di una foglia di palma. Serve questa foglia di raccordo fra gli anzidetti caulicoli ed il fusto della colonna, dal quale dipartonsi, ad occupare gli spazi fra i viticci, due ordini di foglie dei soliti palmizi.

Merita considerazione speciale un capitello delle semi-colonne dell' ultima arcata (fig. 14). Consta esso di due ordini di foglie; l' inferiore colle sue frappature di rozzo lavoro ricorda le foglie d' accanto dei capitelli corinti; il superiore riproduce i palmizi degli altri capitelli: sono questi separati da cordoni verticali staccati dal vivo come si veggono in due capitelli dei sotterranei della Chiesa Abbaziale di Nonantola ed in altri fram-

Digitized by Google

menti del museo di Pola appartenenti all'VIII e IX secolo. Sopra quest'ultimo ordine di foglie, sostenute dagli accennati cordoni verticali, vedesi nell'abaco un ornamento a scacchi rialzati, che è forse il più antico esempio di siffatta ornamentazione, che più tardi fu con profusione usata e ripetuta nelle costruzioni lombarde posteriori al mille.

Nella chiesa di Saint Martin d'Angers (816-819) associato agli *entrelacs,* propri in Francia, dell'epoca dei Carlovingi, vedesi un ornamento a scacchi rialzati che accenna in forma più semplice e corretta all'esempio offerto dal descritto capitello di Rocca (1). Più sommigliante — pel profilo e per la disposizione degli scacchi (*billettes*) — è un abaco, che figura in un esempio di scolture di stile romanzo secondario dell'XI secolo, riprodotto dal De Caumont (2).

Viticci e caulicoli di tre cordoni sostengono, in un ultimo capitello di sole foglie di palmizi disposte in due ordini, (fig. 15) un abaco nel quale si veggono due file di doppie semi-anelle circolari colla loro convessità poste a contatto.

Il De Rossi che esaminò le fotografie di tutti i descritti capitelli esternò su di essi il seguente avviso:

" *I capitelli della Chiesa di Rocca S. Maria mi sembrano* „ *notabili specialmente in ciò che il loro ornamento architettonico* „ *tante volte variato è però sempre composto di palmette o palmizi* „ *ornamentali; forse uno dei più antichi esempi di questo genere* „ *d'ornato è quello di una Basilica del VI secolo in Africa da* „ *me pubblicata nella* **Capsella Argentea Africana.** „ *Quel partito ornamentale si mantenne nell'età Carlovingica, alla* „ *quale ben s'addice quell'intreccio* — **antrelac** — *che inco-* „ *mincia in linea orizzontale uno dei capitelli* (fig. 13). *Per* „ *quanto io so e ricordo, siffatti capitelli variamente composti di* „ *palmette ornamentali non si mantennero fra noi in uso dopo il*

---

(1) M. Adolphe Berty, *S. Martin d' Angers.*

(2) *Abécédaire d' Archeologie — Architecture Religieuse.*

Digitized by Google

„ *secolo X. Questi però di Rocca S. Maria sono assai lontani*
„ *dalla rozzezza del secolo precedente al mille, perciò li stimo del*
„ *vero periodo Carlovingico fra il secolo VIII ed il IX.* „

VII. Indipendentemente dall' epoca alla quale il De Rossi assegnò l' originaria costruzione della vecchia Pieve, basando il proprio giudizio sul tipo dei capitelli esaminati, presenta la medesima caratteri tutti propri, che non si riscontrano in altre chiese contemporanee. Alcuni di questi riguardano la sua struttura organica, altri riflettono le sue parti decorative.

Riguardano la struttura:

La limitata larghezza della nave di mezzo che supera solamente di un terzo quella delle laterali, mentre per solito nelle basiliche, dell' VIII e IX secolo, a tre navate, la nave principale è dalle due alle tre volte maggiore delle secondarie.

L' esistenza nell' ultima arcata, maggiore di tutte le altre, di pilastri, che distinguono la corrispondente parte della nave di mezzo, riservata pel recinto del coro, da tutto il resto della chiesa. Le basiliche contemporanee hanno tutte le loro arcate di uguale larghezza.

La presenza nella primitiva costruzione di absidi laterali di cui si veggono rarissimi esempi in altre chiese anteriori al IX secolo.

L' esiguo rapporto, di poco più di tre diametri fra l' altezza e la grossezza delle colonne delle navate. Esempi di colonne così tozze e pesanti non si hanno che nei tempj greci dell' epoca arcaica, in Francia in alcuni edifizi sacri del periodo romanzo secondario, ed in Italia in chiese di stile Lombardo-primitivo.

La poca altezza delle arcate che non raggiunge la larghezza della loro apertura.

La nessuna elevazione esterna della navata di mezzo sulle laterali, dipendente dalla copertura del tetto a due sole falde.

La mancanza di finestre nella nave di mezzo restando l' interno illuminato dalle finestre dei muri esterni delle navate laterali, e forse da quelle che esistevano nelle absidi.

Digitized by Google

Sono caratteri speciali della decorazione:

La poca altezza dei capitelli in confronto del diametro dei loro fusti. Capitelli simili per così fatta limitazione si veggono nel Ciborio di S. Eleucadio in S. Appolinare in Classe presso Ravenna (806-816).

La varietà che si riscontra nella composizione dei detti capitelli, che dai tipi classici imbastarditi e degenerati delle prime basiliche cristiane del IV e V secolo discendono a capitelli, che presentano motivi ornamentali di stile lombardo o romanico dell'XI e XII secolo.

L'assenza di ogni essere animato nella composizione degli stessi capitelli, che ricordino gli animali mansueti e pacifici dell'arte cristiana primitiva, oppure i fantastici e feroci delle composizioni lombarde posteriori al mille. La mancanza delle due accennate specie di esseri animati limita ai secoli VIII e IX il periodo al quale quei capitelli si possono attribuire.

Serve pure a limitare il detto periodo la costante presenza nella loro composizione di foglie di palmizi, di cui nella Basilica Africana di Henchir-Zirara, del VI secolo si ha l'esempio più antico, (1) mentre non si hanno esempi di applicazione di quelle foglie oltre il secolo X in chiese di stile Italo-bisantino in Italia e Romanzo-primitivo in Francia dell'epoca dei Merovingi. Capitelli che ricordano invece motivi ornamentali congeneri a quelli di Rocca S. Maria si trovano abbastanza diffusi in edifizi dell'VIII e IX secolo.

Nelle costruzioni sotterranee della Chiesa Abbaziale di Nonantola — secolo VIII — si veggono capitelli che arieggiano per fattura e disegno ad alcuni di quelli di Rocca; anche frammenti di capitelli che risalgono alla fondazione del Monastero di Fanano (750) presentano presso a poco gli stessi caratteri di somiglianza.

---

(1) G. B. De Rossi, *La Basilica di Henchir-Zirara nella Numidia fra Tebessa e Costantina.*

Digitized by Google

Avanzi di amboni e plutei del vecchio Duomo di Modena, — fine secolo VII — presentano non dubbie relazioni ornamentali col palmizio che forma la caratteristica dominante dei capitelli di Rocca (1).

La Basilica Stefaniana di Bologna ci offre anch'essa esempi di ornamenti negli abachi di alcuni de' suoi capitelli, che riproducono in parte il pensiero decorativo e la composizione che prevale negli ornati della vecchia Pieve. Intrecciature simili alle scolpite in uno degli abachi dei capitelli riprodotti riscontrasi pure nell'altare di Pemnone a Cividale nel Friuli (706-717) (2).

S. Salvatore e la Rotonda di Brescia nelle loro cripte — fine secolo VIII — ci presentano elementi decorativi che hanno molta attinenza per fattura e disegno colla composizione ornamentale dei capitelli di Rocca.

In Francia, nella Chiesa di S. Stefano d'Auxerre, e più specialmente nella cripta di S. Eutrope de Saint, ed in Italia nella Chiesa di S. Secondo di Cortazzone d'Asti, si hanno colonne, che pel limitato rapporto fra il diametro e l'altezza, sono forse le sole che offrono esempi simili a quelle delle navate di Rocca S. Maria.

In Germania la Chiesa di S. Giuliano di Hoctchst, sul Meno, ci presenta il tipo di una basilica, attribuita ai tempi di Carlo Magno, nella quale per la semplicità della sua decorazione e per la sua struttura organica si riscontra molta attinenza colla interessante Pieve dell'Appennino Modenese.

Nel portico od atrio della chiesa di Lorsch (3) sulla destra del Reno, costruzione anch'essa del regno di Carlo Magno, ed opera probabilmente di artisti italiani, (4) si veggono capitelli ed ornati sufficientemente corretti, e lavorati con abbastanza

---

(1) P. Bortolotti. *Di un antico ambone modenese.* Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Vol I, Serie II.

(2) De Dartaine. *Etude sur l' architecture Lombarde.*

(3) Gailhabaud, *Monuments ancienes et modernes.* — E. Vétaul, *Charle Magne.*

(4) Merzario, *I Maestri Comacini.*

Digitized by Google

finezza, che come quelli di Rocca S. Maria valgono a dimostrare che il pensiero di riprodurre tipi della degenerata ed imbastardita architettura romana! prevalse tanto in Italia che in Francia ed in Germania fra la fine dell' VIII ed il principio del IX secolo.

VIII. La pianta, la struttura organica e l' ornamentazione della Chiesa di Rocca S. Maria presentano i caratteri più salienti delle chiese dell' alto medio evo di forma basilicale. La origine neo-latina dei primi secoli dell' era cristiana resta completamente esclusa, come escluso resta pure che essa possa essere opera posteriore al 1038.

Le condizioni del cristianesimo, divulgatosi in Modena nella prima metà del secolo IV, non furono certamente nel suo inizio così floride da far credere che a qualche ora di viaggio dalla città potessero sorgere edifizi sacri dell' importanza della nostra chiesa. Lo stato miserando descrittoci per Modena da S. Ambrogio nella fine del secolo IV, e le successive condizioni della città rovinata dalle acque e disertata dai Barbari nei secoli VI e VII, da costringere i Modenesi a ricercare sul principio dell' VIII in una nuova città una meno desolata e più salubre residenza, escludono anche questo ultimo periodo come un periodo possibile nel quale la Chiesa Modenese potesse pensare ad erigere importanti edifici sacri.

La protezione accordata dai Longobardi ai Vescovi di Modena, i privilegi e le concessioni confermate e largite ai medesimi da Carlo Magno e suoi successori, posero la chiesa da essi governata in tali condizioni di potenza e floridezza da permettere ad uno de' suoi vescovi — Leodoino — di fortificare circa nel 893 la vecchia città nella quale i Modenesi fecero ritorno. Al periodo che dalla costruzione di Cittanova nel 728 arriva alla riedificazione di Modena nel 893 crediamo che le induzioni e congetture storiche consiglino di assegnare la costruzione della Pieve di Rocca. Nè sul principio, nè sulla fine di quel periodo, riteniamo possa essere avvenuta la accennata costruzione, per le gravi cure alle quali popolo e clero dovevano attendere.

Digitized by Google

Assai probabilmente, dopo molti anni dalla edificazione di Cittanova, ossia sulla fine dell' VIII secolo, saranno sorte le antiche chiese dell'Appennino Modenese, fra le quali un primo posto, pei possedimenti che i Vescovi avevano in quei luoghi, doveva spettare alla Pieve di Rocca che sappiamo estendeva la sua giurisdizione su di un numero ragguardevole di chiese parrocchiali e cappelle regolarmente ufficiate.

Che la medesima sia opera anteriore al 1038, la cessione fattane dal Vescovo Viberto al Marchese Bonifazio III riportata dal Muratori, ne offre un argomento irrecusabile.

Che la chiesa indicata nell' anzidetta cessione sia la stessa che tutt' ora esiste, basta il semplice esame della sua struttura e della composizione dei suoi capitelli per convincersene.

Sebbene, per la disposizione della pianta, la limitata altezza delle arcate delle navi, la maggior larghezza della più prossima di esse all' arco trionfale e l'aspetto eccessivamente tozzo delle sue colonne, ricordi con tutti questi particolari la chiesa di S. Secondo di Cortazzone d' Asti, costruzione di stile lombardo del principio dell' XI secolo, non si può però mettere in dubbio la priorità di Rocca S. Maria in confronto di S. Secondo per la composizione a palmizi dei capitelli di Rocca in confronto di quella con animali fantastici del periodo lombardo che si veggono nei capitelli della nominata chiesa di Cortazzone (1).

Le condizioni di stabilità della vecchia Pieve, costrutta a regola d' arte su di una roccia incrollabile, non si saprebbero desiderare migliori.

Le recenti costruzioni addossate all'abside superstite ed al fianco settentrionale, che pure sarebbe decoroso togliere di mezzo, possono però rimanere senza alcun danno dell' edifizio.

La riduzione, delle attuali aperture rettangolari di porte e finestre, alla loro primitiva forma a pieno centro e la ricostru-

---

(1) A. Mella, *S. Secondo di Cortazzone d' Asti.* Atti della Società di Archeologia e Belle Arti di Torino, Vol. I.

Digitized by Google

zione degli absidi laterali, sono lavori che possono essere ritardati od anche non eseguiti, se si crederà di limitarsi alla semplice conservazione di quanto rimane della vecchia Pieve.

Il togliere l' intonaco e l' imbianchitura, che ricoprono tutto l' interno della chiesa non esclusi i capitelli, sarebbe opera assai commendevole.

Dalla ripulitura di tutto l'interno si avrebbero ulteriori prove della esistenza delle due absidi laterali e della limitazione della altezza della nave di mezzo, che non emergeva esternamente sulle laterali, essendo coperta la vecchia Pieve da due sole e non interrotte falde di tetto. Anche le iscrizioni che si vedevano sui muri prima dei ristauri del 1750 ed i disegni in forma di *grafiti* dei sott' archi degli archivolti, coperti ora dalla imbianchitura, rivedrebbero la luce fornendo nuovi argomenti per meglio precisare il carattere e l' epoca di costruzione dell' interessante monumento.

Per queste ragioni, e per tutte quelle considerazioni che si sono esposte sia rispetto al periodo storico che alle vicende dell'arte a partire dallo stile neo-latino dei primi secoli dell' era cristiana al lombardo o romanico dopo il mille nel Modenese, si ritiene che la chiesa di Rocca S. Maria sia una costruzione della fine dell' VIII o del principio del IX secolo informata ai caratteri delle costruzioni Pre-lombarde od Italo-bisantine (1) delle quali nella cripta della chiesa Abbaziale di Nonantola ed in alcuni frammenti decorativi del vecchio Duomo di Modena, preesistente all' attuale, si hanno avanzi abbastanza significativi.

Maggio, 1895.

V. Maestri.

---

(1) R. Cattaneo, *L' architettura in Italia dal secolo VI al mille circa.*

Digitized by Google

Digitized by Google

La Pieve di Rocca S.ª Maria

Fig.ª 1.ª

Interno

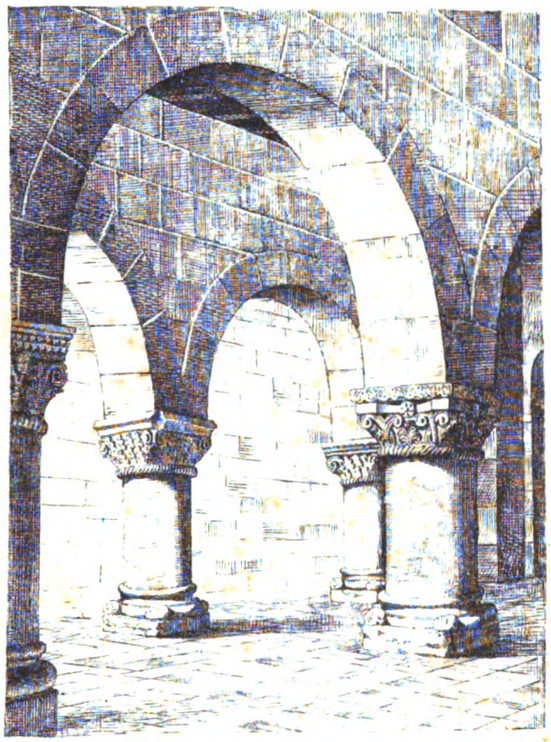


Fig.ª 3.ª

Sezione Trasversale

Rapp.° 7.mm½ p M.

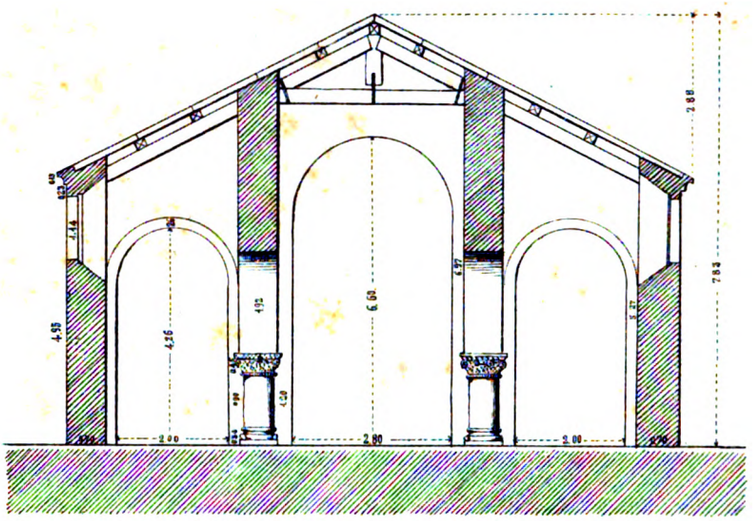
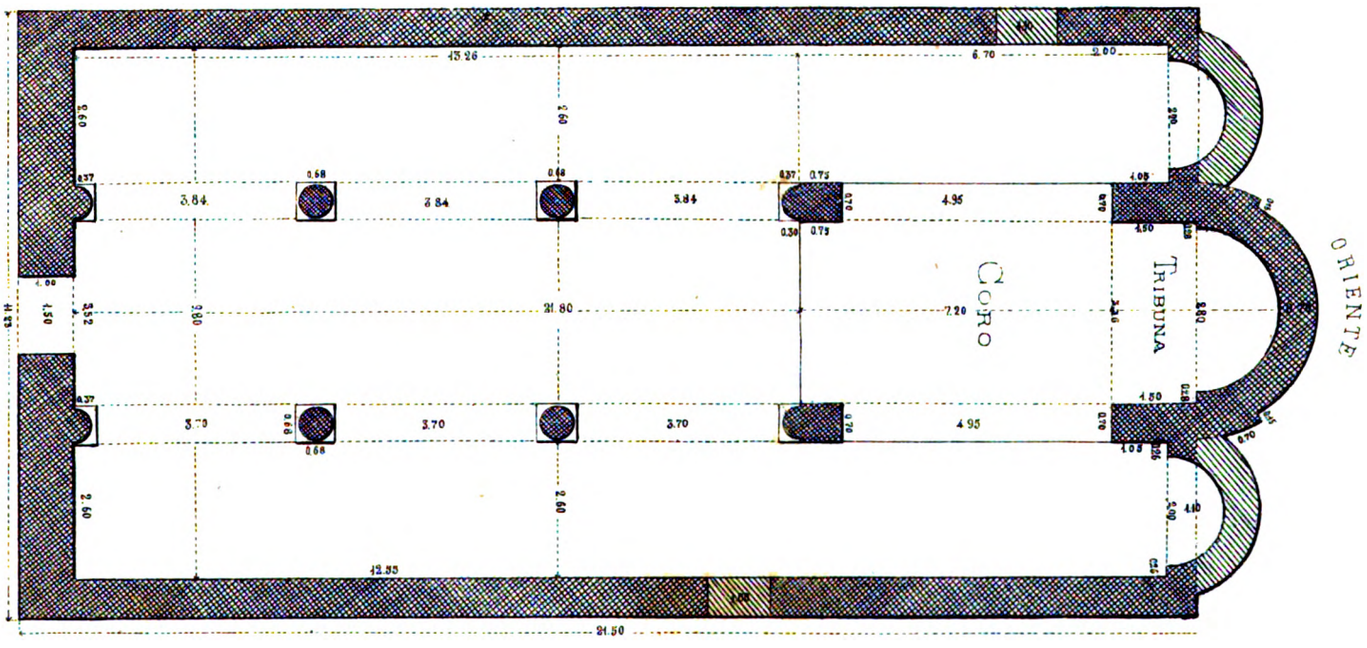


Fig.ª 2.ª

Pianta



Lit. G Pizzolotti-Modena

Rapp.° 7.mm½ per M.

Gustavo Zagni dis.e

Digitized by Google

Digitized by Google

La Pieve di Rocca S.ª Maria

Fig.ª 5.ª

Basi delle Colonne

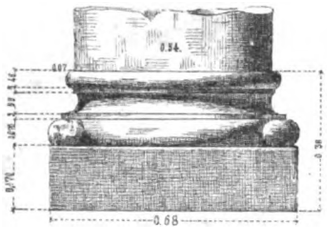


Fig.ª 6.ª

Cornice di Coronamento

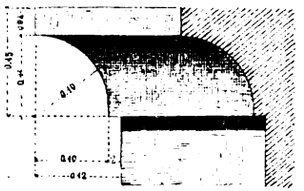


Fig.ª 7.ª

Particolari di una Finestra

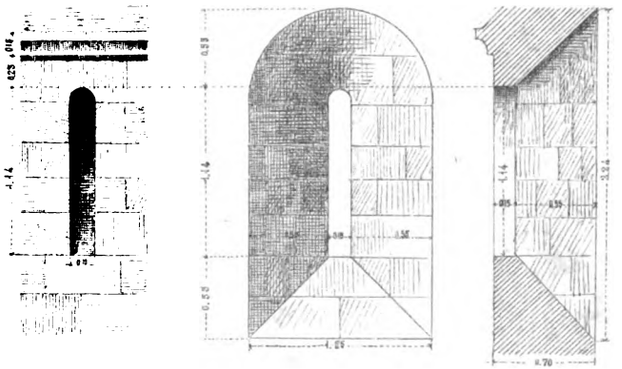
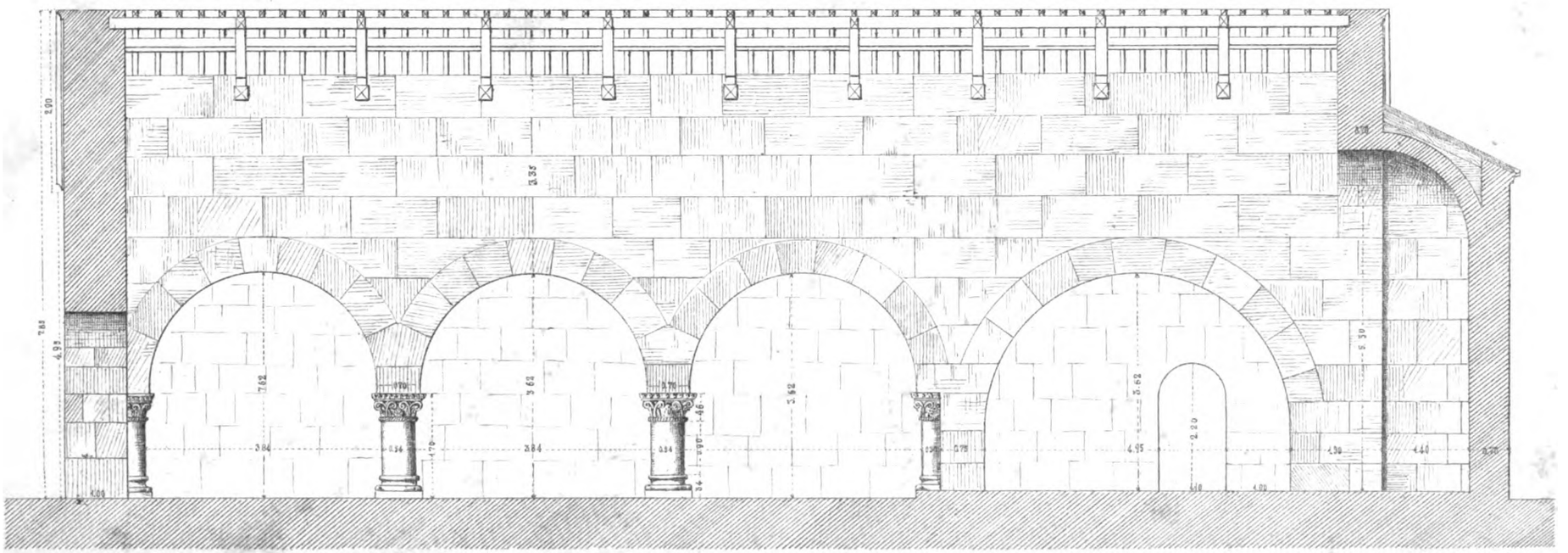


Fig.ª 4.ª

Sezione Longitudinale



Lit. G. Pizzolotti - Modena

Gustavo Zagni dis.

Digitized by Google

Digitized by Google

La Pieve di Rocca S.ª Maria

Fig.ª 8.ª

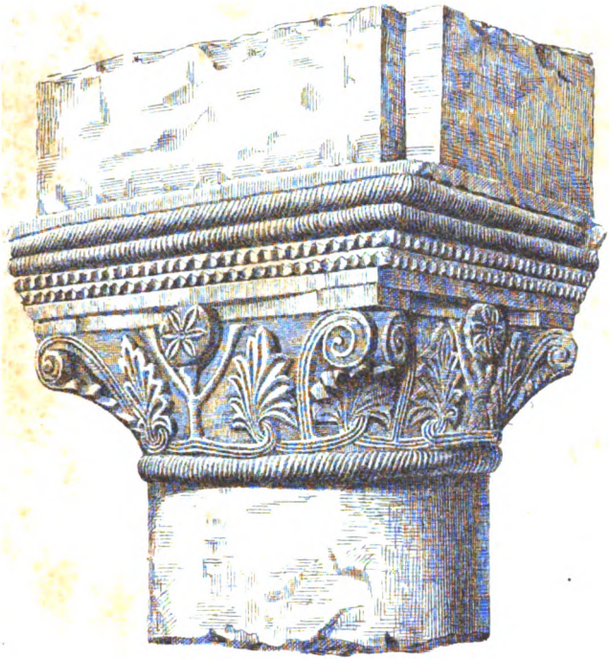
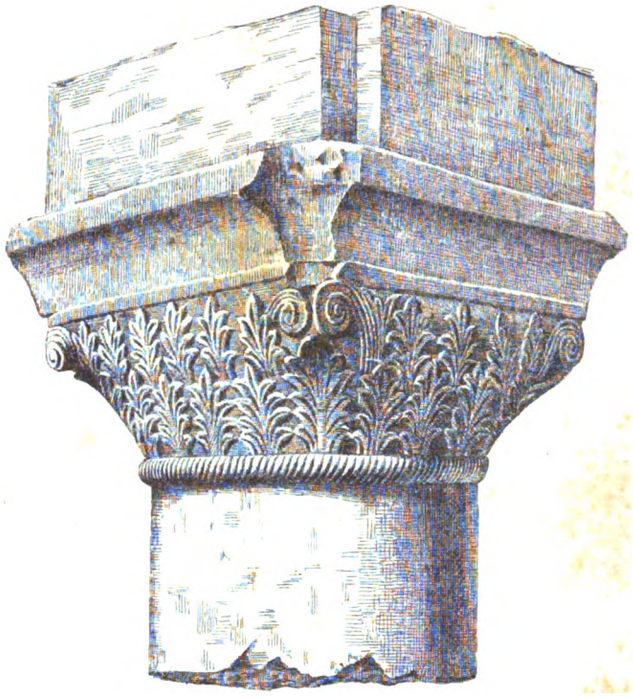


Fig.ª 9.ª



Capitelli e Colonne

Fig.ª 10.ª

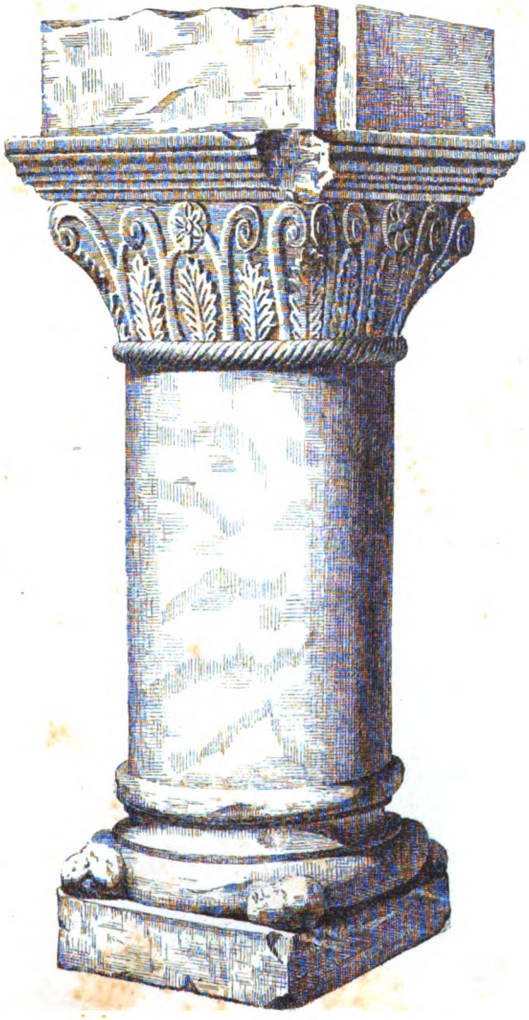
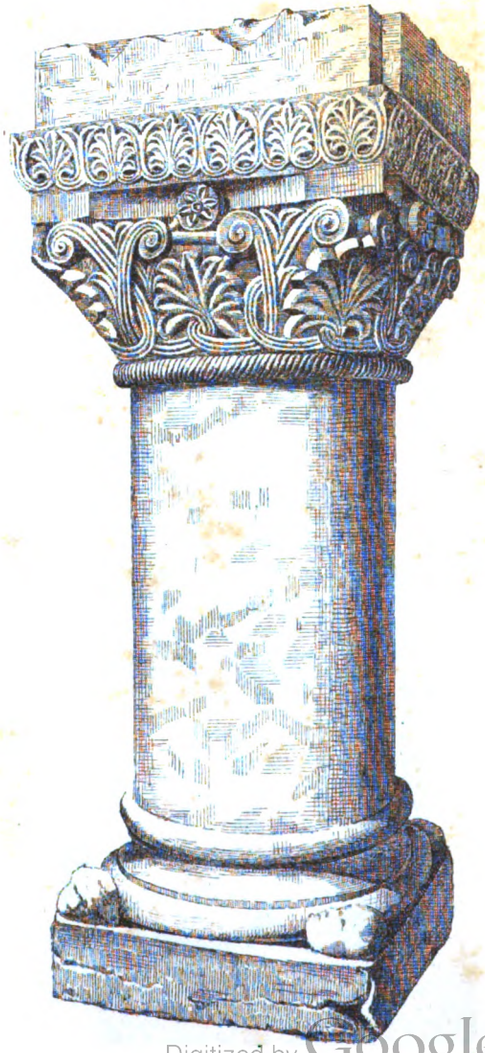


Fig.ª 11.ª



Lit. G. Pizzolotti-Modena

Digitized by Google

Gustavo Zagni dis.

Digitized by Google

La Pieve di Rocca S.ª Maria

Fig.ª 12.ª

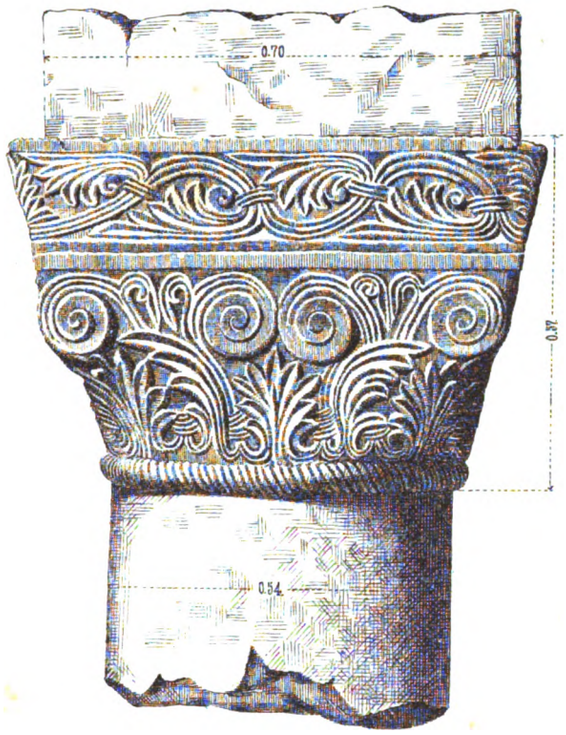


Fig.ª 13.ª

Capitelli delle Semi-Colonne

Fig.ª 14.ª

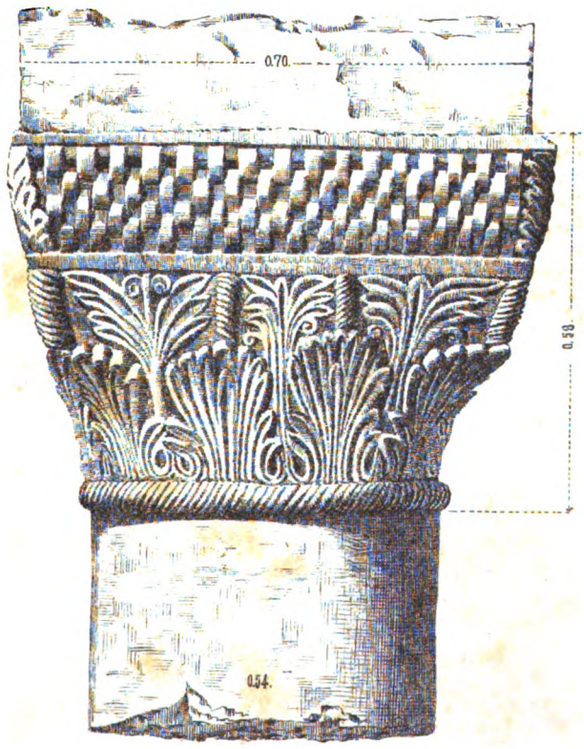
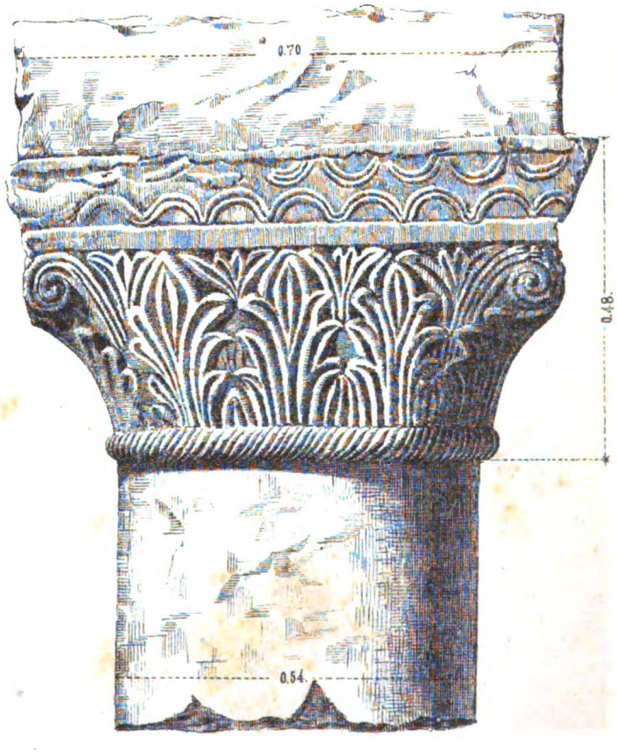


Fig.ª 15.ª



Lit. G. Pizzolotti - Modena

Digitized by Google

Gustavo Cagni dis.t

Digitized by Google

SINCRONO DOCUMENTO

INTORNO AL METODO PER SUONARE

IL " PHAGOTUS " D'AFRANIO

LETTERA (*)

AL SIGNOR CARLO-VITTORIO MAHILLON.

Sigg. Colleghi !

Avanti di dare communicazione di quanto scrissi al Direttore del Museo strumentale di Bruxelles sul *documento risguardante il modo di suonare il* phagotus d'AFRANIO, da me, per caso avventuroso, rinvenuto nel nostro Archivio di Stato, devo premettere alcune brevi spiegazioni.

Circa nel fine del XV°, o nel principio del XVI° secolo, AFRANIO dei conti d'ALBONESE di Pavìa, canonico in Ferrara, immaginò un nuovo e non mai visto singolare organo musicale, che volle chiamare *phagotus.* Così diceva il nipote suo TESÈO-AMBROGIO averlo chiamato dal gr: *phago* (*còmedo* lat.) per la compreensione di tutte le molteplici voci degli strumenti che riassumeva e quasi assorbiva, altrimenti però supponendo lo stesso poter anche provenire da *phagus* (faggio)

(*) Ragioni della lettera al Direttore del Museo strumentale del Conservatorio di musica di Bruxelles, comunicata nella Seduta della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti (Sezione d'Arti) di Modena la sera del 27 aprile 1895.

Digitized by Google

del qual legno, oltre il *bosso*, soleva Afranio costruire que' suoi strumenti, non mancando il dotto nipote d' aggiugnervi altre supposizioni, dettategli dalla sua scienza linguistica e filologica, che qui non monta annoverare.

Premessa dunque la data approssimativa dell' ingegnosissima invenzione d'Afranio e le accennate particolarità della nomenclatura, dirò che la monografia su quest' istrumento musicale da me pubblicata in Milano nel 1881 (*) ebbe origine da una discussione avuta in un circolo di musicofili, da un de' quali, venutosi a discorrere del *fagotto* dell' orchestre odierne, udii, con meraviglia, asseverare che codesta denominazione provenisse dal cognome dell' inventore, come, con una probabile cantonata, si vociferò riguardo alla *spinetta* dal *Becher*, che la suppose così battezzata dal nome d' un fabbricatore di simili strumenti crùstici, chiamato *Spinetti* (**).

Quell' asserto mi condusse a studiare la questione, raccogliendo all' uopo tutto ciò che si conosceva intorno alla storia dell' odierno *fagotto,* detto in francese *basson.*

È perciò che fu creata la mia monografia dal titolo " *Il phagotus d'* Afranio „ la quale, con correzioni, può leggersi riprodotta ne' *Corollarii*, posti in fine delle note ai " *Fabbricatori di strumenti armonici* „ già pubblicata nel Vol. II, Serie II delle nostre *Memorie* (Sezione Arti) nel 1884, che, *in estratto*, portano il complicato nome di *Nomocheliurgografia.*

Ma quanta non fu la mia sorpresa, quando un bel dì, nel 1893, rovistando antiche carte dell'Archivio di Stato locale, (***) m' incontrai in uno sconosciuto documento cartaceo del 1565, nel quale un *anonimo* descriveva partitamente il modo di suonare il misterioso strumento

---

(*) Cfr. il giornale « *La musica sacra* » già diretto in Milano da D. Guerrino Amelli. al presente monaco Cassinese.

(**) Vedasi la mia *Nomocheliurgografia* a pag. 210 — Modena, Società Tipografica, 1884.

(***) R. Archivio di Stato in Modena — (*arch. per materia*) — musica — Cappella Ducale — (*titolo* « Sopra il Fagoto ») V. in fine prima del testo italiano — Tav. II.

Digitized by Google

d'Afranio, dichiarandolo cosa a lui communicata da Teséo-Ambrogio Albonese, nipote dell' inventore !

Più bel complemento alla mia monografia del 1881 non poteva al certo trovarsi, e perciò pensai di far fare le fotografie del ms: e, trascrivendo il prezioso incognito metodo, parteciparle, con lettera esplicativa, al Direttore del Museo strumentale di Bruxelles il *Sig. Vittorio-Carlo Mahillon*, mio collega in studii congeneri, e noto a tutta Europa per l' abilità sua portentosa in riprodurre antichi strumenti di musica, notificando in tal guisa l' interessante trovata all' intero mondo musicale.

Questo bravo artista, cui già da due anni comunicai la mia felice scoperta, volle, durante il suo viaggio fatto due mesi fa in Italia, venire a prenderne conoscenza in Modena, prima che la mia lettera fosse pubblicata. Ei ne rimase piacevolmente sorpreso, e, congratulandosi dell' inaspettato evento, mi confortò a far sì che, vinte le tardanze della riproduzione fotografica, ne dessi per la stampa cognizione al più presto.

Ora, presentando le eliotipie con che illustro la lettera al *Mahillon*, una delle quali raffigura lo strumento Afraniense, l' altra un saggio soltanto del ms: dell' anonimo contemporaneo, scoperto nel 1893, mi onoro di dar lettura del mio scritto ai Sigg. Colleghi, confidando nella loro paziente e benevola attenzione.

L-F. Valdrighi.

Digitized by Google

Caro Signore e collega stim.mo!

Dopo la pubblicazione del mio opuscolo sul *phagotus* d'Afranio degli Albonesi, comparso (1) a Milano nel 1881, e ristampato (2) in Modena nel 1884, io Le scrivevo, nel mese di febbraio, del 1893, sovra l'inaspettata e felice scoperta, fatta nel nostro R. Archivio di Stato, come appropriatissima a portar nuova luce sull'interessante vecchia questione della storia dell'invenzione del canonico Pavese, di già (come la sana critica con me dovette dichiarare) confermata al genere organario ed otriculare.

La mia trovata porta un documento *sincrono* sulla maniera di suonare quel curioso ed originalissimo strumento.

Il disegno di questo, di già calcografato nell'opera stampata di Teséo degli Albonesi di lui nipote (3), più tardi riprodotto

(1) Valdrighi L-F. — *Musurgiana*, N. 4 — Milano — Calcografia Musica Sacra, 1891.

(2) Idem — *Nomocheliurgografia* (Corollarii, pag. 245, 1884) — Modena — Società Tipografica.

(3) Thesei-Ambrosii Albonesii — *Introductio in Chaldaicam linguam*, etc. — Papiae — 1539 — in 4.°

Digitized by Google

dal musicografo nostro contemporaneo Wasielewski (1) e da me ultimamente in questa lettera (2), per certo avente qualche imperfezione o almeno delle inesattezze o mancanze di particolari, non spiega troppo chiaramente la minuziosa descrizione che il Teséo appronta a' lettori nel suo originalissimo libro, nel quale egli seppe, con uno strano pretesto linguistico, introdurre, il ricordo, le lodi e l' anatomia dell' invenzione dello zio.

Allorchè io Le diedi notizia di ciò che avevo rinvenuto e scoperto, Ella mi scrisse che in grazia di questo manoscritto si sarebbe ben tosto arrivati ad aver ragione del mistero che tuttora nascondeva la maniera di suonare quel bizzarro strumento musicale, e spiegare la vera natura della sua fabbricazione.

Ma sapendo che niuno meglio di Lei potrebbe analizzare le particolarità di codesta secolare curiosità organaria, credetti necessario fare eliotipicamente riprodurre il rarissimo manoscritto dell'Archivio nostro di Stato, sul quale potrà da vero maestro, qual' Ella è, trarne quelle deduzioni, ch' altri non saprebbe.

Ella sà pertanto, quant' io, che la nomenclatura di *phagotus* data dall'Albonese al suo strumento, ha per lunghissimo tempo tenuto in errore il mondo musicale, col dar luogo a credere che il fagotto (*basson* fr:) attuale dell' orchestre fosse perciò originato dallo strumento organario d'Afranio.

Al presente, frattanto, il ms: eliotipato toglierà al pubblico tutti i dubbii insorti a questo riguardo, e il pubblico vedrà che l' origine dell' attuale fagotto devesi assegnare a tutt' altra famiglia di strumenti musicali a fiato, come la *dolzaìna* ed i *bassanelli,* invece di crederlo provenienza del nostro vecchio strumento, otriculare come le cornamuse, ed organario per la sua costruzione.

---

(1) WASIELEWSKI — *Geschichte der instrumental musik der XVI Iahrundert.*
(2) Tav. I.

Digitized by Google

Al principio del 16° secolo si era in un momento storico della liuteria, nel quale l' arte organaria toccava il suo apogeo, e il nostro buon canonico avrà probabilmente tentato di dare una prova mirabolante del suo fine inventivo talento, in codesto genere, costruendone un piccolo campione portatile.

Nato in Pavia, sul finire del decimoquinto secolo, fu inviato, in tenera età, alla splendida corte di Ferrara, ove fu mantenuto ed educato in guisa che suo nipote diceva " ch' ei conosceva l' ore appropriate a presentarsi ai Principi Estensi, e che tutto ciò che loro piaceva gli era noto perfettamente „ (1).

Appassionato con ardore alla musica egli inventò il suo *phagotus,* così nomandolo forse dal gr: *phago,* perchè assorbendo la quintessenza di tutte le voci degli strumenti musicali, restituiva codeste, in vario modo, all' aria, all' ambiente ed all' udito degli ascoltanti.

Il primo saggio di questo strumento otriculare fu costruito in Serbia: avea dodici voci soltanto, ma facilissime a disaccordarsi, il che Teséo designa colla frase latina " *nec stare loco nòverant.* „

Col magistero d' operai Serbi e Tedeschi cercò pertanto Afranio di correggere questo difetto; ma indignato della inutilità de' loro tentativi, lasciò in Serbia lo strumento e ritornossene in Italia.

Intanto nella presa di Belgrado (2), durante il saccheggio fu involato il *phagotus,* e (strana combinazione!) riportato in Italia, ritornò nelle mani del suo inventore a Ferrara, il quale

---

(1) Ecco ciò che TESEO diceva allo zio nel suo libro sulle lingue orientali — « *Tu, qui a teneris annis in illorum Principum* (gli Estensi) *aula nutritus es — et horas adeundi, et quæ ad eorum faciant stomachum optime cognovisti, etc.* » TESEO voleva presentare la sua — *Introductio in Chaldaicam linguam* — in occasione d' un maritaggio del Duca (1539). ma non l' osò (?)

(2) Belgrado, capitale della Serbia, chiave del Regno d' Ungheria, fu presa nel 1521 da Solimano II, e sembra che questa città, non ostante la capitolazione che ne seguì, abbia sofferto uno spietato saccheggio. Possono dunque i tentativi del canonico assegnarsi a qualche po' di tempo prima di questa data.

Digitized by Google

associatosi a Gio: Battista Ravilio, distinto meccanico di questa città piena di bravi artisti, riuscì a perfezionarlo.

Il canonico n' era inoltre suonatore abilissimo, e si sà che assai volontieri ascoltavanlo come tale nei Concerti *grossi* e *piccoli* della Corte, e in quelli di privati. Si conosce, difatto, che nel 1532 ei suonò il suo diletto strumento, durante un convito dato dal Duca Alfonso di Ferrara nella città di Mantova (1).

Teseo-Ambrogio degli Albonesi, suo nipote, orientalista di grido, nato a Pavia come lo zio, pubblicò, nel 1530, la sua opera — *Introductio in Chaldaicam linguam* — nella quale si vede la famosa incisione in legno della invenzione dello zio canonico.

Il ms: portante il modo di suonare il *phagotus* Afraniense e ch' io ho scoperto fra la congerie delle rarità storiche del nostro Archivio di Stato in Modena, non è che una *copia dell' epoca* d' un anonimo ch' avevalo ricevuto dal nominato Teseo-Ambrogio degli Albonesi segnato colla data del 1565, più dunque d' un trecent' anni fa e sincrono all' invenzione.

Ben considerato lo stile di quel metodo di suonare il *phagotus* d'Afranio, scritto nel 1565, che, a documento, pubblico in fine, stile ripieno di dizioni della nostra lingua volgare *scritta* com' era in quel tempo quasi in tutta l' alta Italia, io glielo presento tradotto in francese, perchè Ella possa averne conoscenza con maggiore facilità come segue.

---

(1) Cfr. *Il novo libro da Banchetti, nel qual s' insegna il modo di apparecchiar tavole. etc, composto per Mess: Cristoforo de Messisbugo, etc.*, in Venetia M . DC . XXI — Appresso Gherardo Imberti, in 8.° a pag. 21.

« *Cena domesticamente fatta in Mantoua dall' Ill^mo ed Ecclmo Signor Duca* « *Alfonso, Duca di Ferrara al Gran Comandatore di Leone, et a Mons: Granuela,* « *secretarii della Maestà Cesarea in Mantoua, alla quale furono sua Ecclma Si-* « *gnorìa et essi secretarii, et altri Gentilhuomini in numero di 18 a tauola, e fu* « *questo alli 21 di Nouembre 1532.* » — *Nella prima vivanda, musica di violini et uoci. — 2.ª vivanda, musica d' una lira. — 3.ª vivanda, trombe e cornetti. — 5.ª vivanda (tra la 5.ª e la 6.ª)* « E quivi sonò il Rev.^do Mess: AFFRANIO (sic) il suo fagotto. — *6.ª vivanda, musica di uoci. — A cena finita, divinissima musica di diversi stromenti.* »

Digitized by Google

(*foris*) « **Sopra il Fagoto** »

* * *

(*recto*)

— 1565 —

" *Le chev:* Thésée *m' a fait présent d' un de ses* phagoti, *et il m' a appris comment doivent être (employées?) ces deux cannes, à condition que je ne le fisse connaître à personne, mais seulement à ses fils.*

Canne (ou tuyau) du phagotus de la main droite par b carré.

Fa — *Le petit trou seul bouché par derrière, et encore on bouche ce petit trou qui est proche et qui n' est pas dans l' autre phaghotus.*

La — *Toute la main vide, c' est à dire ouverte.*

Sol — *Le petit trou et le demi petit trou par devant.*

Fa — *Le petit trou et la touche au dessus et le dernier petit trou comme dans la flute* relicto medio.

Mi — *Le petit trou et la touche en haut et le petit trou après par devant.*

Re — *Le petit trou et la touche en haut, le 1^er^, 2^me^ et 3^me^ pleins (bouchés).*

Ut — *Tous bouchés avec la clef au-dessous, qui n' y est pas, c' est à dire qu' elle manque.*

Digitized by Google

(à côté) *La touche (ou la clef?) puis que il* (?) *est large, avance il est demiton.*

Le petit tube du gros tuyau est plus grand que celui du tuyau de gauche, qui est droit: mais le tube, en cuivre, du gros tuyau est recourbé, comme celui de la douçaine.

La main gauche par b carré *bene etiam in alio fagoto* (sic).

Fa — *S' il y avait une autre touche ce serait la quatrième seulement de même que dans l'autre* fagoto.
La — *Troisième touche de* laiton (?)
Sol — *Touche du milieu de* laiton (?) *seule.*
Fa — *Première touche en* laiton (?) *seule.*
Mi — *Tout à vide, ouvert* (?)
Re — *Touche du milieu fermée, et par derrière fermée avec le pouce.*
Ut — *Touches 1re et 3me bouchées avec celle de derrière bouchée de même, à la maniere de la flûte.*

« — *Touches 1re et 2me fermées, avec celle de derrière fermée.*
« — *Touches 1re, 2me et 3me fermées avec celle de derrière fermée.*
« — *Touches 1re, 2me, 3me, 4me, avec celle de derrière fermées.*

(de côté) *La main droite 2me touche* (?) *fermée, celle de derrière est unison.*

..... *Il* (?) *bouchait avec le charnu des articulations des doigts ..... bouchait (le chev.) avec le milieu du doigt en jouant*

Digitized by Google

quelque peu (?) *mais pour faire taire son* fagoto *de la main droite on prendra la touche en dehors qui est tout près du tuyau* inferius, *et de la main gauche on ôtera le même en face, de manière qu' elles soient réduites au silence; de cette façon si, avec le soufflet on donne le vent à la vessie et l' on n' obtient pas de sonorité.*

Les deuxièmes touches au bas et en dehors, bouchent avec certaines autres, mais celles de laiton (?) *ouvrent.*

Lorsqu' une voix est discordante, on l' aide avec le doigt, en ouvrant la touche bien peu, si elle est basse.

Quelque fois on s' aide avec la cire, en bouchant (avec celle-ci) le trou, ou en l' enlevant: les tubes doivent être en argent, parce-qu' ils donnent un son agréable: néanmoins j' ai vu jouer une canne en bois, qui portait dedans un petit tube de l' embouchure (pareillement) en bois, et j' ai vu jouer un fagoto, *de trois gros tuyaux, à la façon de la cornemuse, l' un desquels donnait une seule voix. Quant aux deux autres il (le chev.?) touchait les trous des deux mains, et donnait le vent avec le soufflet,* (gibecière) *c' est à dire la* vessie.

On lie le soufflet au bras droit: il est fourni d' un poids en plomb, et avec une courroie on l' adapte a mi-corps: l' autre, on l' applîque à la gibecière ou sac qui reçoit l' insufflation au moyen d' un gros tube qu' on introduit ..... derrière le fagoto *et avec discrétion, on lui donne le vent. On obtient deux voix ..... et avec l' autre* (?) *on peut chanter, ou obtenir une seule voix, comme celle d' une* douçaine *à jouer dans les concerts.*

En voulant donner le vent au fagoto *on doit boucher avec le pouce les petits trous de son derrière qui sont au-dessus, autrement le* fagoto *brairait.*

Digitized by Google

* * *

(*verso*)

Le soufflet doit s' adapter au bras droit, la courroie liée au même bras, et l' autre courroie autour du corps. La petite corde harmonique de luth doit être appliquée sous le fagoto *pour le tenir bien solide et droit au dessus de la braguette.* „

---

* * *

Fètis (1) ha scritto che questo strumento era molto più antico del tempo d'Afranio e che in Anversa se ne vedeva uno presso il Consolato delle città Anseatiche.

Weckerlin (2) il quale laconicamente riassunse la descrizione dell' istrumento del celebre inventore, e ch' ei spiritosamente dice somigliare a un piccolo *castello* riproduce due tavole incise in legno che ne danno l' immagine copiandole dal libro del nipote d'Afranio (edizione di Pavia del 1539 di già citata) — ed aggiunge (cosa interessante per la storia di questo strumento molte volte secolare) che un Tedesco al cominciare del presente secolo uno ne suonava assai somigliante, ma perfezionato, e che faceva sentire a pagamento a' borghesi delle città ch' ei visitava. Aveva egli de' mantici sotto le braccia come nell' antico, e (cosa originale!) nelle tasche posteriori del suo

---

(1) Fètis — *Biographie etc.*, Tom. 1er — Paris — Didot — 1860.

(2) Weckerlin J. B. — *Bibliotheque du Conserv: Nat:* etc. — *Catalogue bibliographique, etc.* — Paris — F. Didot et C.° — Impr: de l' Institut — 1885.

Digitized by Google

abito teneva de' tubi d' ottone colle estremità a *campana* come ne' corni o trombe, che davano suoni gravi e potenti, a volontà.

Io sò che quasi tutte queste belle cose Le sono cognitissime: ma se, per caso, questa mia lettera venisse a cadere sotto gli occhi di qualche profano ai nostri comuni studii ho ritenuto indispensabile di ripeterne molte di già pubblicate nella mia *Musurgiana* N. 4 (1881) per spiegare particolarmente il ms: anonimo del 1565, ultimamente da me scoperto, e così poterne apprezzare l' importanza e gustarlo come appetitosa trovata.

Questo ms: difatti deve dar la chiave e svelare il mistero del modo di suonare uno strumento musicale, che dopo la scomparsa dal mondo dei signori Albonesi è stato ridotto al silenzio, posto in dimenticanza, e pe' dilettanti per molti anni fu appena relegato nella tradizione.

Aggradisca, signore e caro collega, i miei sentimenti di stima e d' amicizia i più distinti, mentre mi segno a Lei

Modena il 1.° dì del 1895.

Dev.mo
L-F. Valdrighi.

Digitized by Google

Testo (*) in lingua volgare Italiana, del documento sincrono intorno al modo di suonare il PHAGOTUS del canonico Afranio degli Albonesi, riprodotto in grandezza naturale dalla copia del tempo (1565) d'un anonimo, esistente nel R. Archivio di Stato di Modena — (*arch. per materia*) — **MUSICA** — *Cappella Ducale* — **scoperto dall'autore della lettera al Direttore del Museo strumentale di Bruxelles, soggetto della presente pubblicazione.**

(*foris*) **« Sopra il Fagoto. »**

* * *

(*recto*)

— 1565 —

Il Cau.r Theseo mi donò uno de' suoi *fagoti*, et m'insegnò come van queste due cane, con questo, che non insegnassi ad altri, ma sì bene a' suoi figli.

(*) Tav. II.

Digitized by Google

« Cana del fagoto da man drita per b quadro. »

* * *

(on lit ce qui suive sur une portèe a 5 lignes)

Fa — il buseto solo pien de drieto et anco si stropa q^{el} buco ch'è appresso ch' in l'altro *fagoto* non è.
La — tutta la man uuota ouero aperta.
Sol — il buseto et il mezo buso dinanti.
Fa — il buseto ed il tasto sù, et l'ultimo buseto *ut in flauto, relicto medio.*
Mi — il buseto et tasto sù, et buso appresso dinanti.
Re — il buseto et tasto sù p°, 2° et 3° pieni.
Ut — tutti stropati con chiaue sotto, che non vi è, cioè manca.

* * *

(*de côtè à gauche*) " il tasto poi ch' è largo havanza è semitono. „

* * *

Il piuello della Cana grossa è più grande del piuello della Cana sinistra, la qual sta drita, ma il Canon di ramo della Càna grossa è storto a simile della *dolzaìna.*

* * *

« La man sinistra per b quadro bñ ēt (*bene etiam*) *in alio fagoto.* »

* * *

Fa — S'el ui fosse un altro tasto serìa il 4° solo com' è in l' altro *fagoto.*

Digitized by Google

La — tasto 3° solo, d' otton.
Sol — tasto megio d' otton solo.
Fa — tasto 1° otton, solo.
Mi — uuoto tutto.
Re — tasto megio buso, et drieto buso col dito grosso.
Ut — tasto 1° et 3° busi, col drieto buso medemo al modo del flauto.

« — tasto 1° et 2° busi, col drieto buso.
« — tasti 1°, 2° et 3° busi con drieto buso.
« — tasti 1°, 2°, 3°, 4° con dietro buso.

* * *

(*de côtè, à gauche*) " la man drita 2° buso, e drieto, è unisono. „

* * *

(*de même à côtè, à gauche*) " stropava con li pomelli delle zonture
„ delle dita a .... stropava, il Cau.r, col mezzo del dito in dire
„ alcun tanto, ma per far tacere il suo fagoto da man dritta si
„ torrà il tasto in fora ch' è appresso la Cana *inferius*, et dalla
„ man sinistra si torrà il simedesimo a l' inscontro, sì che ta-
„ ciono; chè si dà il fiato alla visica, senza suono con mantice. „

* * *

Li 2i tasti a basso in fora stropano con certi altri, ma li de otton àpreno. — Quando una uoce discorda lo aìta col dito aprendo il tasto poco, se l' è bassa. — Alcuna uolta si aìta con la cera stropando il buco ouero leuandola: li piuelli uoglion esser d' argento chè fanno buona uoce: nientedimeno ho uisto sonare una Cana di legno; eraui dentro il piuello de Cana nel rameto, et ho uisto sonare un fagoto di tre Canòni al modo della piua, una de (*lle*) quali facea quella uoce una sola solita. Le altre due toccaua li busi con le due mani et dava il uento col mantice, et uentriera ouer uesica.

Digitized by Google

* * *

(*de même à côtè, à gauche*) " Volendo dar il fiato al *fagoto* bisogna „ stropar col dito grosso li buseti di dreto che son di sopra, „ altrimenti il *fagoto* ragnerìa. „

* * *

Si aliga il mantice al brazzo drito: esso mantice ha un piombo pesa et con una coregia si cinge atorno il corpo, al megio, e l' altra lascia la uentriera che riceve il uento, la quale ha un canon che si fica del .... (*sic*) di drieto dal *fagoto* et se dà il uento con discretione. Si fa due uoci et l' altra si può cantare ouero si può fare una uoce sola come s' el fosse una *dolzaìna* da sonare nelli concerti.

* * *

(*verso*) (*)

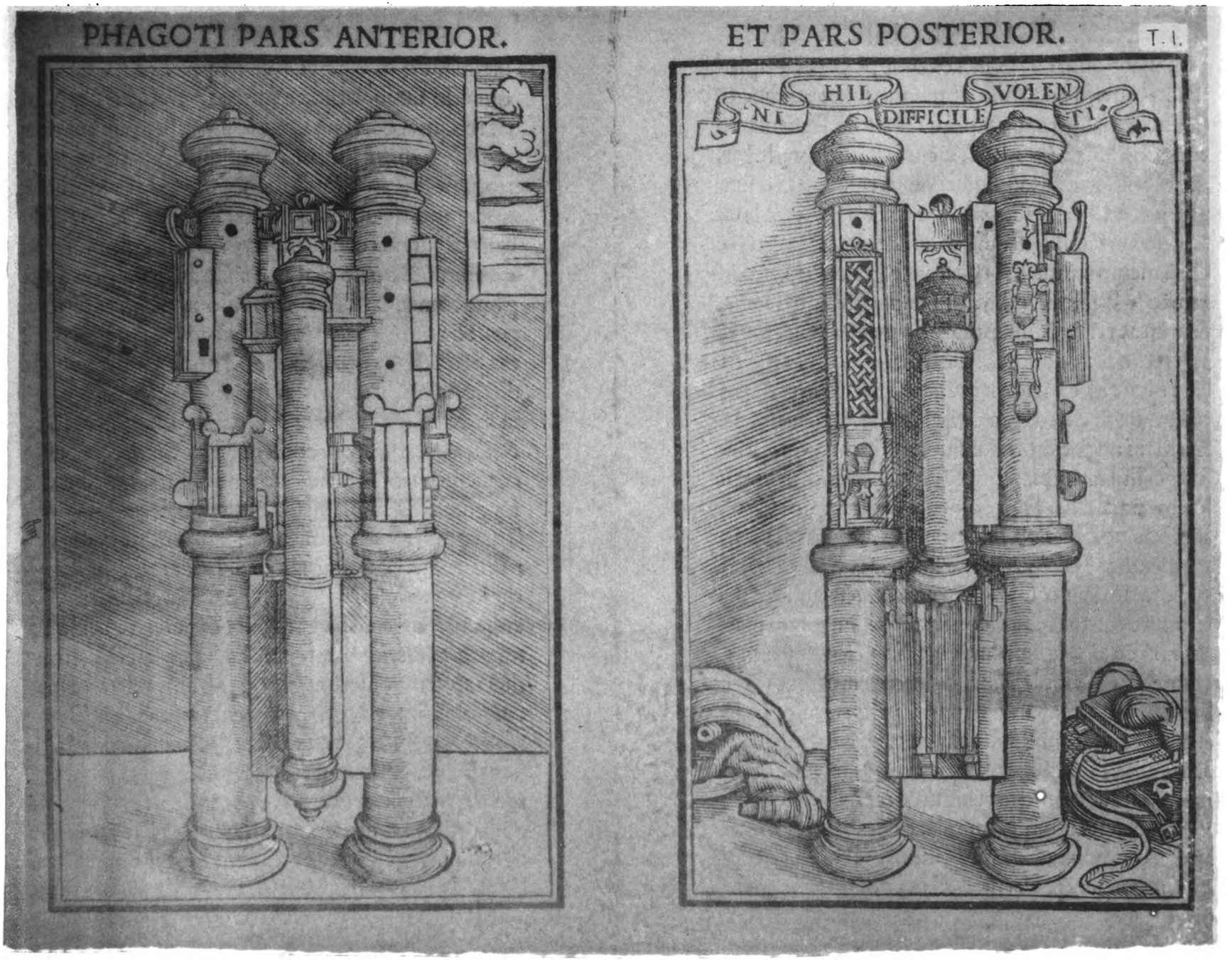
Il mantice va al brazzo destro, legato a quella la coregia, et con l' altra coregia atorno al corpo.

La cordina da liuto ua al *fagoto* di sotto per tenerlo saldo drito di sopra la bragessa.

L-F. VALDRIGHI.

(*) Nel rimanente del foglio si veggono delineate le note della divisione del tempo, all' antica, cominciando dalla *Maxima — Lunga — Breve, etc.* (colle rispettive *pause*) sino allo *Scròpulo* (scrupolo), ora in disuso. Sonvi poi molte cifre numeriche, delle quali lascio a' competenti la spiegazione.

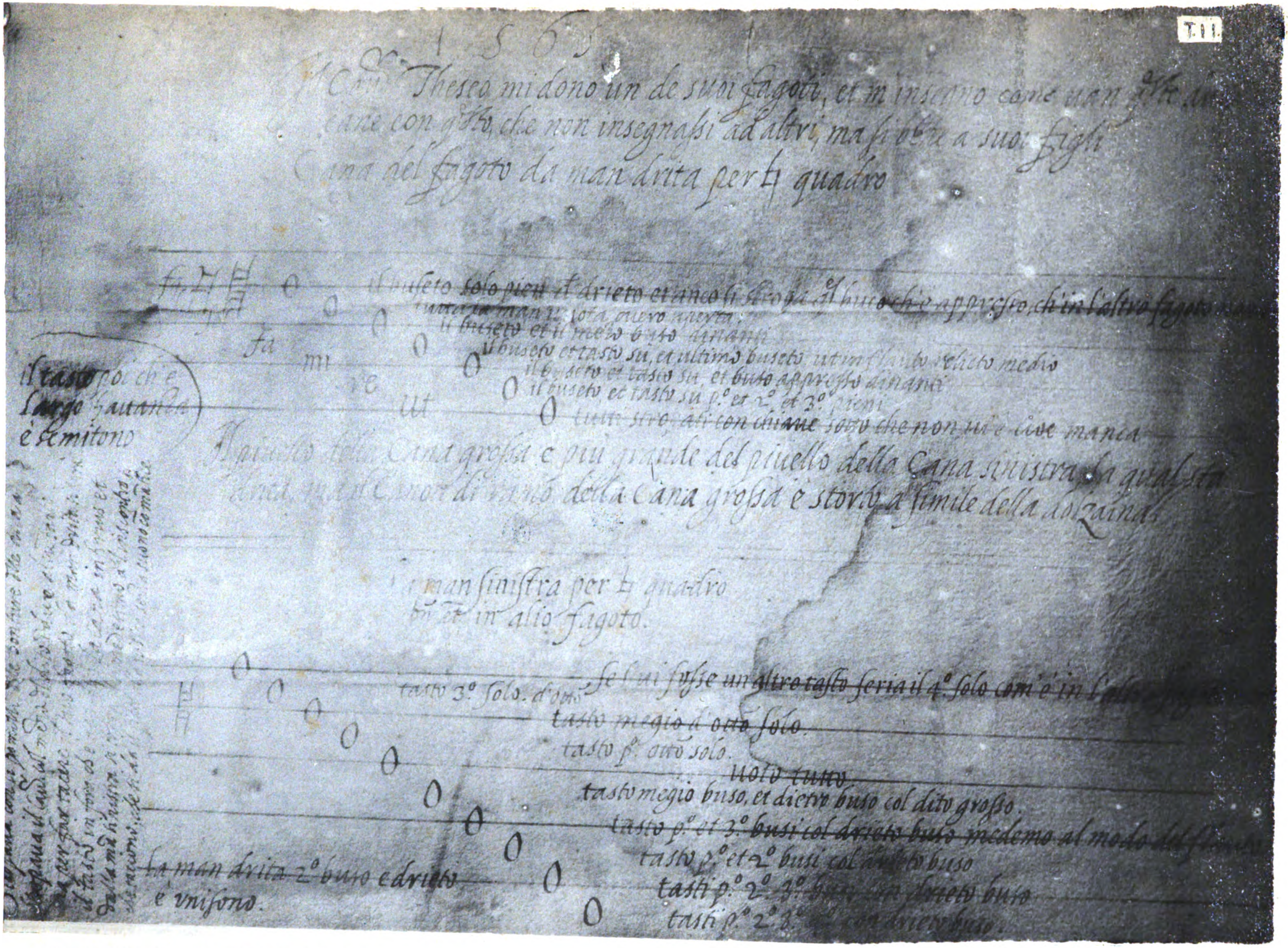
Digitized by Google



Dall' « Introductio in Chaldaicam linguam » di Tesèo - Ambrogio Albonesi — Pavia, 1539.

Digitized by Google

Digitized by Google


T. II

1565

M. Theseo mi donò un de suoi fagotti, et m'insegnò come usar ... cane con ... che non insegnassi ad altri, ma solo a suoi figli

Cana del fagoto da man drita per ♮ quadro

il buseto solo pieno et drieto et anco li ... buso che è appresso ... in l'altro fagoto

fa mi re ut

il tasto ... è semitono

Il piuello della Cana grossa è più grande del piuello della Cana sinistra la qual sta ... della Cana grossa e storto a simile della dolzana.

La man sinistra per ♮ quadro ... in altro fagoto.

tasto 3° solo d'oro. se ci fusse un altro tasto seria il 4° solo com'è in l'altro fagoto

tasto megio d'oro solo.

tasto p.° oro solo.

voto tutto.

tasto megio buso, et drieto buso col dito grosso.

tasto p.° et 3.° busi col drieto buso medemo al modo del ...

tasto p.° et 2.° busi col drieto buso

tasti p.° 2.° 3.° busi con drieto buso

tasti p.° 2.° 3.° ... con drieto buso.

La man drita 2.° buso e drieto e unisono.

VALDRIGHI (L.-F.) — Documento sul "PHAGOTUS" d'Afranio.

Digitized by Google

DI ALCUNE COSTRUZIONI MEDIOEVALI

DELL' APPENNINO MODENESE

III.

LA PIEVE DI RENNO

I. Sulla sponda sinistra dello Scoltenna, poco lungi dalla sua confluenza col Leo, trovasi l'antica Pieve di Renno. Si arriva ad essa percorrendo un tratto della strada delle Cave del Serpentino che staccasi dalla Via Nazionale Giardini per la Toscana di fronte al castello di Montecuccolo.

La vecchia Pieve, posta a mezzo costa di una china di poggi che degradendo a foggia di terrazze raggiungono al basso le acque dello Scoltenna, vedesi contornata da caseggiati e vecchi castelli che rilevano l'importanza del territorio un tempo soggetto alla sua giurisdizione.

Di alcuni Castelli esistenti dal tempo dell' invasione dei Longobardi fino alla caduta del loro dominio (568-774) se ne trova menzione in antichi documenti del principio dell' VIII secolo.

Si hanno prove non dubbie della assimilazione degli invasori coll'elemento Romano sopravissuto nel nostro Appennino ad ogni sorta di fortunose vicende.

La conversione al cristianesimo dei Modenesi fino dallo scorcio del IV secolo lascia credere che presso ai Castelli —

Digitized by Google

munite residenze degli antichi e nuovi Signori dei luoghi — sorgessero edifici sacri di notevole importanza, informati in parte allo stile architettonico del periodo romano della decadenza.

II. Che Renno avesse una specie di preminenza su quella parte del Frignano che trovavasi a monte del Castello Feroniano, esistente fino dai tempi degli ultimi Re Longobardi, risulta da un documento dell' 890, pubblicato dal Tiraboschi (1).

In Renno, Suppone III, Conte di Brescia prima, poscia di Modena, investito della qualifica di Messo Imperiale, tenne un placito nel 931 per decidere intorno alla proprietà controversa di alcuni beni fra i quali diversi casali in confine col *ferroniense castro* (2).

Sulla posizione di questo castello, che il Tiraboschi vorrebbe presso Marano, vicino alla confluenza del Rio Torto col Panaro, il Parenti con copia d' argomenti, pubblicati in nota al *Dizionario Topografico storico degli Stati Estensi* dello stesso Tiraboschi, dimostra che il detto Castello, del quale si hanno memorie che arrivano fino al X secolo, era posto ove si trova ora l' attuale lago, o palude di Pavullo.

Fra gli argomenti che il Parenti porta a sostegno della sua opinione, accenna ad un brano di un documento del 826 riportato dal Tiraboschi, nel quale si nomina per due volte una *basilica sanctae mariae in Tortilianum in fine castro feroniense sito cum casis etc. omnibus rebus ad eamdem basilicam pertinentibus.*

Una dissertazione a stampa, pubblicata in Bologna sul principio del secolo, contraddice l'opinione del Parenti, confermando, che il Castello Feroniano esisteva presso a poco nella località indicata dal Tiraboschi (3).

---

(1) Tiraboschi, *Storia dell' Augusta Badia di S. Silvestro di Nonantola.*

(2) Malaguzzi-Valeri, *I Supponidi.*

(3) Crespellani D.ⁿ Domenico, *Il Castello Feroniano.*

Digitized by Google

Se con quella dissertazione si prova che in Zinzano, vicino a Vignola, esisteva una Città o Castello designato dalla tradizione col nome di Verdoia o Verdeta, di cui si veggono avanzi insignificanti; la controversia ciò non pertanto rimane aperta risultando maggiori le probabilità che militano in favore della versione del Parenti. Anzi in appoggio a quest'ultima versione si legge in un documento dell'archivio capitolare di Parma dell'agosto 1069, rettificato dal Tiraboschi questa data: *Actum in monte et castro S. Vincentii intus Curte Gothefredi Duci coram advocato suo Rotecheris et coram episcopo Motinensi locus paule feronianensi pago territorio Motinensi.*

Risulterebbe dunque che il Monte e Castello di S. Vincenzo, i di cui avanzi si veggono tutt'ora presso a Monteobizzo vicino a Pavullo, era un luogo appartenente al pago Feroniano vicino all'attuale lago o palude di Pavullo capoluogo del Frignano (1).

Benchè non corrisponda la indicazione del luogo — Tortiliano — nominato nel codice dell'826; nè l'attuale titolo della Basilica — S. Maria — essendo la vecchia pieve posta in Renno dedicata a S. Giovanni Battista, tuttavia considerato che essa si trovava a confine col Castello Feroniano, la di cui posizione rettificata dal Parenti risulterebbe poco lungi dalla Borgata di Renno, non si ritiene improbabile che la Basilica nominata nell'anzidetto codice possa essere colla Pieve di Renno una stessa cosa.

Nelle vecchie carte accade spesso di vedere indicati edifici sacri coi nomi diversi di *Basilica, Plebis, Ecclesia* e *Cappella* applicandoli a seconda dell'importanza dell'edifizio al quale si riferiscono (2).

Non pare quindi supponibile che ove sorge ora in Tortiliano, presso Vignola, una semplice cappella vi potesse essere un

---

(1) Tiraboschi, *Opera citata.*

(2) Du Cange, *Glossarium mediae et infimae latinitatis.*

Digitized by Google

edifizio sacro talmente importante da meritare di essere designato col pomposo nome di Basilica, senza che di esso sia rimasta adeguata memoria, tanto per il valore architettonico che per la giurisdizione ecclesiastica.

Alla vecchia Pieve di Renno, che fino dai più remoti tempi aveva i suoi canonici e che nel catalogo delle Chiese Modenesi del XV secolo è nominata con più di trenta chiese ad essa soggette; non mancavano titoli per meritare di essere distinta col nome di Basilica dalle altre Chiese della montagna, delle quali alla fine del secolo passato godeva fama di essere la più magnifica (1).

---

(1) Dal catalogo delle chiese modenesi del 1463 (N. 1227 dei manoscritti Campori che si conservano nella Biblioteca Estense) si rileva che appartenevano alla *Plebis de Renno videlicet — Sancti Baptista — Cappelle ipsius Plebis:*

Ecclesia Sancti Vincentii de Palude — antica parrocchia presso il lago di Pavullo — *Ecclesia de Montecucolo* — Chiesa entro il Castello del luogo, dichiarata parrocchia nel 1672 — *Ecclesia Sancte Mariae de Renno* — Chiesa della Borgata di Podrisio presso Monzone distrutta nel XVI secolo — *Ecclesia de Montorsio* — Antica parrocchia nominata in documenti del 1183 — *Ecclesia de Ugiano* — Chiesa di Upiano presso Gaiato — *Ecclesia de Gajato* — Parrocchia nominata in documenti del 1126 — *Ecclesia Sancti Michealis de Renno* — Chiesa unita pel governo delle anime alla Camatta — *Ecclesia de Val de Sassis* — Chiesa presso il ponte omonimo sullo Scoltenna — *Eclesia de Valgastalde* — Chiesa nominata in documenti del 1269 — *Ecclesia de Vesallo* — Antica chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia Sancti Laurentii de Cassina* — Oratorio con Ospedale esistente presso Roncoscaglia fondato nel 1302 — *Sancte Mariae de Sasso Guidano* — Antica chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia de ronco Bouaria* — Chiesa presso il Castellaro distrutta sulla fine del secolo passato — *Ecclesia de ronco Scayo* — Chiesa parrocchiale fondata nel 1406 — *Ecclesia de Bergono* — Chiesa nella Parrocchia di Olina — *Ecclesia de Ruinella* — Chiesa con cimitero: forse parrocchiale — *Ecclesia de Acquaria* — Antica chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia de Varezana* — Di questa chiesa sulla fine dello scorso secolo si vedevano i ruderi presso Acquaria — *Ecclesia de Montecastagnaro* — Fu unita per la cura d'anime nel XV secolo a Montecreto — *Ecclesia de Montecreto* — Antica chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia de Magreguaria* — Chiesa unita per la cura d'anime nel 1449 alla parrocchia di Montecreto — *Ecclesia de Stretaria* — Chiesa presso il ponte omonimo sullo Scoltenna — *Ecclesia de Valdalbaro* — Chiesa unita per la cura d'anime dopo il 1578 alla Parrocchia di Vaglio — *Ecclesia de Vajo* — Antica chiesa parrocchiale del luogo

Digitized by Google

Le Basiliche *aedes sacre* dei primi tempi cristiani si distinsero, anche nei secoli che succedettero, dopo la pace della chiesa, per la loro superiorità e magnificenza. Coll'andare del tempo si designarono pure col nome di Basiliche quelle chiese che per lo splendore e per la grandezza gareggiavano colle antiche, sebbene non ne conservassero la disposizione icnografica, ma che però restavano tuttavia ragguardevoli per la preminenza che dava loro l'estesa giurisdizione plebanale o qualche altra importante circostanza di venerazione speciale (1).

Non dovevano essere molti nell'epoca Carolingica gli edifizi sacri a confine col Castello Feroniano che potessero aspirare ad essere distinti col nome di Basilica. La Pieve di Renno non aveva rivali per magnificenza in tutto il Frignano, lo dice la tradizione, lo confermano descrizioni di documenti autentici. La Pieve di Rocca S. Maria, l'edificio più importante del basso Appennino Modenese che per valore artistico è superiore a Pieve di Renno, è indicata, nel contratto di permuta del 1038 fra il Vescovo Viberto ed il Marchese Bonifacio III di Toscana, col nome di *Ecclesia* (2). Sembrerebbe dunque che fino dal IX secolo esistesse in Renno un edificio sacro da meritare di essere designato col nome di Basilica.

-- *Ecclesia de Trezaria* — Chiesa nominata in documenti del XI secolo della quale si è perduta ogni traccia — *Ecclesia de domo Scarpulorum* — Forse una cappella od oratorio pubblico dei Signori del luogo — *Ecclesia de Ronco novo* — Chiesa che più non esiste — *Ecclesia de Carpineta* — A questa chiesa corrisponde forse quella di Frassineto che non è indicata nel catalogo delle figliali di Renno — *Ecclesia de Montecenere* — Antica chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia de Varola* — Chiesa senza cura d'anime nella parrocchia di Monzone — *Ecclesia Sancta Maria Longana* — Chiesa nella anzidetta parrocchia costrutta nel 1414 — *Ecclesia de Monzone* — Chiesa parrocchiale del luogo — *Ecclesia de Monte* — Antica Parrocchia, ora chiesa senza cura d'anime in Monte Obizzo vicino a Pavullo consacrata nel 1468 — *Ecclesia de Monte* — Corrisponde ora alla chiesa di S. Pietro in Campomiliaccio fra Spezzano e Fiorano.

(1) Ciampini, *Vetera Monimenta Romae.* — Moroni, *Dizionario di erudizione Storico-Ecclesiastica.* — Martigny, *Dictionaire des antiquités chretiennes.*

(2) Muratori, *Antiquitates Italicae Medii aevi.*

Digitized by Google

Come sorgesse sulle sponde dello Scoltenna un monumento così importante non è facile poterlo argomentare. La comunione dei fedeli, aiutata forse dai Vescovi di Modena, nell' epoca nella quale le condizioni della chiesa da essi governata erano assai floride, e dai Signori dei circostanti Castelli, avrà potuto erigere, sull' unica comunicazione che nell' alto medio evo si aveva colla Toscana, un importante edifizio che soddisfacesse alle esigenze del culto di un centro ragguardevole di popolazione.

Accrescevano l' importanza della giurisdizione ecclesiastica della Basilica o Pieve di Renno i rapporti che essa aveva con quelle potenti famiglie dei luoghi che emersero al cadere della dominazione Longobarda ai tempi dei Carlovingi.

Il monastero di Fanano, costrutto nell' VIII secolo sulla via che conduce alla Toscana, non molto distante da Renno, avrà forse servito d' esempio per ideare più ardite costruzioni sacre di quelle fin allora eseguite.

Lo splendore e l' influenza del governo di Carlo Magno, che a mezzo dei *Missi dominici* si faceva sentire anche nelle più lontane provincie, non è improbabile, per certe relazioni di stile che passano fra la Pieve di Renno ed alcune costruzioni dell' epoca dei Merovingi in Francia, non abbiano in qualche modo contribuito a dare forma e stile ad un monumento del quale per alcuni caratteri particolari si crede non se ne abbia altro esempio in Italia (1).

Il placito tenuto dal Conte Suppone in Renno nel 931, dimostra abbastanza come fino da quell' epoca Renno fosse uno dei luoghi più importanti del Frignano.

Quella importanza non diminuì in progresso di tempo. Renno ebbe in seguito i suoi Capitani, specie di Magistrati del luogo, che per officio corrispondevano ai Consoli delle città del piano.

(1) A. Vetault. *Charlemagne.*

Digitized by Google

Nel 1273 i Capitani di Renno giurarono in Modena di seguire il partito dei Guelfi. Il Marchese Nicolò III di Ferrara confermò per titolo feudale nel 1394 il governo di Renno a Gasparo da Montecuccolo, ai discendenti del quale rimase fino alla fine del secolo passato. Renno è ora una delle frazioni del Comune di Pavullo nella Provincia di Modena.

III. È coperta la vecchia Pieve da un tetto a due falde con retrostante abside dalla parte di levante e due cappelle sporgenti a guisa di absidi nei fianchi di mezzodì e settentrione. Addossate a quest' ultimo fianco si vedono una torre ed altre costruzioni recenti.

La sua pianta è rettangolare, larga metri 13,90, lunga metri 24,40 (fig. 1). L' abside centrale di forma semi-circolare presenta un diametro interno di metri 5,40. Precede quest' abside una campata di metri 3,60, larga metri 5,70 che si congiunge col muro di levante della chiesa.

Due file di piedritti dividono l' area interna in tre navate composte per ciascuna fila di quattro uguali arcate, alte metri 4,97, larghe in media metri 5,05 (fig. 2 e 3).

La nave di mezzo è larga metri 6,30, le laterali metri 2,50. La cappella od abside di mezzodì internamente circolare con un diametro di metri 4,45 corrispondente alla terza arcata a partire dalla facciata principale, è all' esterno di forma poligonale. È essa pure preceduta da una campata di metri 2,55 che la congiunge col muro di mezzodì della pieve.

L' altra cappella od abside semi-circolare che vi sta di fronte, del diametro di metri 4,60, è direttamente connessa al muro senza la campata che precede le altre due absidi.

Le navate sono coperte da solai in legno, le absidi da volte in muratura.

L' interno della chiesa (fig. 4) è illuminato da ampie finestre esistenti nelle facciate e nell' abside principale. Ciascuna delle cappelle riceve luce da due piccole finestre a pieno centro con doppia strombatura.

Nel fondo delle navi secondarie vi sono due porte: quella

Digitized by Google

della navata di mezzodì mette all'aperto; l'altra alla torre. Nella facciata principale àvvi una sola porta.

Tutti i muri, di uguale spessore di centimetri 70 sono in tufo ed arenaria del luogo; fanno eccezione le cappelle la di cui muratura è in grossi ciottoli dello Scoltenna frammisti a qualche mattone.

Nell'esterno palesano l'antichità della Pieve l'apparecchio dei muri eseguito secondo le norme dell'opera romana *pseudo-isodoma* ed un tratto del loro zoccolo, sulla esistenza del quale fino dall'originaria costruzione del muro non si può avere alcun dubbio (fig. 5).

Le finestre delle cappelle (fig. 7) a doppia strombatura tuttochè antiche non appartengono all'epoca della costruzione primitiva della Pieve. Furono esse eseguite quando posteriormente si eressero le cappelle di cui fanno parte.

Nell'interno sono caratteristici e dimostrano l'antichità dell'edifizio i piedritti delle navate tanto isolati che addossati ai muri. Presentano essi tre distinti tipi.

Il primo tipo è dato da un pilastro a sezione ottagona con base e capitello uguali nella forma, costituiti da una tavoletta od abaco raccordata da piani inclinati colle faccie del fusto (fig. 9).

Degno di speciale considerazione è questo tipo, del quale non si ricordano altri esempi in Italia, sia per la forma che per l'uguaglianza fra la sua base ed il suo capitello.

In due delle faccie del medesimo si veggono due monogrammi di Cristo, foggiati a ruota, od in forma di croci monogramatiche, l'uno maggiore dell'altro.

Appartengono pure al descritto tipo di piedritti, sia per la forma ottagona del fusto che per la somiglianza dei capitelli, altri due piedritti che presentano un alto zoccolo, o plinto raccordato da piani inclinati colle faccie del rispettivo fusto (fig. 10).

Due pilastroni a sezione rettangolare, con cimasa semplicissima formata da un listello od abaco congiunto con piani inclinati alle faccie del fusto, presentano un altro tipo dei piedritti della Pieve di Renno (fig. 12).

Digitized by Google

Il terzo ed ultimo tipo è formato dalle semi-colonne, dell'ultima arcata, laterali all'arco trionfale (fig. 11). I capitelli di queste semi-colonne sono essenzialmente diversi da quelli degli altri due tipi; presentano essi presso a poco la forma di tronchi di cono rovesciati, terminati in alto da un abaco costituito da un semplice listello, da cui discende la superficie conica che va a congiungersi col fusto. Speciali basi attiche di limitata sporgenza stanno sotto ai detti fusti (fig. 8 e 11). Riproducono le medesime quel tipo comunissimo di basi del primo periodo dello stile lombardo, rese caratteristiche da quella appendice in forma di quarto di sfera che nasce dal toro inferiore a protezione dell'angolo del sottostante plinto. A guisa di zoccolo o cornice ricorre il profilo delle descritte basi per tutto il fondo delle navi secondarie, attualmente interrotto dai due usci che probabilmente non esistevano quando si fece lo zoccolo.

Nel fondo della nave laterale di sinistra esistono evidenti traccie di una grande apertura che lascia supporre l'esistenza di un' abside demolita in qualcuno dei ristauri subiti dalla vecchia Pieve.

Nella faccia di uno dei pilastroni in muratura della nave maggiore vedesi dalla parte della corsia di mezzo un dipinto del secolo XV.

Tutto il corpo della Chiesa è coperto da imbianchiture ed intonaco che non permettono rilevare l'apparecchio de' suoi muri nè la congiunzione dei pilastri e delle lesene, appartenenti ai disgraziati ristauri del secolo passato.

IV. Dall' esame tanto del complesso che delle singole parti della Chiesa di Renno, risulta evidentemente che si hanno nella medesima modificazioni, aggiunte e ristauri dovuti a tre distinte epoche.

Il tipo tutto proprio dei pilastri ottagoni delle navate, tanto per la forma delle basi e dei capitelli che dei fusti, come anche per la qualità del materiale ed altri segni caratteristici della loro antica origine, non lasciano alcun dubbio che essi non appartengono alla primitiva costruzione della Chiesa.

Digitized by Google

Le più recenti ed antiche modificazioni del restante monumento si trovano nel fondo delle navate secondarie. Se non bastasse la differenza essenziale che presenta il tipo delle semicolonne dell'ultima arcata in confronto di quello dei pilastri ottagoni delle navi, confermano questa ipotesi le traccie palesi della grande apertura che esisteva in uno di essi e la ricorrenza delle membrature delle basi che estendevansi a guisa di zoccolo per tutto il fondo delle navate secondarie, prima della loro interruzione dipendente dagli usci, che in epoca non molto lontana vi sono stati aperti (fig. 8).

Altre modificazioni posteriori a questo primo ristauro si ravvisano nei due pilastroni in mattoni delle navate, in uno dei quali si è detto esistere un dipinto del XV secolo. La diversità degli altri piedritti, sia per la forma che pel materiale, esclude assolutamente che siano come gli altri contemporanei all'originaria costruzione della Chiesa.

Anche la cappella a forma d'abside, connessa al fianco di mezzodì, è una aggiunta fatta in tempi posteriori alla prima costruzione. Lo dimostrano la diversità dei materiali impiegati nel muro — mattoni e ciottoli — esternamente poligonale che la circoscrive, e la mancanza di ogni collegamento coll'apparecchio del muro al quale la cappella stessa è connessa.

Nella medesima si trova chiuso da lapide il sepolcro dei Montecuccoli (1).

Non molto dopo deve essersi aggiunta la cappella che vi sta di fronte. Se per i materiali e per la forma delle finestre essa presenta caratteri analoghi a quelli dell'altra, sembra però che la forma circolare tanto interna che esterna del suo muro perimetrale ne escluda la contemporaneità. Non è presumibile che si fossero costrutte nello stesso tempo due cappelle l'una esternamente poligonale, l'altra semi-circolare.

---

(1) Fra i battezzati della Parrocchia di Renno figura, il celebre Maresciallo Montecuccoli nato nel vicino Castello di quella illustre famiglia, discendente dagli antichi Capitani del Frignano.

Digitized by Google

Da una epigrafe che si legge sopra la porta principale, si rileva che nel 1772 si ristaurò la maggior parte della facciata, aprendo nella medesima tre finestre, due laterali ed una soprastante alla porta.

In questa occasione si deve anche essere riformata l'abside principale. La freschezza dell'intonaco, la forma della cornice (fig. 6) e delle finestre, simili a quelle della facciata principale, non ne lasciano alcun dubbio.

L'abside maggiore, accompagnata da due laterali che prima di quella stava in suo luogo, doveva essere esternamente di forma poligonale.

L'ipotesi che dopo l'originaria costruzione della chiesa siasi modificato il fondo delle navate è confermata dalla presenza delle due semi-colonne dell'ultima arcata laterale all'arco di trionfo, tanto diverse nel loro tipo da quelle degli altri pilastri ottagoni delle navate. Non è supponibile che allo stesso architetto siasi presentato il concetto di due tipi di piedritti tanto diversi; possono ammettersi variazioni in uno stesso tipo, in una stessa serie di piedritti; non tipi sostanzialmente diversi come nelle navate della Pieve di Renno. Nella prima arcata, la più vicina alla facciata principale, stanno incassati nel muro della medesima una semi-colonna ed un semi-pilastro con capitelli dello stesso tipo dei pilastri ottagoni; il cambiamento radicale nel tipo dei piedritti si rileva solamente nelle due anzidette semi-colonne.

Colla ricostruzione del fondo delle navate, avvenuto probabilmente per necessità di ristauri, si saranno anche rifatte le absidi.

Le traccie dell'apertura arcuata, che si vedono nel fondo della navata di settentrione, dimostrano all'evidenza che ad essa andava annessa una abside.

La forma di questa abside, per analogia col tipo bisantino delle semi-colonne laterali all'arco di trionfo, doveva essere poligonale, essendo questo uno dei caratteri principali delle chiese bisantine dal VI all' VIII secolo.

Digitized by Google

La cappella Montecuccoli, posteriore alle surriferite modificazioni, costrutta a foggia d'abside con muro esternamente poligonale ci conferma in questo concetto, essendochè non è supponibile che si costruisse una abside poligonale in epoca nella quale non si ideavano che absidi di forma semi-circolare, senza che una ragione di imitazione od uniformità con altre absidi esistenti nello stesso edifizio non ne fosse il movente principale.

Di poco posteriore è l'altra cappella semi-circolare che stà di fronte a quella dei Montecuccoli. Anche per questa dovevano militare le stesse ragioni per dare ad essa la forma poligonale. La minore importanza delle sue dimensioni, la sua costruzione muraria con ciottoli mal disposti, dimostrano come l'opera volevasi alla meglio raffazzonare senza alcuna diligenza particolare.

Giustifica od almeno spiega anche un tale cambiamento la nessuna importanza di chi la faceva costruire, non essendosi ad essa legato alcun nome delle illustri famiglie del Frignano.

I due pilastroni in mattoni delle navate a sezione rettangolare, sia pel materiale che per altri caratteri, sono stati rifatti in epoca non molto remota.

Il dipinto della fine del XV secolo (fig. 12), che si vede in uno di essi, ci assicura però che la loro rinnovazione non può essere posteriore di quel secolo.

Ragioni di sicurezza avranno probabilmente consigliato di rinnovarli colle stesse dimensioni che avevano prima, essendochè se si fossero rifatti con misure diverse avrebbero portato una alterazione nella larghezza delle arcate che presentano anche adesso la stessa apertura di tutte le altre.

Appartengono dunque alla primitiva costruzione della Pieve i pilastri ottagoni delle navate ed i suoi muri perimetrali, ad eccezione della parte che riguarda il fondo delle navate medesime.

V. Fino dalla sua origine la Pieve di Renno presentò l'icnografia di una chiesa basilicale a tre navate, alle quali erano

Digitized by Google

connessi uno o tre absidi, non potendosi accertare che le absidi laterali sorgessero contemporaneamente a quella di mezzo.

La facciata principale non presenta altro d' interessante che l' antica *banchina* o zoccolo sagomato del quale lateralmente, dalla parte di settentrione, si vede un ben distinto profilo.

La sua altezza, in corrispondenza delle navate laterali ricorrente anche pei fianchi, è di metri 6,30, e nella sommità del frontispizio di metri 9,50 con un' altezza nei muri di divisione delle navi secondarie di metri 7,90.

Le arcate semi-circolari, di tozze proporzioni, non raggiungono nella loro altezza alla sommità dell' arco la larghezza che passa fra i piedritti sui quali esse si incurvano.

I pilastri ottagoni delle navate, del diametro di metri 0,60 sono alti poco più di quattro volte questa misura.

Lo spessore delle arcate è uguale al diametro dei pilastri, e l' aggetto dei capitelli di questi ultimi è in media di 6 centimetri.

La sola abside che esiste ora non si incurva immediatamente ove sono incassate le semi-colonne dell' ultima arcata, è essa preceduta, come si è già accennato, da due tratti di muro che collegati col suo muro semi-circolare costituiscono una specie di campata a solaio che sta dinanzi all' abside per le esigenze della celebrazione dei divini uffici.

Che questa campata, o presbitero, esistesse fino dalla primitiva costruzione non si può nè affermare nè escludere.

Solo però nel IX secolo si hanno esempi, come nella Basilica Ambrosiana e nella Chiesa d' Alliate in Brianza, di simili presbiteri che precedevano le absidi.

Se la supposizione di una prima modificazione nel fondo delle navate, avvenuta alcun tempo dopo la primitiva costruzione non è errata, è probabile che sulla fine del IX secolo, quando facevasi abbastanza comune l' uso de' presbiteri da porsi innanzi alle absidi, siasi pensato a provvedere quella della nostra Pieve di una simile giunta.

Nelle successive ricostruzioni cui fu assoggettata l' abside, l' ultima delle quali non risale oltre il 1772, si saranno rifatti

Digitized by Google

o conservati i muri laterali che presentemente formano il presbiterio.

Basta un semplice esame della pianta per rilevare che la Pieve di Renno, per la distribuzione e struttura delle sue navate, riproduce l' icnografia delle basiliche cristiane dell' VIII e IX secolo.

I caratteri delle costruzioni italo-bisantine di quel periodo prevalgono in tutti i suoi particolari.

La stessa abside principale doveva essere esternamente di forma poligona, come usavasi nelle chiese bizantine del secolo VI. Ci conferma in questo concetto il muro esternamente poligono della cappella Montecuccoli, molto presumibilmente modellato su quello dell' abside maggiore che preesisteva a quella cappella.

Anche nell' interno l' elemento bisantino si presenta in tutti i diversi tipi dei piedritti delle navate.

I capitelli dei pilastri ottagoni, nella loro forma, per noi del tutto originale, presentano tuttavia l' elemento bisantino. Questo elemento, con qualche somiglianza, lo troviamo nei capitelli di S. Maria di Capua — stile italo-bisantino — secolo X (fig. 15).

Le stesse cimase dei pilastroni, probabili riproduzioni di altri preesistenti, ricordano quelle di S. Maria di Grado del VI secolo (fig. 16) (1).

Nei capitelli delle semi-colonne, posteriori ai pilastri ottagoni, il carattere bisantino prende anche maggior sviluppo. Manca solo il caratteristico *pulvino* delle costruzioni proto-bisantine in Italia, per vedere riprodotti senza ornamenti i capitelli delle chiese Ravennate.

Se per la distribuzione interna delle navate si hanno molte chiese similmente disposte nelle loro parti organiche da poter istituire gli opportuni confronti, invece per la forma e composizione architettonica dei capitelli e delle basi dei suoi pilastri ottagoni, ci è d' uopo ricorrere al solo esempio che conosciamo,

(1) R. Cattaneo, *L' architettura in Italia dal secolo VI al mille circa.*

Digitized by Google

alla antica cripta di Saint-Avit d' Orleans in Francia (fig. 17 e 18) (1).

Apparteneva quella cripta ad una chiesa fatta erigere da Childeberto I — 511-558 — in circostanza di una vittoria da esso riportata contro i Visigoti.

Col trascorrere dei secoli, perduta ogni traccia della chiesa e della cripta, fu quest' ultima scoperta e rimessa alla luce nel 1853 in conseguenza di lavori di escavazione eseguiti nel gran Seminario d' Orleans (2).

Le basi ed i capitelli dei pilastri ottagoni di Renno sono pressochè un' esatta riproduzione di quelli di Saint-Avit.

La stessa forma del fusto, il medesimo rapporto fra l' altezza ed il diametro e l' uguale forma dei capitelli e delle basi, servono a rendere più evidente la loro corrispondenza con quelli di Renno.

Questa somiglianza e corrispondenza di parti, messa in relazione coll' organismo al quale si informa la costruzione della vecchia Pieve, è il solo sprazzo di luce che può rischiarare l' oscura via da seguirsi per ricercare nel silenzio dei documenti storici l' epoca alla quale con qualche fondamento si possa attribuire la sua primitiva costruzione.

I due monogrammi di Cristo a foggia di ruota, scolpiti in uno dei capitelli dei pilastri, sono un altro prezioso elemento che congiunto alla speciale forma dei capitelli ci deve servire di guida nella interessante ricerca (fig. 13).

Colle due prime lettere del nome di Cristo in carattere greco, fra loro allacciate, fu composto fino dalla prima origine il monogramma di Cristo. Questa composizione prese varie forme. Spesse volte quelle lettere furono accompagnate dall' A o dal Ω ed inscritte entro un cerchio. Si trova questa varietà del mo-

(1) M. A. De Caumont, *Abécédaire d' Archéologie.*

(2) Buzonier, *Rapport sur la crypte dècouverte dans le jardin du grande Seminaire d' Orleans.*

Digitized by Google

nogramma nelle catacombe e sopra molte monete dei Re di Francia della prima stirpe (1).

Esempi di monogrammi foggiati a ruota rappresentati da un cerchio con sei uguali raggi di una stessa forma, simili a quelli scolpiti nel capitello di Renno, si veggono in S. Appolinare presso Ravenna.

In un pluteo di S. Giovanni a Monza, puerilmente tempestato di buccherelli, vedesi un altro monogramma del VI secolo; i monogrammi della nostra Pieve non sono che una fedele riproduzione di quello (fig. 14) (2).

Nella facciata del Battistero di Saint-Jean di Poitiéres, in un sarcofago costrutto fra il VI ed il VII secolo, vi sono monogrammi a ruota della stessa *varietà* di quello di Renno (3).

VII. Se le fatte congetture sulla identità della Pieve di Renno colla Basilica, nominata nel brano di documento del 826, non sono destituite di fondamento, dovrebbe la nostra Pieve essere un' opera assai anteriore al IX secolo.

Confortano questa attribuzione la corrispondenza dei suoi pilastri con quelli delle *confessione* o *Martyrium* di Saint-Avit d' Orleans, costruzione accertata dell' ultima metà del VI secolo. Gli stessi monogrammi — scolpiti in uno de' capitelli de' suoi pilastri ottagoni — che si mantennero in uso negli altari e nei capitelli delle colonne dal VII al X secolo e nelle monete dei Re di Francia delle due prime stirpi, concorrono essi pure ad offrire un argomento di più per assegnare la nostra Pieve fra le costruzioni di non molto posteriori all' antica basilica francese.

Quale nesso vi possa essere fra essa e gli avanzi di questa basilica non è facile chiarirlo.

Così pure come siano sorti quasi nello stesso periodo storico dell' arte in paesi così diversi e tanto lontani, privi di ogni

---

(1) M. Crosnier, *Iconographie Chrétienne.*

(2) R. Cattaneo, *Opera citata.*

(3) M. Adolphe Berty, *Baptister de Saint Jean a Poitiéres.*

Digitized by Google

relazione politica e commerciale, monumenti informati ad uno stesso stile, non è cosa facile a determinarsi.

Non azzardiamo affermare che la Pieve di Renno sia una costruzione del VI secolo, sincrona alla cripta di Saint-Avit; asseriamo solo che, per quanto è a nostra cognizione, non è essa confrontabile, per l'originale forma dei suoi pilastri ottagoni, che coi particolari di quella cripta, non avendosi fra noi alcuna costruzione che vi assomigli. Deve essa considerarsi come una riproduzione di alcuni particolari specialissimi di detta cripta, avvenuta non oltre al IX secolo.

Le condizioni economiche e politiche del nostro Appennino e della Chiesa Modenese nel VII e VIII secolo non erano certamente tanto floride da permettere la costruzione di un monumento così importante come la Pieve o Basilica di Renno. Forse durante il Regno di Carlo Magno qualche Monaco o Maestro Comacino, venuto o ritornato di Francia, può sulla fine dell'VIII secolo avere riprodotti particolari presi dalla cripta di Saint-Avit, o dalla chiesa che su quella cripta esisteva (1). Egli è certo però che i pilastri ottagoni della Pieve di Renno sia che risalgono all'epoca dei Merovingi, oppure siano un'opera di secoli posteriori ma non oltre il IX, riproducono fedelmente elementi di una delle più antiche costruzioni cristiane della Francia, di cui in Italia crediamo non si abbia altro esempio.

Settembre 1895.

V. Maestri.

---

(1) D. C. Merzario, *I Maestri Comacini.*

N. B. I disegni 14, 15 e 16 sono una riproduzione di altri simili inseriti dal Cattaneo nella sua opera — *Sull'architettura in Italia — dal secolo VI al mille circa* — ed i disegni 17 e 18 si sono presi dall'*Abecedario archeologico* del De Caumont.

936,136

Digitized by Google

Digitized by Google

LA PIEVE DI RENNO

FIG.ª 1ª PIANTA

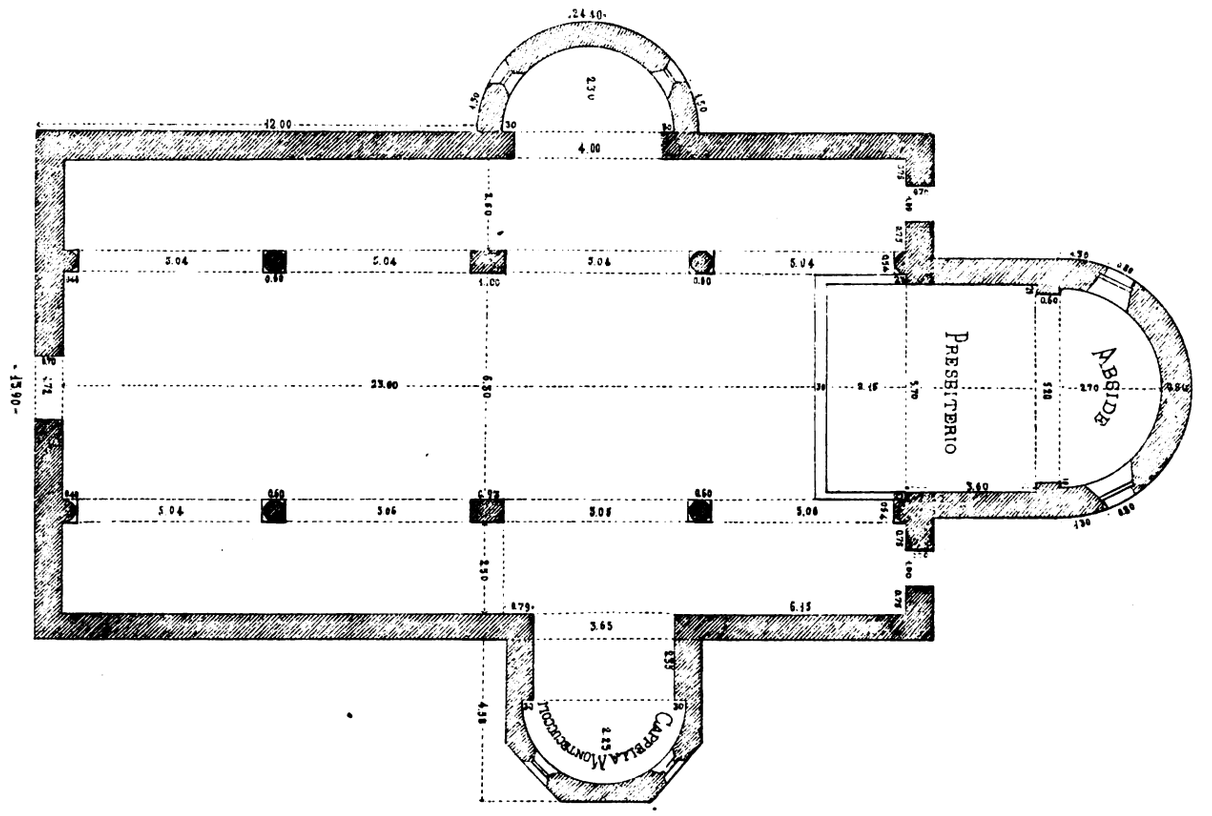
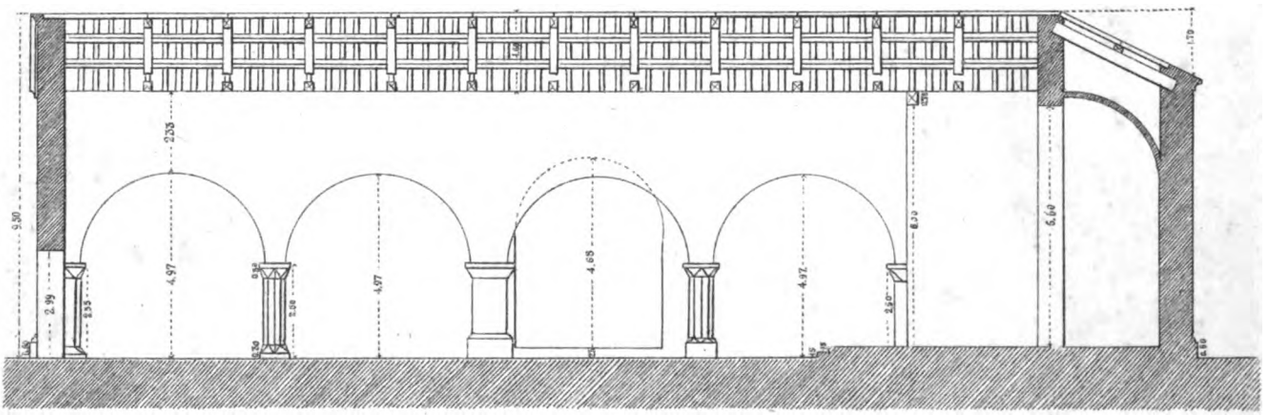


FIG.ª 2ª
SEZIONE LONGITUDINALE



LIT.G PIZZOLOTTI - MODENA

GUSTAVO ZAGN

RAPPORTO 1:200

Digitized by Google

Digitized by Google

LA PIEVE DI RENNO

FIG.ª 3.ª

SEZIONE TRASVERSALE

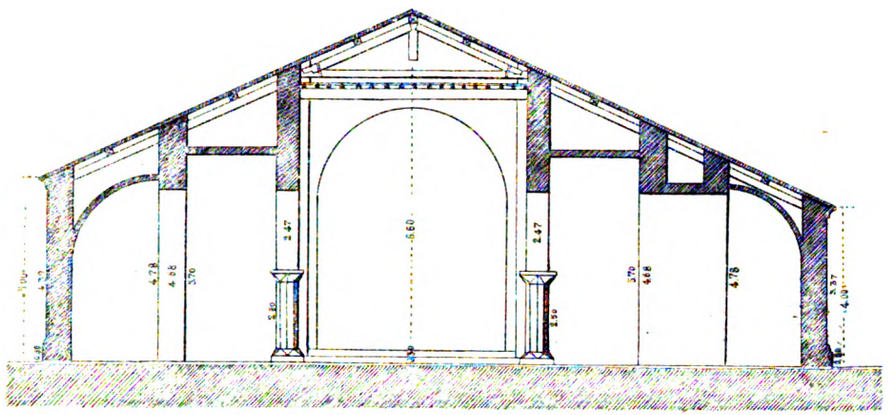


FIG.ª 4.ª

INTERNO

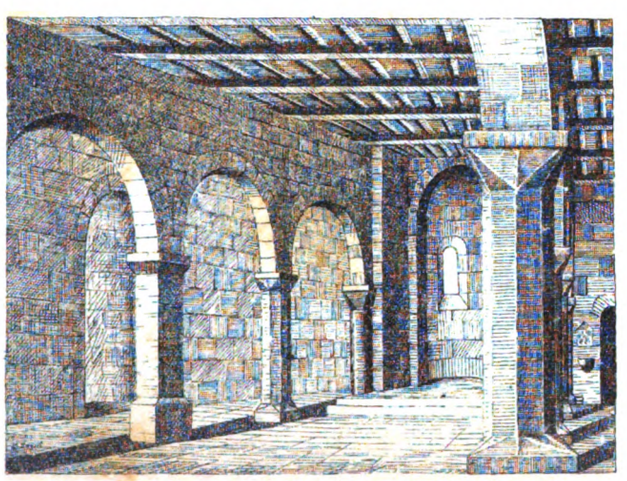


FIG.ª 5.ª

ZOCCOLO ESTERNO

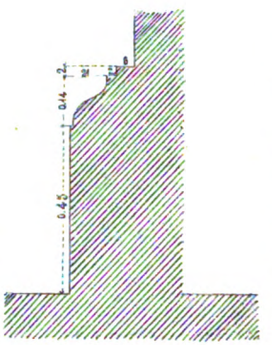


FIG.ª 6.ª

CORNICE DI CORONAMENTO

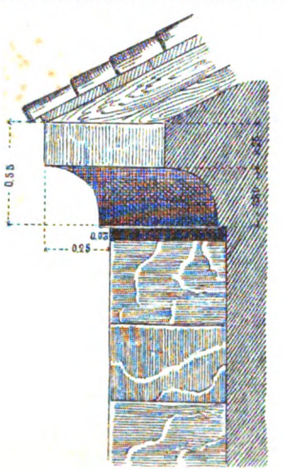


FIG.ª 7.ª

FINESTRE DELLA CAPPELLA MONTECUCCOLI

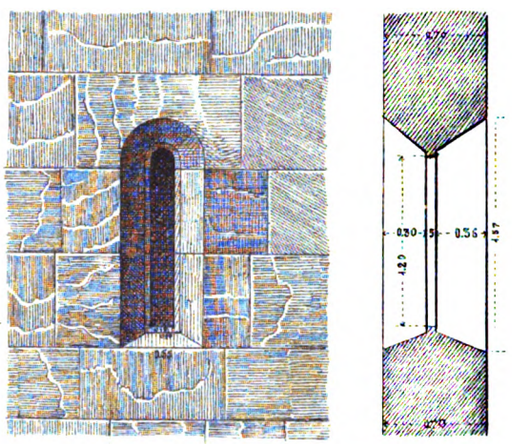
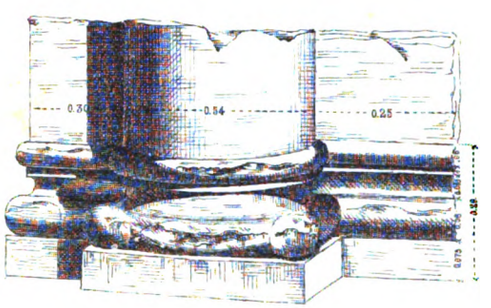


FIG.ª 8.ª

BASI DELLE SEMICOLONNE



LIT. G. PIZZOLOTTI - MODENA

GUSTAVO ZAGNI DIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

La Pieve di Renno

Fig. 9.

Pilastro con monogrammi

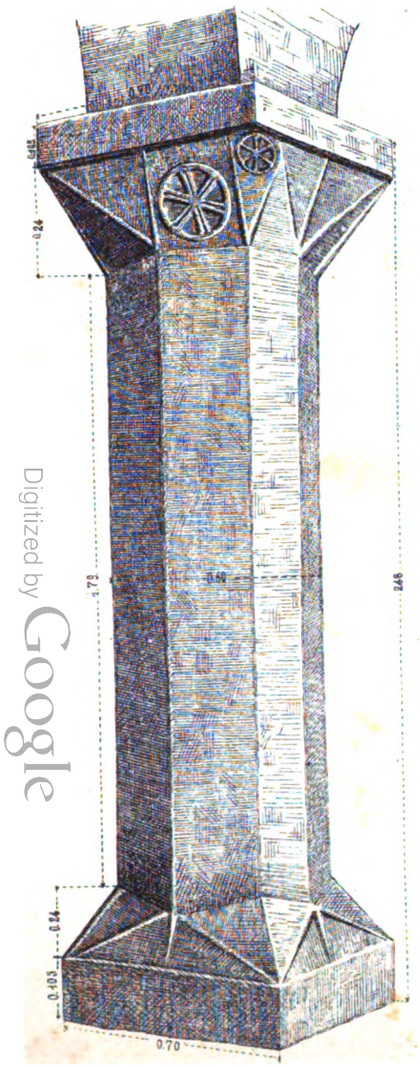


Fig. 10.

Pilastro ad alto zoccolo

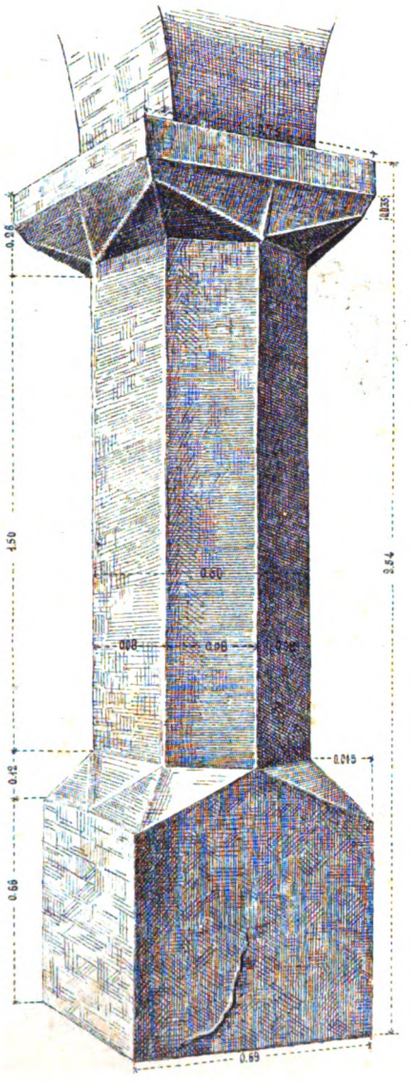


Fig. 11.

Semicolonne

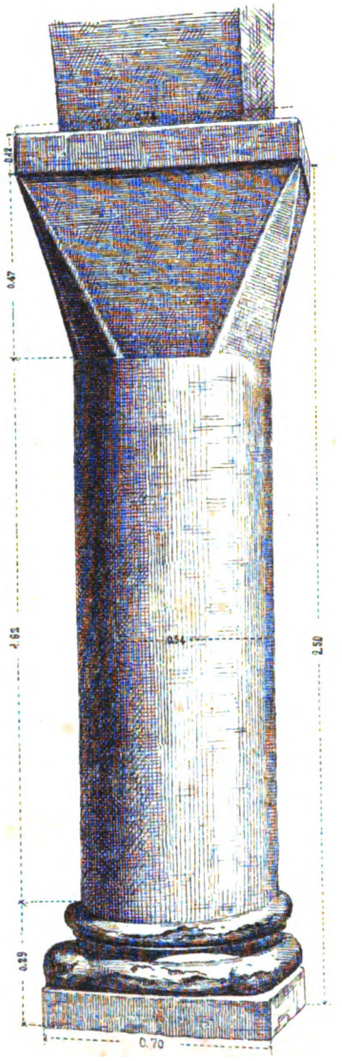
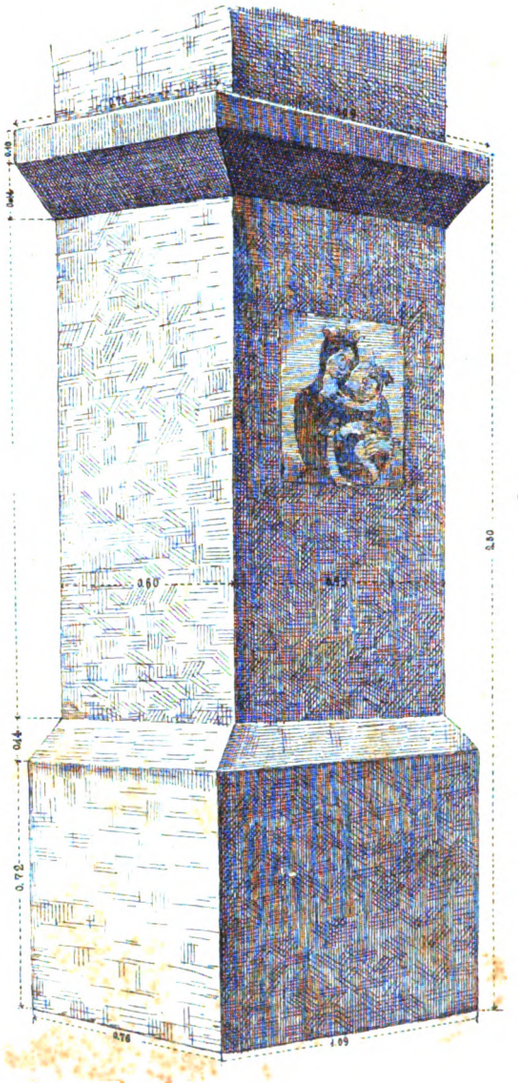


Fig. 12.

Pilastrone



Digitized by Google

Digitized by Google

La Pieve di Renno

Fig: 13:

Capitello con monogrammi

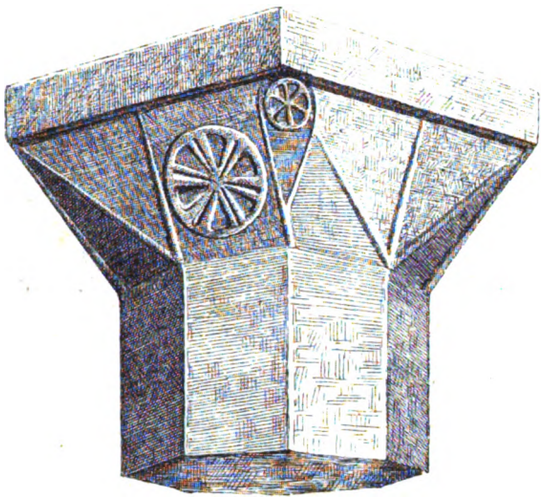


Fig: 15:

Capitelli di S: Michele di Capua

Fig: 17:

Pilastro di S: Avit ad Orleans

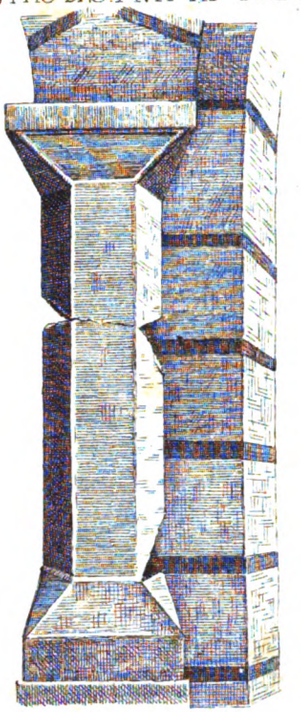


Fig: 14:

Pluteo di S: Giovanni a Monza

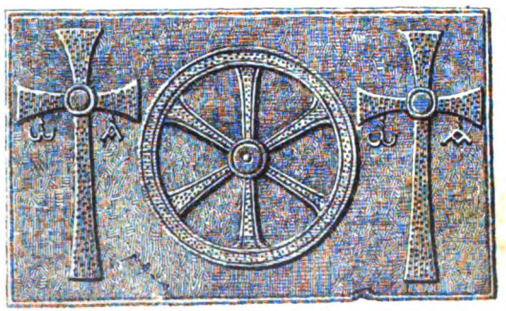


Fig: 16:

Cimasa di S: Maria di Grado

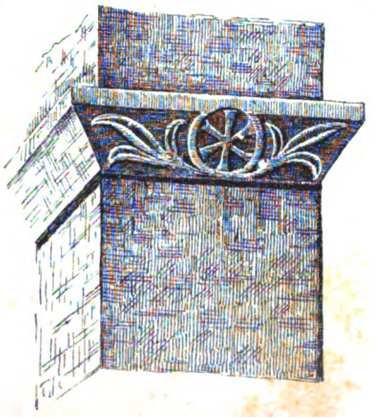
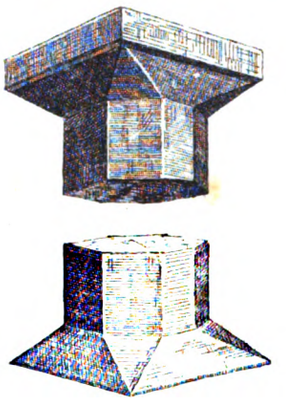


Fig: 18:

Capitelli della Cripta di S: Avit



Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE DEL VOLUME

Albo accademico (24 novembre 1894) . . . . . pag. v

Relazioni degli atti accademici 1894-1895.

Adunanze delle Sezioni . . . . . pag. XIII
Adunanze generali . . . . . » XXXIV
Programma pel concorso ai premi d'onore dell'anno 1894-95 » XXXVI
Atto di aggiudicazione dei premi d'onore del concorso 1892-93 » XXXVIII
Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1894 all'Osservatorio della R. Università di Modena . . . . . » XLI
Risultati eliofanometrici ottenuti al R. Osservatorio di Modena per l'anno 1894. . . . . » LXXI

Opere inviate alla R. Accademia nell'anno 1894.

I. Istituti ecc. . . . . pag. LXXIX
II. Autori . . . . . » LXXXIX

Memorie della Sezione di Scienze.

Loria Gino. — Le scienze esatte nell'antica Grecia. . . . pag. 3
Nicoli Francesco. — Intorno agli spazi lineari a tre dimensioni considerati nel nostro spazio . . . . . » 239
Magnanini Gaetano. — Dissociazione elettrolitica e colorazione » 259
Bergonzini Curzio. — Contributo allo studio delle origini e dello sviluppo dei Cisto Papillomi ovarici semplici . . » 271
Aschieri Ferdinando. — Fondamenti di geometria analitica. » 301
Albertotti Giuseppe. — *Libellus de conseruanda sanitate oculorum,* di Magister Barnabas de Regio . . . . . » 339
Bergonzini Curzio. — Studi sperimentali sull'emissione del calore nel corpo umano . . . . . » 359

Digitized by Google

Mazzetti Giuseppe. — Catalogo degli Echinidi fossili della collezione Mazzetti esistenti nella R. Università di Modena . . . . . pag. 409

Memorie della Sezione di Lettere.

Malmusi Benedetto. — Lapidi della necropoli musulmana di Dahlak . . . . . pag. 3
Riccardi Pietro. — Note bibliografiche modenesi. — II Summario della Santa Scrittura . . . . . » 59
Ferrari-Moreni Giorgio. — Relazione del Vice-Segretario generale sugli atti accademici degli anni 1893-94 . . » 73

Memorie della Sezione d'Arti.

Maestri Vincenzo. — Di alcune costruzioni medioevali dell'appennino modenese. — II. La Pieve di Rocca S. Maria pag. 3
Valdrighi Luigi-Francesco. — Sincrono documento intorno al metodo per suonare il *Phagotus* d'Afranio . . . . » 23
Maestri Vincenzo. — Di alcune costruzioni medioevali dell'Appennino Modenese. — III. La Pieve di Renno . . » 39

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

CENTRO COPIE GORIZIA
- Roma -
Via Basento, 7
Tel./Fax 06.8841765
- LEGATORIA -

Digitized by Google